

TD8 : Applications de la Transformée de Fourier à quelques EDPs

Exercice 1. Le produit de convolution permet de munir $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ d'une structure d'algèbre. On va montrer qu'elle n'admet pas d'élément neutre pour le produit. On suppose par l'absurde qu'il existe un élément neutre $u \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tel que $f \star u = u \star f = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- En appliquant la transformation de Fourier au produit de convolution au produit de convolution, déterminez $\hat{u}$.
- Concluez.

1. EQUATION DE LA CHALEUR

Pour $u_0, f \in C^0(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$, on cherche une solution $u \in C^0([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ de l'équation de la chaleur avec terme source :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u + \lambda u = f & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Montrez l'existence d'une solution sous les hypothèses suivantes :

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}), \widehat{u_0} \in L^1(\mathbb{R}), f \in L^1(\mathbb{R}), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}).$$

On pourra commencer par le cas $f \equiv 0$.

2. EQUATION DES ONDES

Pour $u_0, u_1 \in C^0(\mathbb{R})$, on cherche une solution $u \in C^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}) \cap C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On suppose en plus que

$$u_i \in C^2(\mathbb{R}) \text{ avec } u_i, u'_i, u''_i \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } \widehat{u_i}, \widehat{u'_i}, \widehat{u''_i} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ pour } i = 0, 1.$$

1. Déterminez une solution dans le cas $u_1 \equiv 0$.
2. (MFA) Déterminez une solution dans le cas général.

3. EQUATION DE LA CHALEUR AVEC DONNÉE INITIALE L^2 (MFA)

On se donne $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (1) $u \in C^2([0, +\infty[\times \mathbb{R})$;
- (2) $t \mapsto u(t, \cdot)$ est $C^0([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}))$

et vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0 & \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pp } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$