

Devoir 2 : à rendre le 26 septembre

Exercice 1. Déterminez si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ou ni l'un ni l'autre :

(1) Dans $\mathbb{R}$:

$$[3, 6] ; [2, 3] \cup [4, 6[; [2, 5] \cup]4, 6] ; \{x \in \mathbb{R} / \cos x = 0\}$$

(2) Dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ (x, y) / \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{6} < 1 \right\} ; \left\{ (x, y) / x^2 + 2y^2 \leq 1 \text{ et } x > 0 \right\}$$

Exercice 2. Pour tous : traitez l'exercice 14 du TD1 avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour les MFA : exercices 11 et 13 du TD1.

Exercice 3. Rédigez la preuve de l'équivalence des normes en dimension finie esquissée en cours.

Exercice 4. Soient $A, B \subset E$ un evn tels que

- A, B non vides,
- A est fermé et B est compact
- $A \cap B = \emptyset$

On montre ici de façon séquentielle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\|a - b\| \geq \delta$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.

- Montrez que si la conclusion est fausse, alors il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $a_n \in A$ et $b_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Concluez en utilisant les propriétés de A et B .