

Devoir 3 : à rendre le 10 octobre

Ce devoir nécessite d'être familier(e) avec la topologie générale.

1. ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

Soit X un espace topologique séparé.

- On dit que X est localement compact si tout point admet un voisinage compact.
- On appelle base d'ouverts d'un point $x \in X$ toute collection $\mathcal{O}_x$ d'ouverts contenant x tels que pour tout ouvert U contenant x , alors il existe $V \in \mathcal{O}_x$ tel que $V \subset U$.

- (1) Montrez que dans un espace métrique, tout point admet une base dénombrable d'ouverts.
- (2) Que dire d'un evn localement compact ?
- (3) On suppose que X est localement compact. Montrez que tout point admet une base d'ouverts relativement compacts.
- (4) On suppose que X est localement compact et que tout point admet une base dénombrable d'ouverts. Montrez que tout point admet une base dénombrable d'ouverts relativement compacts.

2. CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ

Soient X, Y deux espaces topologiques séparés (on omet de préciser la topologie). Soit $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est continue si

pour tout $V \subset Y$ ouvert, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X .

On dit que f vérifie la propriété $(\star)$ si :

$\{\forall x \in X \text{ et } \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \text{ qui CV vers } x, \text{ alors } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV vers } f(x)\}$ $(\star)$

On dit que X admet en tout point une base dénombrable d'ouverts dénombrables si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dépendant de x) telle que :

- (i) $x \in U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) U_n est un ouvert de X pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) pour tout ouvert U de X tel que $x \in U$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset U$.

1. On suppose que X est à base dénombrable d'ouverts en tout point. Montrez que pour tout $x \in X$, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la définition peut être choisie telle que $U_{n+1} \subset U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans les questions suivantes, on prendra toujours une telle suite.

$V_n := U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette intersection étant finie, on a donc V_n ouvert qui contient x pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $V_n \subset U_n$ pour tout n , et on en déduit que $(V_n)_n$ est une base de voisinages de x . De plus, $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout n , ce qui répond donc à la question.

2. On suppose que f est continue. Montrez que f vérifie $(\star)$.

3. On suppose dans toute cette question que f n'est pas continue et que X est à base dénombrable d'ouverts en tout point.

- (a) Montrez qu'il existe V ouvert de Y et qu'il existe $x \in X$ tel que $f(x) \in V$ et pour tout ouvert U de X qui contient x , alors $U \not\subset f^{-1}(V)$.
- (b) On se donne une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts DECROISSANTS qui vérifie (i)-(ii)-(iii). Montrez qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in U_n$ et $x_n \notin f^{-1}(V)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Montrez que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (d) Montrez que f ne vérifie pas $(\star)$.

En conclusion, on a montré que lorsque X est à base dénombrable d'ouverts en tout point, alors f est continue si et seulement si f vérifie $(\star)$: c'est la caractérisation séquentielle de la continuité.