

DEVOIR 4: À RENDRE POUR LE 23 OCTOBRE

1. EXERCICES

Exercice 1. On munit $C^0([0, 1])$ de la norme $\|u\|_\infty := \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|$. Pour chacune des applications suivantes, montrez qu'elle est linéaire continue, calculez la norme et déterminer si la norme est atteinte ou pas.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_1 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x) dx \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{ccc} T_2 : C^0([0, 1]) & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_3 : \{f \in C^0([0, 1]) / f(0) = 0\} & \rightarrow & C^0([0, 1]) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x f(t) dt) \end{array} \right\}$$

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Montrer que le produit externe

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \pi : \mathbb{R} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

est continu (en munissant $\mathbb{R} \times E$ de la norme produit : $\|(\lambda, x)\| := |\lambda| + \|x\|_E$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$).

Exercice 3. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn et soit $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bilinéaire. En vous inspirant de la preuve de la caractérisation des applications linéaires continues, montrez l'équivalence des propositions suivantes :

- B est continue pour la topologie produit ;
- Il existe $M > 0$ tel que $|B(x, y)| \leq M\|x\|_E\|y\|_F$ pour tout $(x, y) \in E \times F$

Exercice 4. En utilisant uniquement que toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente, montrez que $[-1, 1]^2$ est compact, puis que $[-1, 1]^n$ est compact pour tout $n \geq 1$. *A ne faire QUE si vous ne l'avez pas déjà fait dans le devoir précédent.*

2. CARACTÉRISATION DE LA TOPOLOGIE PRODUIT

Si vous êtes bloqué(e) dans ce problème, n'hésitez pas à demander des indications à l'enseignant.

On rappelle la définition suivante :

Définition : Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On dit que $\Omega \subset X \times Y$ est un ouvert pour la topologie produit si

- Soit $\Omega = \emptyset$,
- Soit pour tout $(x, y) \in \Omega$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que $(x, y) \in U \times V \subset \Omega$.

On note $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ la topologie produit.

On va montrer que la topologie produit est la seule qui satisfait les deux propriétés suivantes :

- Les projections canoniques sont continues ;
- Toute fonction à valeurs dans le produit est continue ssi chaque fonction coordonnée est continue.

Soyons plus précis. Dans tout ce problème, on se donne $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On note alors les projections canoniques

$$\left\{ \begin{array}{ccc} p: & X \times Y & \rightarrow X \\ & (x, y) & \mapsto x \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} q: & X \times Y & \rightarrow Y \\ & (x, y) & \mapsto y \end{array} \right\}$$

Une topologie $\mathcal{T}$ étant donnée sur $X \times Y$, on dit que $\mathcal{P}_1$ a lieu si, avec cette topologie, p et q sont continues (sous-entendu : $p: (X \times Y, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ et $q: (X \times Y, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ sont continues).

On dit que $\mathcal{P}_2$ a lieu si pour tout espace topologique $(Z, \mathcal{T}_Z)$, pour toutes fonctions $f: Z \rightarrow X$, $g: Z \rightarrow Y$, alors

$$\left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} h: & (Z, \mathcal{T}_Z) & \rightarrow (X \times Y, \mathcal{T}) \\ & x & \mapsto (f(x), g(x)) \end{array} \right\} \text{ est continue} \right\} \Leftrightarrow \{f \text{ et } g \text{ sont continues}\}$$

Le but de ce problème est de montrer la proposition suivante :

Proposition : *On se donne deux espaces topologiques non vides $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$. La topologie produit $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ est l'unique topologie sur $X \times Y$ qui rend vraies les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.*

1.(échauffement) Dans un espace topologique quelconque, montrez qu'un ensemble non-vide est ouvert si et seulement si il est voisinage de tous ses points.

2. Montrez que $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$ vérifie $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $X \times Y$ qui rend continues p et q . Montrez que $\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}$.

4. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $X \times Y$ qui vérifie $\mathcal{P}_2$. Montrez que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y$.

Indication : question très rapide à résoudre si on prend le bon espace Z , la bonne topologie sur Z et les bonnes fonctions f et g .

5. Montrez la Proposition.