

Devoir 5 : à rendre au plus tard le 22 novembre

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. On munit le produit $E \times F$ de la norme $\|(x, y)\| := \|x\|_E + \|y\|_F$ pour $(x, y) \in E \times F$. Soit $B : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

- En raisonnant comme dans la caractérisation de la continuité des applications linéaires continues, montrez que B est continue si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $|B(x, y)| \leq M\|x\|_E\|y\|_F$ pour tous $x \in E$ et $y \in F$.
- En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus, montrez que B est continue si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ccc} B(x_0, \cdot) : & F & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto & B(x_0, y) \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} B(\cdot, y_0) : & E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & B(x, y_0) \end{array} \right\}$$

sont continues pour tous $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$.

1. LE THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE

Théorème 1. Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Alors il existe $c > 0$ tel que $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$.

Cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. On se donne donc E, F, T comme dans l'énoncé.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n := \overline{T(B_E(0, n))}$. Montrez que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, et déduisez-en qu'il existe $c > 0$ tel que

$$B_F(0, 2c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

2. On fixe $y \in B_F(0, c)$. Montrez qu'il existe $x_1 \in B_E(0, 1)$ tel que

$$\|2y - T(x_1)\|_F < c.$$

3. Montrez par récurrence qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n \in B_E(0, 1)$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\left\| 2^n \left(y - T \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \right) \right) \right\|_F < c \text{ pour tout } n \geq 1.$$

4. Déduisez-en qu'il existe $x \in B_E(0, 1)$ (c'est-à-dire $\|x\|_E < 1$) tel que $y = T(x)$. Concluez.

5. Montrez que l'image par T d'un ouvert de E est un ouvert de F (c'est la définition d'une application ouverte).

2. THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ

Démontrez le théorème du graphe fermé en suivant les indications données en cours.