

CC3 du 15 janvier

Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction. Des points seront attribués lorsque les vérifications seront effectuées.

Exercice 1. On va prouver ici le résultat suivant du cours :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0. \quad (\star)$$

- (1) Dressez le tableau de variations de la fonction $x \mapsto g(x) := \ln x - 2\sqrt{x}$ pour $x > 0$. On ne demande PAS les limites.
- (2) Montrez qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\ln x \leq 2\sqrt{x} + C$ pour tout $x > 0$.
- (3) Déduisez-en la limite $(\star)$.

Exercice 2. Calculez

$$\int_2^3 \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$$

Exercice 3. Déterminez les limites aux bornes de l'ensemble de définition (incluant éventuellement l'infini) de

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 8}{\sqrt{x} - 2}.$$

Exercice 4. Ensemble de définition, dérivée première et dérivée seconde de $x \mapsto f(x) = \cos(\ln x)$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, tracez le graphe et déterminez, s'ils existent, le minimum global, le maximum global, et les minima et maxima locaux.

- (1) $f(x) = x^2 + 6x - 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 1]$.
- (2) $f(x) = x + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $[0, \pi]$.
- (3) $f(x) = x^2 - |x^2 - 2x|$ sur $[-1, 3]$.

Exercice 6. Déterminez les points critiques de la fonction suivante :

$$x \mapsto x^3 - 10x^2 + 12x + 1.$$

Pour chacun de ces points, déterminez s'il s'agit d'un minimum ou maximum local strict. Tracez une allure du graphe au voisinage de chaque point critique.

Exercice 7. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - 2y = -2x^2 \\ y(1) = \frac{7}{2} \end{array} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \right\}$$

Quelle est la limite de $y(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?

Exercice 8. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + 1)y' - xy = 0 \\ y(0) = 2 \end{array} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \right\}$$

Tournez SVP

Exercice 9. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y' + y = (5x + 17)e^{2x} \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(2) = 3e^4 \end{array} \right\}$$

Exercice 10. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + xy = x^3 - x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Formulaire : Carrés des entiers de 10 à 20.

$$10^2 = 100; 11^2 = 121; 12^2 = 144; 13^2 = 169; 14^2 = 196$$

$$15^2 = 225; 16^2 = 256; 17^2 = 289; 18^2 = 324; 19^2 = 361$$

FIN