

Electromagnétisme

Cursus/option : Première année
Date de mise à jour : 2020
Année scolaire : 2019-2020
Responsable du cours : François MARQUIER

Ce polycopié est en grande partie tiré de l'ancien polycopié rédigé par Jean-Jacques Greffet. Il est issu de nombreuses années d'expérience et véhicule donc un message pédagogique très abouti que je n'ai pas voulu perdre pour les étudiants auxquels il s'adresse. Je remercie J.J. Greffet de m'avoir permis de reprendre son travail.

Table des matières

1. Rappels : les équations de Maxwell	7
1.1. Forces et champs	7
1.2. Équations de Maxwell microscopiques	7
1.3. Potentiels	9
1.3.1. Introduction des potentiels	9
1.3.2. Invariance de jauge	10
1.4. Propagation et ondes planes	10
1.4.1. Équation de propagation des potentiels	10
1.4.2. Équation de propagation des champs	10
1.4.3. Propagation dans le vide. Onde plane monochromatique	11
1.5. Règles de calcul pour les ondes planes monochromatiques	12
1.5.1. Quelques identités	12
1.5.2. Transversalité	12
1.5.3. Structure de l'onde plane	12
1.6. Énergie du champ électromagnétique	12
1.6.1. Énergie électrostatique et magnétostatique	12
1.6.2. Énergie électromagnétique. Vecteur de Poynting	13
Compléments du chapitre 1	15
1A. Complément A : Théorème de Helmholtz	15
1A.1. Énoncé du théorème de Helmholtz	15
1A.2. Démonstration	15
1A.3. Applications	16
1A.4. Champs rotationnels et irrotationnels ; transverses et longitudinaux	17
2. Propagation dans le vide	19
2.1. Introduction	19
2.2. Propagation d'un faisceau	19
2.2.1. Position du problème	19
2.2.2. Équation de propagation et équation de Helmholtz	20
2.2.3. Formule de propagation du champ : Développement en ondes planes.	20
2.2.4. Approximation de champ lointain	21
2.3. La propagation est un analyseur de spectre	22
2.3.1. Notion de fréquence spatiale	22
2.3.2. Spectre des fréquences spatiales	22
2.3.3. La propagation est un filtre passe-bas de fréquences spatiales	23
2.3.4. Diffraction naturelle	23
2.3.5. Analogie avec la propagation d'un paquet d'ondes	24
2.4. Le principe de Huygens Fresnel retrouvé	24
2.4.1. Introduction	24
2.4.2. Développement d'une onde sphérique en ondes planes	24
2.4.3. Le principe de Huygens Fresnel.	25
Compléments du chapitre 2	27
2A. Complément A : Diffraction de Fraunhofer	27
2A.1. Approximation de la phase stationnaire	27
2A.2. Approximation de Fraunhofer	28
2B. Complément B : Développement de Weyl	29

3. Rayonnement	31
3.1. Aperçu intuitif du mécanisme de rayonnement d'une charge ponctuelle	31
3.1.1. Description de l'onde rayonnée	31
3.1.2. Propriétés	31
3.1.3. Formulation générale du problème	32
3.2. Notion de fonction de Green. Illustration : cas de l'électrostatique	32
3.2.1. Introduction	32
3.2.2. Charge ponctuelle placée en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	32
3.2.3. Cas d'une répartition de charges	33
3.2.4. Généralisation	34
3.3. Potentiels retardés	34
3.3.1. Recherche de la fonction de Green du problème	34
3.3.2. Méthode de calcul de la fonction de Green	34
3.3.3. Solution des potentiels retardés	35
3.4. Rayonnement en champ lointain	36
3.4.1. Approximation du champ lointain.	36
3.4.2. Approximation dipolaire électrique	37
3.4.3. Calcul du champ rayonné	38
3.4.4. Puissance rayonnée dans tout l'espace en champ lointain	40
3.4.5. Réaction de rayonnement	40
Compléments du chapitre 3	43
3A. Complément A : Fonction de Green	43
3A.1. Fonction de Green dans l'espace de Fourier	43
3A.2. Fonction de Green dans l'espace direct	43
4. Diffusion	47
4.1. Diffusion par un électron libre	47
4.1.1. Détermination du moment dipolaire de l'électron	48
4.1.2. Calcul de la puissance diffusée. Section efficace de diffusion	48
4.1.3. Libre parcours moyen. Diffusion simple et diffusion multiple	49
4.1.4. Section efficace différentielle de diffusion	49
4.2. Diffusion par un atome ou une molécule	50
4.2.1. Équation du mouvement	50
4.2.2. Section efficace de diffusion	51
4.2.3. Diffusion Rayleigh, diffusion Thomson et diffusion résonnante	51
4.2.4. Pourquoi le ciel est bleu, pourquoi les nuages et le lait sont blancs ?	52
5. Équations de Maxwell dans la matière	53
5.1. Introduction	53
5.2. Moyennes spatiales	53
5.2.1. Définition de la moyenne spatiale	53
5.2.2. Analogie avec la formation des images	54
5.2.3. Dérivée d'une quantité moyennée	55
5.3. Équations de Maxwell macroscopiques	55
5.3.1. Équations de Maxwell macroscopiques	55
5.3.2. Calcul de $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle$: Équation de Maxwell-Gauss macroscopique	56
5.3.3. Équation de Maxwell-Ampère	58
5.3.4. Interprétation physique des charges liées	58
6. Relations constitutives	61
6.1. Propriétés	61
6.1.1. Homogénéité	61
6.1.2. Isotropie	61
6.1.3. Linéarité	62
6.1.4. Localité	62
6.1.5. Dispersion	62

6.2.	Origine de la dispersion	63
6.2.1.	Exemple de l'oscillateur harmonique	63
6.2.2.	Cas d'un milieu	64
6.3.	Constante diélectrique généralisée	64
6.3.1.	Régime statique	64
6.3.2.	Régime dépendant du temps	64
6.3.3.	Formulation pratique des équations de Maxwell dans la matière	65
Compléments du chapitre 6		67
6A.	Complément A : Pourquoi peut-on traiter classiquement le mouvement de l'électron ?	67
6A.1.	Le théorème d'Ehrenfest	67
6A.2.	Equations du mouvement d'un électron dans un métal	67
6B.	Complément B : Modèle de l'électron élastiquement lié	69
6B.1.	Hypothèses simplificatrices	69
6B.2.	Conclusions	70
6B.3.	Non-linéarité	71
6C.	Complément C : Modèle de constante diélectrique d'un cristal ionique ?	73
7. Propagation dans la matière		77
7.1.	Cas Particulier : Propagation en milieu non-dispersif	77
7.1.1.	Modèle	77
7.1.2.	Équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$	77
7.2.	Cas Général : Équation de propagation en milieu dispersif	78
7.2.1.	Modèle	78
7.2.2.	Équation de Helmholtz : Équation de propagation en régime monochromatique . . .	78
7.3.	Propagation dans un milieu matériel	79
7.4.	Discussion de la propagation dans l'espace réciproque	80
7.5.	Aspects énergétiques	80
7.5.1.	Puissance échangée entre le champ et la matière	80
7.5.2.	Puissance moyenne absorbée	81
7.5.3.	Bilan d'énergie	81
8. Réflexion, réfraction		83
8.1.	Introduction	83
8.2.	Relations de continuité	83
8.3.	Lois de Snell-Descartes	85
8.4.	Facteur de réflexion en polarisation TE	86
8.4.1.	Notations : polarisations TE et TM	86
8.4.2.	Facteurs de réflexion et de transmission	87
8.4.3.	Cas de la réflexion totale	88
8.5.	Facteurs de réflexion en intensité	88
8.5.1.	Définition	88
8.5.2.	Flux du vecteur de Poynting	89
8.5.3.	Conservation de l'énergie à une interface	90
8.5.4.	Emissivité et absorptivité	91
8.6.	Cas de l'incidence normale	91
8.6.1.	Facteur de réflexion	91
8.6.2.	Dispositifs antirélecteurs	91
8.6.3.	Paradoxe de l'absorbeur	92
8.6.4.	Couleur d'un corps	93
8.7.	Cas d'une polarisation quelconque	93
8.7.1.	Facteurs de réflexion et de transmission	93
8.7.2.	Angle de Brewster	93
9. Optique géométrique		97
9.1.	Limite des courtes longueurs d'onde	97
9.1.1.	Introduction	97
9.1.2.	Équations de Maxwell (dans l'approximation $k_0 \rightarrow \infty$)	97

9.2.	Rayons lumineux	98
9.2.1.	Vecteur de Poynting	98
9.2.2.	Rayons lumineux	99
9.3.	Équation des rayons lumineux	99
9.4.	Lois de Snell-Descartes	99
9.5.	Applications	100
9.5.1.	Effet mirage	100
9.5.2.	Déviation par l'atmosphère	100
9.5.3.	Applications aux mesures de température et de concentrations	101
A.	Séries et Transformation de Fourier	103
A.1.	Séries de Fourier	103
A.1.1.	Série en $\exp[ik_n x]$	103
A.1.2.	Série de cosinus et de sinus	103
A.1.3.	Egalité de Bessel-Parseval	104
A.2.	Transformation de Fourier	104
A.2.1.	Définitions : L'intégrale de Fourier comme limite d'une série de Fourier	104
A.2.2.	Transformation de Fourier dans l'espace à 3 dimensions	105
A.2.3.	Propriétés simples	106
A.2.4.	Quelques exemples	106
A.2.5.	Largeur de deux fonctions, transformées de Fourier l'une de l'autre	107
B.	Formulaire	109
B.1.	Opérateurs d'analyse vectorielle	109
B.1.1.	Composition d'opérateurs	109
B.1.2.	Opérateurs s'appliquant sur un produit de deux fonctions	109
B.2.	Transformation d'une intégrale sur une surface fermée en intégrale de volume	109
B.3.	Transformation d'une intégrale le long d'un contour fermé en une intégrale de surface	110
B.4.	Opérateurs dans les principaux systèmes de coordonnées	110
B.4.1.	Coordonnées cartésiennes	110
B.4.2.	Coordonnées cylindro-polaires (cylindriques)	110
B.4.3.	Coordonnées sphériques	111

1. Rappels : les équations de Maxwell

Ce chapitre, qui n'est pas abordé entièrement en cours, est un bref rappel de l'essentiel des résultats faisant partie du programme des classes préparatoires portant sur les équations de Maxwell et les potentiels. Il est important de savoir utiliser les opérateurs de dérivée spatiale qui sont habituellement notés **rot** pour rotationnel, **div** pour divergence et **grad** pour gradient. Un formulaire reprenant ces opérateurs et les opérations usuelles est donné en annexe de ce polycopié. Nous discuterons ici des propriétés des solutions des équations de Maxwell dans le vide, c'est-à-dire, que les densités volumiques de charges et de courants seront nulles (i.e. $\rho = 0$; $\mathbf{j} = 0$). La notion d'énergie électromagnétique sera brièvement abordée. La fin de ce chapitre préliminaire est consacrée à une décomposition d'un champ vectoriel qui permet de discuter des notions de potentiels et d'invariance de jauge.

1.1. Forces et champs

La notion de champ (électrique, magnétique ou gravitationnel par exemple) a été introduite pour caractériser une réalité physique qui est la force exercée sur un objet. Ainsi une bille de masse m dans le champ gravitationnel terrestre $\mathbf{g}$ est soumise à une force, appelée poids (!), $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. De même, une charge q de vitesse $\mathbf{v}$ peut être soumise à une force électromagnétique $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ où $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont respectivement les champs électrique et magnétique. En électrostatique, pour prendre un exemple bien connu, le champ électrique au point M caractérisé par sa position $\mathbf{r}$ engendré par une charge q' située à l'origine est donné par :

$$\mathbf{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

d'où la force électrique exercée par q' sur la charge q :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.2)$$

Ce dernier résultat est vrai lorsque les deux charges sont fixes. On intuite très vite que la force exercée par un grand nombre de charges, en général en mouvement donc soumises à des accélérations, induisant des retards, sur une charge q a une expression bien plus compliquée. L'avantage d'une description des forces par l'intermédiaire des champs est que la donnée de deux vecteurs ($\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$) au point M permet d'exprimer simplement la force exercée sur une charge placée au point M : la notion de champ est d'abord une commodité de calcul.

1.2. Équations de Maxwell microscopiques

Les champs électrique et magnétique dépendent de la position et du temps. On devrait donc écrire dans toute la suite de ce chapitre $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Nous omettrons ces dépendances par souci de lisibilité. Au début du XIX^e siècle, on sait que le champ électrique et le champ magnétique sont liés. Il faudra attendre presque 50 ans avant que ce lien soit réellement formalisé. Parmi les multiples contributions de James Clerk Maxwell à la science, la plus grande reste sans nul doute l'unification des travaux sur l'électricité et le magnétisme réalisés par Michael Faraday et André-Marie Ampère. La formulation qu'il utilise et présente à la Royal Society en 1864 comprenait alors 20 équations différentielles. En 1867, l'apparition de la notation vectorielle des différentielles permet d'en réduire le nombre¹. En 1884, soit cinq ans après la mort de

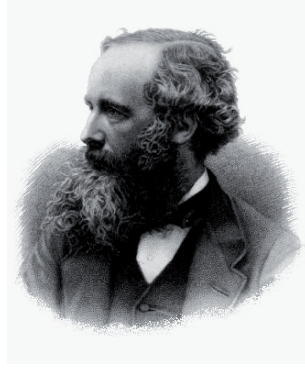


FIGURE 1.1. — *James Clerk Maxwell, 1831-1879, est un mathématicien et physicien écossais. Il est à l'origine des célèbres équations de Maxwell. Einstein décrivait les travaux de Maxwell comme les "plus profonds et fructueux que la physique ait connu depuis le temps de Newton".*

J.C. Maxwell, Oliver Heaviside sélectionne quatre équations permettant de relier les champs électriques et magnétiques. Ce sont ces quatre équations que l'on appelle "équations de Maxwell".

Les équations de Maxwell sont donc au nombre de quatre et définissent les divergences et rotationnels des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Deux d'entre elles seulement sont reliées aux sources, caractérisées par la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant $\mathbf{j}$. Dans le système d'unité international (MKSA, pour Metre, Kelvin, Seconde et Ampère), les deux équations de Maxwell indépendantes des sources s'écrivent :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Les équations reliant les champs aux sources sont quant-à elles :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.4}$$

On parle d'équations de Maxwell microscopiques lorsque l'on considère des termes sources décrits par un ensemble de charges ponctuelles q_i . Les charges q_i ont une position $\mathbf{r}_i(t)$ et une vitesse $\mathbf{v}_i(t) = d\mathbf{r}_i(t)/dt$. L'expression des densités volumiques de charge et de courant est alors donnée par :

$$\rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)]\tag{1.5}$$

$$\mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)].\tag{1.6}$$

où la notation δ représente la distribution de Dirac. Il est à noter que $\delta(\mathbf{r})$ s'exprime en m^{-3} de sorte que ρ et $\mathbf{j}$ sont bien des grandeurs volumiques.

L'électron est une charge ponctuelle. Le proton a un diamètre de l'ordre du femtomètre (10^{-15} m) très inférieur aux grandeurs caractéristiques que nous étudierons, il sera lui aussi considéré comme ponctuel. La matière chargée étant constituée de protons et d'électrons, les équations de Maxwell microscopiques sont donc toujours valables, même dans la matière! Toutefois, les champs électromagnétiques dans la matière, donc pas trop loin des charges, comportent de nombreuses singularités. On sait par exemple que le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle (eq. (1.1)) diverge au voisinage de la charge. On appellera ces champs, les champs microscopiques. On verra plus loin que lorsque l'on étudie la propagation du champ dans la matière, il faut introduire un processus de moyenne qui conduit à l'introduction de champs électromagnétiques régularisés. On appellera ces champs électromagnétiques, champs dans la matière ou champs macroscopiques.

1. Le vecteur ∇ , introduit alors, a d'abord été surnommé "atled" pour "delta à l'envers" par Maxwell. Ce n'est qu'en 1870 que William Robertson Smith propose le nom de "nabla" par analogie avec la forme d'une harpe grecque qui dans l'antiquité portait ce nom.

1.3. Potentiels

1.3.1. Introduction des potentiels

Nous allons introduire dans la suite un potentiel vecteur et un potentiel scalaire, ayant respectivement 3 et 1 dimension(s). Ces potentiels sont des quantités qui satisfont automatiquement aux équations (1.3) et (1.4). L'intérêt d'introduire ces grandeurs est que l'on remplace ainsi un problème à 6 fonctions (les 3 composantes de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$) par un problème à 4 fonctions. Nous verrons même dans le chapitre sur le rayonnement que la donnée du seul potentiel vecteur nous permet de retrouver la totalité du champ électromagnétique rayonné.

Considérons tout d'abord l'équation $\text{div}\mathbf{B} = 0$. On peut écrire le champ magnétique $\mathbf{B}$ sous la forme (théorème de Helmholtz en complément) :

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (1.7)$$

Où $\mathbf{A}$ est appelé le "potentiel vecteur". En reportant cette forme dans (1.3 b), on obtient :

$$\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (1.8)$$

En utilisant là encore le théorème de Helmholtz, on peut écrire :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}V \quad (1.9)$$

Où V est le "potentiel scalaire".

Si on travaille désormais avec $\mathbf{A}$ et V , les deux équations (1.3) sont satisfaites automatiquement. Reporter (1.7) et (1.9) dans (1.4) nous permet d'obtenir les équations satisfaites par les potentiels $\mathbf{A}$ et V

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j} + \text{grad}\left[\text{div}\mathbf{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right] \\ \Delta V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \text{div}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

A ce stade, il faut faire trois remarques :

- i) Tout d'abord, le système (1.10) est un système couplé reliant les potentiels $\mathbf{A}$ et V aux sources du champ ρ et $\mathbf{j}$.
- ii) Les quatre équations de Maxwell se ramènent à deux équations concernant les potentiels. Le prix à payer est une indétermination sur les valeurs des potentiels (voir point suivant).
- iii) Le champ $\mathbf{A}$ est indéterminé : en effet seul son rotationnel est fixé par (1.7). Nous sommes libres de choisir $\text{div}\mathbf{A}$ à notre convenance. Choisir la valeur de $\text{div}\mathbf{A}$ est choisir une solution particulière pour $\mathbf{A}$ parmi une infinité de solutions possibles. C'est ce que l'on appelle un choix de jauge.

Il existe une jauge particulièrement commode : celle qui permet de découpler le système (1.10) que nous utiliserons dans la suite du cours. On l'appelle jauge de Lorenz² :

$$\text{div}\mathbf{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

Soulignons que ce choix ne suffit pas à déterminer complètement les potentiels. Il faut bien sûr se donner les conditions aux limites du problème. Dans le cadre de ce cours, nous utiliserons des conditions du type "champ nul à l'infini".

2. Héhé : du physicien Danois Ludvig Lorenz à ne pas confondre avec le physicien Néerlandais Hendrik Antoon Lorentz prix Nobel en 1902 avec Pieter Zeeman "in recognition of the extraordinary service they rendered by their researches into the influence of magnetism upon radiation phenomena". Il y a donc la jauge de Lorenz et la force de Lorentz, il y a aussi l'équation de Lorentz-Lorenz, aussi connue sous le nom de Clausius-Mossotti, qui relie l'indice optique à la polarisabilité de la matière.

1.3.2. Invariance de jauge

L'invariance de jauge traduit simplement le fait que les grandeurs physiques que sont les champs électrique et magnétique ne doivent pas être modifiées lorsque les potentiels sont changés. Cela impose une condition sur la forme des potentiels. Envisageons ainsi un couple $(\mathbf{A}_0, V_0)$ tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} - \mathbf{grad} V_0 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}_0 \quad (1.13)$$

et tel que $(\mathbf{A}_0, V_0)$ soit solution du système (1.10). Le choix de $\mathbf{A}$ étant arbitraire (puisque $\mathbf{div} \mathbf{A}$ peut être quelconque), il existe certainement des solutions du type $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, V_0 + V_1)$. Nous nous proposons de déterminer la forme de $\mathbf{A}_1$ et V_1 . Ecrivons que $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, V_0 + V_1)$ est solution du problème.

Cela entraîne :

i) $(\mathbf{A}_1, V_1)$ solution du système homogène (sans sources) associé à (1.10)

ii) $\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 = 0$ (puisque $\mathbf{B}$ doit être inchangé)

iii) $\mathbf{grad} V_1 + \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = 0$.

On en tire : $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{grad} X$ et $V_1 = \frac{\partial X}{\partial t}$

En conclusion, si $(\mathbf{A}_0, V_0)$ est solution du problème, tout couple de la forme $(\mathbf{A}_0 - \mathbf{grad} X, V_0 + \frac{\partial X}{\partial t})$ est également solution.

1.4. Propagation et ondes planes

1.4.1. Équation de propagation des potentiels

Dans le cadre de la jauge de Lorenz, on reporte (1.11) dans (1.10). On obtient :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (1.14)$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

où l'on a posé $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$. C'est une équation de propagation dans laquelle c est la vitesse de propagation. C'est ainsi que J.C. Maxwell a découvert l'existence des ondes électromagnétiques. A l'époque, ϵ_0 et μ_0 sont des constantes mesurables dans un système d'unité donné, par exemple en mesurant des forces électrostatiques et magnétostatiques bien connues à l'époque. Lorsque Maxwell fait le calcul, il constate que $c = 3.10^8$ m/s qui est déjà connue pour être la vitesse de la lumière (aux incertitudes de mesure près). Il écrira : "On peut difficilement éviter de conclure que la lumière consiste en vibrations transverses du même milieu que celui qui est la cause des phénomènes électriques et magnétiques". La lumière est donc une onde électromagnétique.

1.4.2. Équation de propagation des champs

L'équation vérifiée par $\mathbf{E}$ est obtenue à partir des équations de Maxwell en éliminant $\mathbf{B}$. Pour ce faire, on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday afin de faire apparaître $\mathbf{rot} \mathbf{B}$ qui peut être éliminé à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère.

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \mathbf{B}).$$

Or $\text{rot rot} \mathbf{E} = \text{grad div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ et $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, d'où

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

De même on obtient :

$$\Delta \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot} \mathbf{j}. \quad (1.17)$$

1.4.3. Propagation dans le vide. Onde plane monochromatique

Les équations de propagation des champs utilisent des dérivées des variables spatiales et temporelle. Pour s'affranchir des dérivées temporelles, une astuce est de travailler avec les composantes de Fourier des champs électromagnétiques. Par exemple, pour le champ électrique, on peut écrire :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.18)$$

où $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ est la composante de Fourier du champ électrique à la pulsation ω . *Ce n'est plus une fonction du temps*. A une fréquence donnée, elle ne dépend que des variables spatiales. Cette décomposition sera très importante lorsque nous aborderons les équations de Maxwell dans la matière.

Dans le vide, on montre facilement que l'équation (1.16) devient (voir premier cours d'optique physique sur la diffraction) :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (1.19)$$

Considérons dans un souci de simplicité un problème à une dimension de l'espace :

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(x, \omega)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(x, \omega) = 0 \quad (1.20)$$

dont la solution est de la forme (on note $k = \omega/c$) :

$$\mathbf{E}(x, \omega) = \mathbf{E}_+ \exp(ikx) + \mathbf{E}_- \exp(-ikx)$$

Si le champ électromagnétique n'a qu'une composante de Fourier à une pulsation ω_0 donnée³, on dit que le champ est monochromatique et on a l'habitude d'écrire (on note $k_0 = \omega_0/c$) :

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_+ \exp(ik_0 x - i\omega_0 t) + \mathbf{E}_- \exp(-ik_0 x - i\omega_0 t)$$

Le champ apparaît comme une somme de deux ondes planes monochromatiques. Le premier terme est une onde se propageant dans le sens des x croissants et le second terme une onde se propageant dans le sens des x décroissants. De manière générale, on écrira une onde plane monochromatique (pulsation ω) se propageant dans une direction $\mathbf{u}$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(ik\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (1.21)$$

Le vecteur $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ est appelé vecteur d'onde. Dans le vide $k = \omega/c$. En un point donné de l'espace, le champ électromagnétique oscille périodiquement. La période T de l'oscillation dépend de la pulsation $T = 2\pi/\omega$. A un instant donné t , le champ présente aussi une oscillation périodique dans l'espace. La période λ est appelée *longueur d'onde* et l'on a $\lambda = 2\pi/k$.

Nous avons vu en introduction à la diffraction dans le cours d'optique physique la solution générale de l'équation de propagation dans le vide (1.16) sous la forme d'une *décomposition en ondes planes*. Une onde plane existe dans tout l'espace et le temps. Elle n'a pas vraiment de sens physique toutefois les ondes planes forment une *base de l'espace* (au sens mathématique de vecteurs de base) pour les ondes électromagnétiques. La notion d'onde plane est donc très importante. Nous avons en particulier démontré en introduisant les ondes planes que le phénomène de diffraction était une simple conséquence du phénomène de propagation. Autrement dit : on peut voir *l'onde plane comme une brique de base des champs qui se propagent*.

3. c'est-à-dire $\mathbf{E}(x, \omega)$ s'écrit à l'aide d'une distribution de Dirac $\delta(\omega - \omega_0)$

1.5. Règles de calcul pour les ondes planes monochromatiques

On considère ici des ondes planes monochromatiques de la forme (1.21)

1.5.1. Quelques identités

On montre très facilement que les calculs de rotationnel, divergence et gradient se réduisent à des produits des champs avec le vecteur d'onde $\mathbf{k}$.

On appelle f et $\mathbf{F}$ des champs (scalaire et vectoriel) qui s'écrivent sous la forme d'ondes planes monochromatiques. On a alors :

$$\mathbf{grad}f(\mathbf{r}, t) = i\mathbf{k}f(\mathbf{r}, t) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{rot}[\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)] = i\mathbf{k} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (1.23)$$

$$\mathbf{div}[\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)] = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad (1.24)$$

1.5.2. Transversalité

Dans le cas des champs dans le vide on a :

$$\mathbf{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\mathbf{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Pour des ondes planes monochromatiques, on a donc $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ et $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$. Les champs électrique et magnétique sont donc orthogonaux au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ c'est-à-dire à la direction de propagation. On dit que le champ électromagnétique est *transverse* dans le vide⁴.

1.5.3. Structure de l'onde plane

L'équation $\mathbf{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ nous donne $i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, soit encore $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/c$. Pour une onde plane monochromatique, le trièdre $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ est un trièdre direct.

1.6. Énergie du champ électromagnétique

1.6.1. Énergie électrostatique et magnétostatique

On montre que le travail E_{es} nécessaire fourni par un opérateur pour construire une distribution de charges $\rho(\mathbf{r})$ en amenant les charges de l'infini peut se mettre sous deux formes égales :

$$E_{es} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \int \frac{\epsilon_0\mathbf{E}^2}{2}d^3\mathbf{r}. \quad (1.25)$$

De la même façon, l'énergie magnétostatique E_{ms} fournie par un opérateur pour créer une distribution de courants est donnée par :

$$E_{ms} = \frac{1}{2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \int \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}d^3\mathbf{r}. \quad (1.26)$$

4. Attention, ne pas confondre "transverse" qui est une propriété générale du champ électromagnétique dans le vide avec "transverse électrique" ou "transverse magnétique" qui sont des cas particuliers dans le cas de la présence d'une interface entre deux milieux, que nous verrons au chapitre 7

1.6.2. Énergie électromagnétique. Vecteur de Poynting

La puissance des forces exercées par le champ électromagnétique sur une distribution de courants est donnée par :

$$P = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (1.27)$$

Cette expression est facile à obtenir à partir de l'expression du travail de la force de Lorentz $\mathbf{F}$ sur une charge unique q de vitesse $\mathbf{v}$ qui s'écrit $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ car le champ magnétique ne travaille pas. La somme sur un élément de volume contenant plusieurs charges donne lieu à $\sum_i q_i \mathbf{v}_i = \mathbf{j} d^3\mathbf{r}$. On peut établir un bilan d'énergie électromagnétique dans un volume V en partant du produit $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. L'équation de Maxwell-Ampère fournit alors

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.28)$$

Il suffit alors d'utiliser l'identité :

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{B} \quad (1.29)$$

pour obtenir l'identité

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \text{div} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \right). \quad (1.30)$$

Le terme de gauche peut se mettre sous la forme

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right] \quad (1.31)$$

et s'interprète comme le taux de variation de la densité d'énergie par unité de volume. Le terme de droite du second membre s'interprète comme la divergence d'un vecteur donnant le flux d'énergie électromagnétique au travers d'une surface fermée. Ce vecteur est appelé vecteur de Poynting :

$$\Pi = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (1.32)$$

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Écrire les équations de Maxwell
- ❷ Écrire les champs en fonction des potentiels vecteur et scalaire
- ❸ Retrouver l'équation de propagation dans le vide
- ❹ Écrire la forme d'une onde plane monochromatique
- ❺ Écrire et calculer le vecteur de Poynting

Compléments du chapitre 1

1A. Complément A

Décomposition d'un champ vectoriel

On sait que les équations de Maxwell donnent l'expression du rotationnel et de la divergence des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. La question que l'on peut se poser est de savoir si la donnée de la divergence et du rotationnel d'un champ suffit à le définir ou au contraire fournit des informations redondantes. Un deuxième type de problème est rencontré lorsque l'on introduit la notion de potentiel, on est alors amené à utiliser des propriétés telles que "si $\mathbf{rot}\mathbf{X} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{X}$ est de la forme $-\mathbf{grad}V$ " qui sont généralement admises dans les exposés d'introduction aux équations de Maxwell. En fait la réponse à ces questions découle de la possibilité très générale de décomposer un champ en la somme d'un champ rotationnel et d'un champ irrotationnel, ou bien encore, comme on le verra, en la somme d'un champ transverse et d'un champ longitudinal. Ces résultats dépassent largement le cadre de l'électromagnétisme et sont applicables également aux champs de vitesse qui apparaissent en mécanique des fluides par exemple. Dans ce qui suit nous présentons cette décomposition canonique (théorème de Helmholtz) et examinons quelques propriétés résultantes.

1A.1. Énoncé du théorème de Helmholtz

Soit un champ vectoriel $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ fini, indéfiniment différentiable. On suppose que $\mathbf{rot}\mathbf{C}$ et $\mathbf{div}\mathbf{C}$ sont à support borné. Alors $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{grad}V(\mathbf{r}) \quad (1A.1)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{C}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{et} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{div}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{C}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1A.2)$$

où la notation $d^3\mathbf{r}'$ signifie $dx'dy'dz'$ (ce n'est donc pas un vecteur !). $\mathbf{r}'$ est la variable d'intégration, l'indice $\mathbf{r}'$ des opérateurs indique par rapport à quelle variable il faut dériver.

1A.2. Démonstration

D'après la relation $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{E}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{E} &= \mathbf{grad}(\mathbf{div}\mathbf{E}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\mathbf{E}) \\ &= \mathbf{grad}(s) - \mathbf{rot}\mathbf{C} \end{aligned}$$

Le second membre de l'équation est connu si les termes "sources" s et $\mathbf{C}$ sont connus. Chaque composante de $\mathbf{E}$ vérifie alors une équation du même type que l'équation de Poisson, reliant le potentiel à la densité de charges :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1A.3)$$

d'où le nom "source" attribué à s et à $\mathbf{C}$.

Avec la condition aux limites

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = 0$$

on sait que la solution de l'équation (1A.3) s'écrit :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

On en déduit que $\mathbf{E}$ peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1A.4)$$

L'indice $\mathbf{r}'$ des opérateurs rotationnels et divergence indiquent que les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées de $\mathbf{r}'$. Afin d'obtenir la forme (1A.1), il suffit d'effectuer quelques manipulations. On note tout d'abord que :

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + s(\mathbf{r}') \mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

et

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' &= \int_V \mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3\mathbf{r}' + \int_V s(\mathbf{r}') \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3\mathbf{r}' \\ &= \int_S \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\int_V \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right] \end{aligned}$$

La première intégrale tend vers zéro quand le volume V tend vers l'infini car le champ est nul à l'extérieur d'une sphère de rayon fini. Dans le second terme, on a pu permuter le gradient par rapport à $\mathbf{r}$ et l'intégrale par rapport à $\mathbf{r}'$ car cette dernière est finie. En effet, le terme r'^2 du volume élémentaire $d^3\mathbf{r}' = r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\phi$ compense la singularité en $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. On obtient finalement :

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = -\mathbf{grad}\phi$$

Un calcul analogue permet de montrer que

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \mathbf{rot}_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

ce qui achève d'établir l'équation 1A.1.

1A.3. Applications

Afin d'établir aisément quelques propriétés, nous allons réécrire la décomposition sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'} [\mathbf{C}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' - \mathbf{grad} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}_{\mathbf{r}'} [\mathbf{C}(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (1A.5)$$

Propriété 1 :

La donnée de la divergence et du rotationnel d'un champ suffit à caractériser ce champ.

En effet, supposons que l'on connaisse $\text{div}\mathbf{C}$ et $\mathbf{rot}\mathbf{C}$. Il est alors possible de calculer les deux intégrales qui apparaissent ci-dessus puis d'en déduire $\mathbf{C}$. Les conséquences de ce lemme en électromagnétisme sont importantes :

- Les équations de Maxwell fournissent la divergence et le rotationnel de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{B}$. Elles sont donc suffisantes pour caractériser les champs.
- Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ est défini par la relation $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$. Seul son rotationnel étant fixé, il reste une indétermination sur la définition de $\mathbf{A}$.

Propriété 2 :

- Soit un champ $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{rot}\mathbf{C} = 0$. Alors $\mathbf{C}$ est de la forme $\mathbf{C} = -\mathbf{grad}V$.
- Soit un champ $\mathbf{C}$ tel que $\text{div}\mathbf{C} = 0$. Alors $\mathbf{C}$ est de la forme $\mathbf{C} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$.

La démonstration est immédiate à partir du théorème de Helmholtz. L'application en est bien sûr l'introduction des potentiels.

1A.4. Champs rotationnels et irrotationnels ; transverses et longitudinaux

Champs rotationnels et irrotationnels

Un champ $\mathbf{C}$ tel que $\text{rot}\mathbf{C} = 0$ est dit irrotationnel. Un tel champ ne peut pas présenter de lignes de champ fermées. En effet, supposons que le champ présente une ligne de champ fermée :

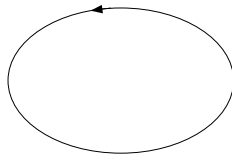


FIGURE 1.2. — Ligne de champ fermée : $\text{rot}\mathbf{C} \neq 0$

Calculons la circulation du champ sur cette ligne :

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

si on oriente la courbe dans le même sens que $\mathbf{C}$. Par ailleurs,

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = \iint \text{rot}(\mathbf{C}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

puisque $\text{rot}\mathbf{C} = 0$.

Il y a contradiction, un champ $\mathbf{C}$ tel que $\text{rot}\mathbf{C} = 0$ ne peut donc pas avoir de lignes de champ fermées. De façon analogue, on montre à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski que si $\text{div}\mathbf{C} = 0$, on ne peut pas avoir de point singulier où convergent les lignes de champ :

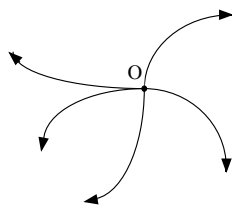


FIGURE 1.3. — Lignes de champ convergentes ou divergentes en O : $\text{div}\mathbf{C} \neq 0$

La décomposition du théorème de Helmholtz est donc une décomposition en champs du type de la figure 1.2 ($\text{rot}\mathbf{A}$) et du type de la figure 1.3 ($-\text{grad}V$).

Champs transverses et longitudinaux

Envisageons maintenant la décomposition dans l'espace réciproque ou espace de Fourier. Le champ peut être développé sur une base d'ondes planes, il s'écrit ainsi de façon générale (voir annexe 1) :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{C}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (1A.6)$$

Le rotationnel et la divergence s'en déduisent en dérivant sous le signe somme et en utilisant des formules classiques d'analyse vectorielle (voir annexe 2) :

$$\mathbf{rot}\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int [i\mathbf{k} \wedge \mathbf{C}(\mathbf{k})] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (1A.7)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{k})] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (1A.8)$$

Ces expressions montrent que les quantités entre crochets sous l'intégrale sont les *transformées de Fourier de $\mathbf{rot}\mathbf{C}$ et de $\mathbf{div}\mathbf{C}$* respectivement. Naturellement, la transformée de Fourier n'étant pas autre chose qu'une décomposition en ondes planes, on retrouve les expressions utilisées comme règle de calcul dans le cas des ondes planes.

Par définition :

un champ pour lequel $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ est perpendiculaire à $\mathbf{k}$ est un champ transverse
un champ pour lequel $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ est parallèle à $\mathbf{k}$ est un champ longitudinal.

Montrons que cette décomposition est identique à la précédente :

transverse = rotationnel ;
longitudinal = irrotationnel.

Dans le cas d'un champ transverse, il est clair que $\mathbf{div}\mathbf{C}$ est nul d'après (1A.8), il s'agit donc d'un champ rotationnel. Dans le cas d'un champ longitudinal, $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ est parallèle à $\mathbf{k}$ ce qui implique que $\mathbf{rot}\mathbf{C}$ est nul d'après (1A.7) : c'est donc un champ irrotationnel de la forme $-\mathbf{grad}V(\mathbf{r})$.

2. Propagation dans le vide

Ce chapitre a été traité à la fin du cours d'optique physique du premier semestre. Il ne sera pas abordé directement en amphi d'électromagnétisme mais les résultats qu'il contient sont essentiels ! À lire et à relire...

2.1. Introduction

Nous allons traiter de façon générale le problème de la propagation dans le vide : il s'agit de calculer le champ en un point (x, y, z) connaissant le champ sur un plan noté $z = 0$ et connaissant le comportement asymptotique du champ à grande distance de ce plan. Pour aborder ce problème, on peut partir de l'équation différentielle satisfaite par le champ électrique : l'équation de propagation dans le vide. La démarche est alors classique : on recherche une solution générale puis on utilise des conditions aux limites. Dans la mesure où nous abordons ce problème dans le cadre des équations de Maxwell, le comportement ondulatoire du rayonnement est complètement pris en compte.

De ce fait, la solution que nous obtiendrons permettra notamment de traiter de la propagation du champ ayant traversé une ouverture dans un écran opaque. Il apparaît ainsi que la diffraction est un cas particulier du problème plus général de la propagation dans le vide. A contrario, si l'on prend l'optique géométrique comme cadre général de description de la lumière, alors la propagation d'un faisceau au travers d'une ouverture de petite taille ne peut pas être expliquée. C'est la situation dans laquelle se sont trouvés les physiciens après que Newton ait découvert l'effet de diffraction. Il a fallu attendre Fresnel qui a ajouté un principe ad hoc pour rendre compte des observations. Ce n'est que lorsque l'on a disposé des équations de Maxwell que l'on a pu enfin traiter dans un cadre plus général et sans avoir besoin de principes additionnels le problème de la diffraction. Avec ce point de vue, la diffraction et l'optique géométrique ne sont que des cas limites du problème de la propagation de la lumière.

Pour traiter ce problème, nous allons montrer qu'il est possible d'établir simplement que le champ électrique peut s'écrire sous la forme d'une superposition d'ondes planes en tout point du demi espace situé en $z > 0$. Sous cette forme, on retrouve des expressions très proches de celles que l'on rencontrera dans le prochain chapitre en rayonnement. Les principales idées restent valables : notion de champ lointain, directionnalité notamment. Nous montrerons ensuite comment l'on peut déduire de la solution générale que nous allons établir, la forme habituelle du principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation paraxiale.

2.2. Propagation d'un faisceau

2.2.1. Position du problème

Nous étudions la propagation du rayonnement monochromatique de pulsation ω issu d'une source qui n'est pas précisée. Nous prenons comme donnée de base du problème la connaissance du champ électrique sur le plan $z = 0$. Il peut s'agir par exemple d'un faisceau laser qui traverse le plan $z = 0$ ou bien du champ dû à une antenne qui serait placée en un point de l'espace en $z < 0$. Nous supposons que la propagation s'effectue dans le vide. Ce que nous cherchons à obtenir est une expression explicite du champ électrique en tout point $z > 0$. Il est clair que le problème modèle de la diffraction d'une onde plane par un écran se ramène à ce problème. Toutefois, cette façon de poser le problème est plus générale, elle inclut également l'étude de l'élargissement d'un faisceau dans le vide, l'étude de l'amplitude du champ au voisinage d'un point de focalisation, etc.

2.2.2. Équation de propagation et équation de Helmholtz

Le point de départ est l'équation de propagation. Par souci de simplicité, nous allons travailler avec une fonction scalaire Ψ qui représente l'une des composantes du champ électrique. La prise en compte de l'aspect vectoriel se fait de façon immédiate pour ce problème. Le champ satisfait alors à l'équation :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

où c représente la vitesse de la lumière dans le vide. Tout champ électromagnétique physique est de carré sommable par rapport à la variable temporelle sans quoi il correspondrait à une énergie infinie. On peut donc le représenter à l'aide d'une transformée de Fourier par rapport au temps sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.2)$$

Dans l'équation ci-dessus, nous utilisons la convention de notation qui consiste à écrire $f(t)$ une fonction dépendant du temps et $f(\omega)$ sa transformée de Fourier. Il est plus rigoureux de noter $\tilde{f}(\omega)$ la transformée de Fourier. Cependant, nous serons amené à travailler avec une fonction de quatre variables de sorte qu'il est difficile d'utiliser quatre tildes. Dans la suite, l'argument de la fonction (t ou ω) nous dira si nous avons affaire avec la fonction ou bien sa transformée de Fourier. En insérant cette expression dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \left[\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\mathbf{r}, \omega) \right] = 0. \quad (2.3)$$

Puisque les fonctions $\exp(-i\omega t)$ forment une base de l'espace des fonctions de carré sommable, l'intégrale est nulle si pour toute pulsation ω , l'égalité

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (2.4)$$

est vérifiée. Cette équation, satisfaite par la *transformée de Fourier du champ* $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$, est appelée équation de Helmholtz. Il est bon de noter ici que nous n'avons pas perdu de généralité dans le traitement du champ, en particulier, nous n'avons pas considéré que le champ $\Psi(\mathbf{r}, t)$ était monochromatique. L'équation de Helmholtz est valable pour chaque composante spectrale du champ et non pour le champ lui-même.

2.2.3. Formule de propagation du champ : Développement en ondes planes.

La démarche de détermination du champ électrique est tout à fait classique. Le champ $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$ obéit à l'équation de Helmholtz dans le vide et satisfait des conditions aux limites de continuité à la surface $z = 0$. Afin de simplifier les notations, nous omettrons dans ce qui suit la dépendance par rapport à la pulsation ω . Dans ce qui suit, nous allons développer le champ sur une base d'ondes planes. Pour ce faire, nous remarquons que le champ $\Psi(x, y, z)$ ($= \Psi(x, y, z, \omega)$) peut être considéré comme une fonction de x et y dans un plan $z = \text{constante}$. Nous allons introduire la décomposition de Fourier de Ψ suivant x et y seulement. Il est toujours possible de le faire puisque la fonction est de carré sommable dans le plan (x, y) . En effet, l'intégrale du carré du champ sur le plan (x, y) est à une constante près le flux du vecteur de Poynting qui est nécessairement fini.

$$\Psi(x, y, z) = \iint \Psi(\alpha, \beta, z) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (2.5)$$

Le problème de la détermination de $\Psi(x, y, z)$ est alors ramené à la recherche de la transformée de Fourier $\Psi(\alpha, \beta, z)$. Nous obtenons l'équation satisfaite par $\Psi(\alpha, \beta, z)$ en reportant (2.5) dans (2.4). On obtient ainsi,

$$\iint \left[\frac{\partial^2 \Psi(\alpha, \beta, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) \Psi(\alpha, \beta, z) \right] e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} = 0 \quad (2.6)$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial^2 \Psi(\alpha, \beta, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) \Psi(\alpha, \beta, z) = 0 \quad (2.7)$$

La solution générale de cette équation s'écrit immédiatement sous la forme de deux exponentielles. Nous introduisons la notation suivante :

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2} \quad \text{pour} \quad \frac{\omega^2}{c^2} > \alpha^2 + \beta^2 \\ \gamma &= i\sqrt{-\frac{\omega^2}{c^2} + \alpha^2 + \beta^2} \quad \text{pour} \quad \frac{\omega^2}{c^2} < \alpha^2 + \beta^2\end{aligned}\quad (2.8)$$

Avec ce choix de détermination, la solution générale s'écrit :

$$\Psi(\alpha, \beta, z) = A(\alpha, \beta)e^{i\gamma z} + B(\alpha, \beta)e^{-i\gamma z} \quad (2.9)$$

Si l'on considère un champ se propageant dans le sens des z positifs, le terme B est nul. La détermination de A se fait en écrivant simplement l'expression du champ dans le plan $z = 0$ à l'aide de (2.5) et (2.9). On obtient ainsi :

$$\Psi(x, y, 0) = \iint A(\alpha, \beta)e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (2.10)$$

Cette expression montre que l'amplitude complexe $A(\alpha, \beta)$ est simplement la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$.

$$A(\alpha, \beta) = \Psi(\alpha, \beta, 0) \quad (2.11)$$

Finalement, le champ en tout point (x, y, z) s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x, y, z) = \iint \Psi(\alpha, \beta, 0)e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (2.12)$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que le champ s'écrit sous la forme d'une superposition d'ondes planes dont les vecteurs d'ondes ont pour composantes (α, β, γ) et qui satisfont à la relation de dispersion dans le vide :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.13)$$

L'amplitude complexe de chaque onde plane est donnée très simplement par la valeur de la transformée de Fourier du champ dans le plan (x, y) . Il est important de remarquer que cette expression fournit une solution exacte au problème de la diffraction. Le résultat résumé par l'équation (2.11) est aussi appelé spectre angulaire du champ.

En résumé, le calcul de la transformée de Fourier du champ électrique considéré comme une fonction de x et y fournit les amplitudes des ondes planes. Pour cela on utilise la formule d'inversion :

$$\Psi(\alpha, \beta, 0) = \iint \Psi(x, y, 0)e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (2.14)$$

Il suffit alors de reporter cette expression dans l'équation (2.12) pour obtenir le champ en tout point (x, y, z) . Il faut souligner que cette expression est valable en champ proche également puisqu'aucune approximation n'a été faite jusqu'ici.

2.2.4. Approximation de champ lointain

Si l'on se place à grande distance, Il est possible d'obtenir une forme approchée de l'intégrale (2.12). Pour cela on utilise l'approximation de la phase stationnaire qui permet d'obtenir une approximation d'une intégrale dont l'intégrand à une phase qui oscille très vite. On peut montrer (voir Complément du chapitre) que pour $kr \gg 1$, on a :

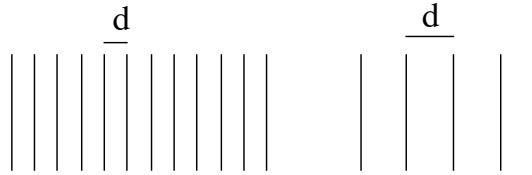
$$\begin{aligned}\Psi(x, y, z) &= \iint \tilde{\Psi}(\alpha, \beta, z=0) \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \\ &\approx \frac{-ikz}{2\pi r} \frac{\exp(ikr)}{r} \tilde{\Psi}\left(\frac{kx}{r}, \frac{ky}{r}, z=0\right)\end{aligned}\quad (2.15)$$

On retrouve alors le résultat obtenu habituellement à partir du principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer (ou de champ lointain). Ce résultat montre que l'amplitude du champ en champ lointain est proportionnel à la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$ pour des fréquences spatiales fixées par la direction d'observation.

2.3. La propagation est un analyseur de spectre

2.3.1. Notion de fréquence spatiale

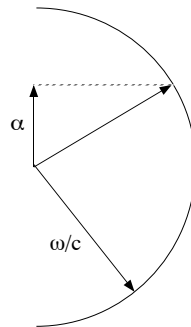
Lorsque l'on effectue le calcul de l'amplitude complexe indiqué en (2.14) on obtient les amplitudes des ondes planes dont le vecteur d'onde a pour composantes (α, β) . Il est possible de donner une autre signification à ce calcul. En effet, effectuer la transformée de Fourier de $\Psi(x, y, 0)$ revient à décomposer en fréquences spatiales la fonction $\Psi(x, y, 0)$. Par exemple, la composante α peut également s'écrire sous la forme $2\pi f_x$ où f_x est une fréquence spatiale. Cette notion de fréquence spatiale est intuitive sur l'exemple d'une grille périodique de période d telle qu'on la voit sur la figure suivante.



La fréquence spatiale associée est $1/d$ horizontalement, elle est nulle suivant la verticale (la période est infinie). Dans le cas de la figure ci-dessus, le spectre fréquentiel ferait apparaître la fréquence fondamentale $1/d$ ainsi que les harmoniques.

2.3.2. Spectre des fréquences spatiales

La première remarque que l'on peut faire est qu'à chaque fréquence spatiale de la fonction $\Psi(x, y, 0)$ correspond une onde plane (donc une direction de propagation). Cela est schématisé sur la figure ci-dessous où l'on a représenté un demi cercle de rayon ω/c dans le plan (α, γ) . Pour un vecteur d'onde situé dans ce plan, on a $\alpha^2 + \gamma^2 = \omega^2/c^2$. On constate qu'une faible fréquence spatiale (faible valeur de α) correspond à une onde plane proche de l'axe Oz tandis qu'une valeur élevée de α correspond à une direction éloignée de l'axe Oz .



Dans le cas de la grille périodique décrite ci-dessus, le spectre est discret ; il existe donc un nombre discret d'ondes planes pouvant se propager : ce sont les ordres du réseau.

Supposons que l'on isole une direction de propagation et que l'on mesure l'amplitude du champ électrique, on a accès à la transformée de Fourier du champ. Pour réaliser cela, il suffit de se placer en champ lointain, ou bien de se placer dans le plan focal d'une lentille. Dans ce dernier cas, le lien se fait de la façon suivante : à une fréquence spatiale du champ dans le plan $z = 0$ d'amplitude $\Psi(\alpha, \beta, 0)$ correspond une direction de propagation caractérisée par le vecteur d'onde de coordonnées (α, β, γ) . A cette direction de propagation correspond un point dans le plan focal image. La répartition de l'intensité lumineuse dans le plan focal image reproduit le spectre de l'image. De façon plus précise, l'intensité est proportionnelle au carré du champ donc à $|\Psi(\alpha, \beta, 0)|^2$ si bien que l'on perd la phase. En quelque sorte, la propagation joue le rôle d'un analyseur de spectre.

2.3.3. La propagation est un filtre passe-bas de fréquences spatiales

Nous venons de discuter de la notion de fréquence spatiale. Nous allons étudier le rôle de filtre passe-bas du phénomène de propagation. C'est cet aspect qui est à la base de la limite de résolution des appareils d'optique. Considérons des exemples de situations pour lesquelles il existe des fréquences élevées c'est-à-dire pour lesquelles l'amplitude du champ présente des variations rapides. Cela arrive pour deux types de situations : lors de l'obturation d'un faisceau par un bord net d'une part, lors de la présence d'un objet ou d'une structure de taille plus petite que la longueur d'onde telle que poussière, rayure, etc.

Nous avons vu ci-dessus un premier exemple : le cas d'une grille de pas d . Le spectre comporte les harmoniques de fréquence n/d où n est un nombre entier positif. Prenons un deuxième exemple : un faisceau uniforme diaphragmé par une ouverture de forme carrée de côté a . Le calcul de l'intégrale (2.14) est élémentaire et le résultat fait intervenir des fonctions $\sin(\alpha a/2) \sin(\beta a/2)/\alpha\beta$. Cette expression donne le spectre des fréquences présentes dans l'objet. On note que la décroissance des spectres dans les hautes fréquences est lente. Cela est dû à la présence de la discontinuité du champ sur les bords. On comprend intuitivement qu'il soit impossible de construire une fonction avec un "bord net" en se contentant de superposer des fonctions de faible fréquence spatiale. Si l'on se reporte à la figure 2, on constate qu'il n'est pas possible d'associer une direction de propagation à une fréquence spatiale supérieure à ω/c . Si l'on se reporte à l'équation (2.8), on s'aperçoit que ces fréquences sont associées à des vecteurs d'onde tels que γ peut être imaginaire. Cela correspond donc à des ondes qui ont une décroissance exponentielle suivant z . Au delà de quelques longueurs d'onde, leur contribution au champ devient négligeable. Seules les ondes planes telles que

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.16)$$

ont une composante du vecteur d'onde suivant z et peuvent donc se propager. En résumé, seules les ondes satisfaisant à (2.16) peuvent se propager. Le vecteur d'onde maximal dans le plan (x, y) correspondant à une onde propagative est $\omega/c = 2\pi/\lambda$ et la fréquence maximale est $1/\lambda$.

Cela a une conséquence fondamentale pour la télédétection et l'imagerie. Lors de la propagation on perd toute l'information sur les fortes fréquences spatiales. En d'autres termes, les détails fins, les structures de $\Psi(x, y, 0)$ plus petits que la longueur d'onde du rayonnement sont perdus lors de la propagation. En particulier, toute image optique ne peut donner des détails plus petits que la longueur d'onde puisque la fréquence maximale est $1/\lambda$.

Il est toutefois possible de dépasser cette limite. Pour réaliser ceci, il faut aller chercher l'information là où elle se trouve, c'est-à-dire très près de la structure étudiée. Imaginons une surface sur laquelle se trouve gravée des structures petites devant la longueur d'onde. Un détecteur placé à une distance petite devant la longueur d'onde sera sensible aux ondes évanescentes (ou ondes de surface). Il sera donc sensible à des fréquences spatiales élevées et pourra fournir des images dont la résolution est meilleure que la longueur d'onde de détection.

2.3.4. Diffraction naturelle

L'expression (2.14) montre que l'amplitude des ondes planes est donnée par la transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$. Des propriétés de la transformée de Fourier, on peut déduire des propriétés très générales concernant la propagation d'un faisceau. Si l'on note Δx la largeur du faisceau et α_{max} la valeur maximale de la composante du vecteur d'onde selon Ox , on peut écrire $\Delta x \alpha_{max} \geq 2\pi$. Ceci est une propriété des transformées de Fourier. Cette inégalité fournit un ordre de grandeur de α_{max} si le champ ne varie pas rapidement sur Δx , on a alors $\Delta x \alpha_{max} \approx 2\pi$. On peut introduire l'angle θ formé dans le plan (x, z) par le vecteur d'onde de coordonnées (α, γ) avec l'axe Oz : $\alpha = 2\pi/\lambda \sin \theta$. On a donc $\sin \theta_{max} \approx \lambda/\Delta x$. Pour des petits angles, on obtient

$$\theta_{max} \approx \lambda/\Delta x$$

Il est important de bien noter que ce résultat découle de la structure finie du champ électromagnétique. Il n'est nullement nécessaire d'avoir des bords matériels pour voir apparaître la diffraction.

Un raisonnement très proche peut être effectué en prenant comme point de départ de l'analyse la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq h$. On peut raisonner sur un faisceau se propageant le long de l'axe

Oz et de largeur finie Δx suivant Ox . En utilisant la relation de de Broglie $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, on retrouve le même résultat.

Pour obtenir une estimation de l'ouverture angulaire du rayonnement, nous avons remplacé l'inégalité par une égalité. Nous avons signalé que ceci n'est valable que si le champ électromagnétique ne varie que très lentement dans l'ouverture. Nous allons préciser ce point dans ce paragraphe. Il est clair que si le champ varie sur l'ouverture, des fréquences spatiales plus élevées apparaîtront dans le résultat de (2.14). Cela correspond à des directions de propagation plus éloignées de l'axe Oz . Citons deux exemples concrets de situations de ce type. On peut imaginer que l'on dispose une grille de période égale à 5 longueurs d'onde sur l'ouverture. L'amplitude du champ varie donc de façon appréciable sur une distance de 5 longueurs d'onde. Cela se traduit par l'apparition de fréquences spatiales élevées discrètes (du fait de la périodicité) dans le spectre fourni par (2.14). Le réseau diffracte la lumière dans des directions discrètes qui s'écartent fortement de l'axe. Un deuxième cas important est celui d'un faisceau de taille limitée obtenu en disposant une ouverture juste derrière un corps noir. On sait d'expérience que dans ce cas le rayonnement est isotrope quelle que soit la taille de l'ouverture. Cela reste vrai même si l'on utilise un filtre sélectionnant une seule longueur d'onde. Cela semble être en contradiction avec la relation $\theta_{max} \approx \lambda/\Delta x$. De plus, l'intensité lumineuse est homogène sur toute l'ouverture. Dans ce cas, c'est la phase du rayonnement qui varie très rapidement sur l'ouverture. De façon plus précise, la phase est en fait une quantité aléatoire caractérisée par une fonction de corrélation dont la longueur caractéristique (appelée longueur de cohérence spatiale) est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Le concept d'onde plane est très mal adapté à la description du rayonnement thermique dont la source est constituée de milliards d'atomes décorrélés. Il faut pour cela une description statistique qui sort du cadre de ce cours.

2.3.5. Analogie avec la propagation d'un paquet d'ondes

Le problème que l'on vient d'étudier est en tout point analogue à l'étude de l'évolution de la largeur d'un paquet d'ondes au cours du temps. (Voir cours de Physique Quantique). La variable z joue ici le rôle de la variable temps dans le problème du paquet d'ondes. La structure du champ électrique dans le plan (x, y) est l'équivalent du paquet d'ondes. L'évolution du faisceau -on parle aussi de diffraction- n'est rien d'autre qu'un élargissement du faisceau. Ceci est entièrement analogue à l'élargissement du paquet d'ondes.

2.4. Le principe de Huygens Fresnel retrouvé

2.4.1. Introduction

Le but de ce paragraphe est de montrer l'équivalence entre l'approche qui vient d'être présentée et l'énoncé classique du principe de Huygens-Fresnel.

Rappelons son énoncé. On considère une onde incidente éclairant une ouverture dans un plan opaque. Le champ diffracté est obtenu en calculant le rayonnement de sources secondaires fictives placées dans l'ouverture. Plus précisément, chaque point de l'ouverture est la source d'une onde sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente.

D'un point de vue mathématique, on peut dire qu'il s'agit de faire un changement de base. L'expression du champ que l'on vient d'établir revient à décomposer le champ sur une base d'ondes planes. En revanche, le principe de Huygens-Fresnel revient à décomposer le champ sur une base d'ondes sphériques du type $\exp(ikr)/r$. Vu sous cet angle, le passage d'une formulation à l'autre ressemble à un changement de base. Le problème sera donc résolu si l'on sait exprimer une onde sphérique sur une base d'ondes planes.

2.4.2. Développement d'une onde sphérique en ondes planes

Le développement de Weyl ci-dessous est une représentation d'une onde sphérique sous la forme d'une somme d'ondes planes satisfaisant à l'équation d'Helmholtz :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{1}{\gamma} \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma|z|)] d\alpha d\beta \quad (2.17)$$

où γ est une fonction de α et β définie par (2.8). Nous allons avoir besoin par la suite de la Transformée de Fourier de $\exp[i\gamma(\alpha, \beta)|z|]$. Par dérivation suivant z de l'équation (2.17) dans le cas $z > 0$, on obtient :

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = \int \exp[i\gamma(\alpha, \beta)|z|] \exp[i(\alpha x + \beta y)] \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (2.18)$$

2.4.3. Le principe de Huygens Fresnel.

Revenons au point de départ : l'expression du champ donnée par l'équation (2.12). On y constate que le champ au point (x, y, z) est donnée par la Transformée de Fourier du produit de deux fonctions : $\Psi(\alpha, \beta, 0)$ et $\exp[i\gamma(\alpha, \beta)|z|]$. On sait (voir annexe A) que l'on peut écrire cela sous la forme d'un produit de convolution des deux transformées de Fourier. En utilisant alors le résultat (2.18), on obtient :

$$\Psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \Psi(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] dx' dy' \quad (2.19)$$

où $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$. Cette expression traduit le principe de Huygens-Fresnel. Elle exprime que le champ en tout point résulte du rayonnement de sources ponctuelles secondaires d'amplitude $\Psi(x', y', 0)$ placées dans l'ouverture. Dans le chapitre suivant, on établira ce résultat par une approche différente. Avant le développement des ordinateurs, une expression du champ sous forme de transformée de Fourier était de peu d'utilité dans la plupart des cas. C'est ce qui explique que la présentation de la diffraction en tant que développement en ondes planes est rarement utilisée dans les ouvrages d'optique physique et d'électromagnétisme. Aujourd'hui, il existe des algorithmes de transformée de Fourier très efficaces (Transformée de Fourier Rapide) de sorte que l'expression (2.12) est souvent plus intéressante que l'expression (2.19). En particulier, l'expression (2.12) est exacte dans le domaine de la diffraction de Fresnel et bien préférable aux expressions analytiques approchées qui sont largement décrites dans la littérature.

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Équation de Helmholtz
- ❷ Solution générale de l'équation de propagation : développement en ondes planes
- ❸ Diffraction naturelle et ouverture angulaire
- ❹ Ondes évanescentes, limite de résolution en optique

Compléments du chapitre 2

2A. Complément A

Diffraction de Fraunhofer

L'objectif de ce complément de cours est de faire le lien entre le développement en ondes planes et l'expression du champ dans l'approximation de Fraunhofer

2A.1. Approximation de la phase stationnaire

Nous partons de l'expression du champ $\Psi(x, y, z)$ démontrée dans le cours :

$$\Psi(x, y, z) = \iint \tilde{\Psi}(\alpha, \beta, z=0) \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma z)] \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (2A.1)$$

Nous allons étudier le comportement de cette intégrale lorsque l'on est en champ lointain. On définit le vecteur $\mathbf{k}$ de coordonnées (α, β, γ) . Si l'on est suffisamment loin du plan $z = 0$, la phase de l'intégrand va varier très vite : autrement dit, une petite variation de α et/ou β va faire osciller plusieurs fois l'exponentielle. La contribution de cette petite variation de α et/ou β à l'intégrale est donc nulle. Cela est valable, sauf si la phase de l'intégrand présente un extremum. Dans ce cas, autour de l'extremum, une petite variation de α ou β ne fait pas varier la phase dans l'exponentielle et la contribution à l'intégrale est non nulle.

Nous appelons $g(\alpha, \beta)$ la phase de l'intégrand. on a $g(\alpha, \beta) = \phi + \alpha x + \beta y + \gamma(\alpha, \beta)z$ où ϕ est la phase, supposée lentement variable, de la fonction $\tilde{\Psi}(\alpha, \beta, z=0)$. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = x + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} z = x - \frac{\alpha}{\gamma} z \quad (2A.2)$$

On peut trouver une expression similaire en calculant $\partial g / \partial \beta$. La phase possède un extremum lorsque $\partial g / \partial \alpha = 0$ et $\partial g / \partial \beta = 0$. Cela conduit à $\gamma x - \alpha z = 0$ et $\gamma y - \beta z = 0$ ou encore : $\mathbf{k} \times \mathbf{r} = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{k}$ et $\mathbf{r}$ colinéaires. Nous venons de montrer que c'est dans la direction d'observation $\mathbf{r}$ que la phase est stationnaire. Si l'on s'éloigne de cette direction, la contribution des termes sous l'intégrale tend vers zéro à cause des oscillations rapides de l'exponentielle.

On peut développer la phase au deuxième ordre autour de la direction définie par α_0, β_0 (le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ colinéaire à $\mathbf{r}$ a pour coordonnées $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$).

$$g(\alpha, \beta) = g(\alpha_0, \beta_0) + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2} + \frac{(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (2A.3)$$

On peut de plus montrer facilement que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} &= -\frac{\alpha_0^2 + \gamma_0^2}{\gamma_0^3} z \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \beta^2} &= -\frac{\beta_0^2 + \gamma_0^2}{\gamma_0^3} z \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{\alpha_0 \beta_0}{\gamma_0^3} z \end{aligned} \quad (2A.4)$$

L'intégrale 2A.1 peut maintenant s'approximer sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) &= \Psi(\alpha_0, \beta_0, z=0) \exp[i(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)] \\ &\times \iint \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \exp \left[i(\alpha - \alpha_0)^2 \left(-\frac{\alpha_0^2 + \gamma_0^2}{\gamma_0^3} z \right) + i(\beta - \beta_0)^2 \left(-\frac{\beta_0^2 + \gamma_0^2}{\gamma_0^3} z \right) + i(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0) \left(\frac{\alpha_0 \beta_0}{\gamma_0^3} z \right) \right] \end{aligned} \quad (2A.5)$$

La dernière intégrale se trouvera dans tous les handbooks d'intégrales¹. Le résultat est très simple : $-i\gamma_0^2/(2\pi k z)$. En remarquant de plus que $\alpha_0/k = x/r$, $\beta_0/k = y/r$ et $\gamma_0/k = z/r$ (colinéarité de $\mathbf{k}$ et $\mathbf{r}$), il vient le résultat donné dans l'équation (2.15) :

$$\Psi(x, y, z) = \frac{-ikz}{2\pi r} \frac{\exp(ikr)}{r} \tilde{\Psi}\left(\frac{kx}{r}, \frac{ky}{r}, z=0\right) \quad (2A.6)$$

2A.2. Approximation de Fraunhofer

Dans l'expression "classique" de la diffraction de Fraunhofer, on calcule la figure de diffraction sur un écran loin de l'élément diffractant. On appelle d la distance entre le plan $z=0$ et l'écran. En écrivant $k = 2\pi/\lambda$ et que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2} \approx d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{d^2} \right) \right] \quad (2A.7)$$

Il vient l'expression bien connue de la diffraction de Fraunhofer :

$$\Psi(x, y, z) = \frac{-i}{\lambda d} \exp(ikd) \exp \left(ik \frac{x^2 + y^2}{2d} \right) \tilde{\Psi}\left(\frac{2\pi x}{\lambda d}, \frac{2\pi y}{\lambda d}, z=0\right) \quad (2A.8)$$

1. Par exemple : Gradshteyn and Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products*

2B. Complément B

Développement de Weyl

Nous allons démontrer ici le développement de Weyl, c'est-à-dire comment l'on peut décrire une onde sphérique sous la forme d'un développement en ondes planes.

L'expression à démontrer est la suivante :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} \exp[i(k_x x + k_y y + k_z |z|)] dk_x dk_y \quad (2B.1)$$

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'il y a une singularité dans le plan $z = 0$. En effet dans ce plan, on peut avoir $r = 0$ ce qui fait diverger le terme de gauche. Nous allons tout d'abord travailler à partir d'un plan $z = z_0 > 0$ et l'on fera ensuite tendre z_0 vers 0. Pour simplifier les écritures on ne travaillera que dans l'espace $z > z_0$ (Le raisonnement pourra se faire de "l'autre côté" en utilisant $z < z_0 < 0$). On peut écrire :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \iint P(k_x, k_y, z_0) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z(z - z_0))] \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \quad (2B.2)$$

avec

$$P(k_x, k_y, z_0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikr)}{r} \bigg|_{z=z_0} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \quad (2B.3)$$

En coordonnées sphériques, on peut exprimer :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta_0 \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta_0 \sin \varphi \\ z_0 &= r \cos \theta_0 \end{aligned}$$

L'angle θ_0 est fixé par la donnée de z_0 et r . Dans l'intégrale il apparaît donc comme une fonction de r . On note de plus $K^2 = k_x^2 + k_y^2$, et on introduit un nouvel angle α tel que $k_x = K \cos \alpha$ et $k_y = K \sin \alpha$. Après changement de variables, il vient :

$$\begin{aligned} P(k_x, k_y, z_0) &= \int_{z_0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \exp[-iKr(\cos \alpha \sin \theta_0 \cos \varphi + \sin \alpha \sin \theta_0 \sin \varphi)] r \sin \theta_0 dr d\varphi \\ &= \int_{z_0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp(ikr) \exp[-iKr \sin \theta_0 \cos(\varphi - \alpha)] dr d\varphi \end{aligned}$$

L'étape suivante est d'évaluer l'intégrale sur φ . On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp[-iKr \sin \theta_0 \cos \theta d\theta] &= \int_0^{\pi} \exp[-iKr \sin \theta_0 \cos \theta d\theta] + \int_0^{\pi} \exp[+iKr \sin \theta_0 \cos \theta d\theta] \\ &= \pi J_0(Kr \sin \theta_0) + \pi J_0(-Kr \sin \theta_0) \end{aligned}$$

Où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. C'est une fonction paire. On peut donc finalement écrire :

$$\int_0^{2\pi} \exp[-iKr \sin \theta_0 \cos(\varphi - \alpha)] d\varphi = 2\pi J_0(Kr \sin \theta_0) \quad (2B.4)$$

Il nous faut maintenant calculer l'intégrale $\int_{z_0}^{+\infty} 2\pi J_0(Kr \sin \theta_0) \exp(ikr) \sin \theta_0 dr$. On peut constater que cette intégrale est convergente si $z_0 \rightarrow 0$. On peut donc définir $P(k_x, k_y, 0) = \lim_{z \rightarrow z_0} P(k_x, k_y, z_0)$. Il vient :

$$P(k_x, k_y, 0) = \int_0^{+\infty} 2\pi J_0(Kr) \exp(ikr) dr \quad (2B.5)$$

On en tire (avec l'aide des handbooks²) :

$$\begin{aligned} P(k_x, k_y, 0) &= \frac{2i\pi}{(k^2 - K^2)^{1/2}} \quad \text{si } |k| \neq |K| \\ &= \frac{2i\pi}{k_z} \quad \text{si } k_z \neq 0 \end{aligned}$$

D'où le développement de Weyl (2B.1).

2. Par exemple et encore lui : Gradshteyn and Ryzhik *Table of Integrals, Series, and Products*

3. Rayonnement

3.1. Aperçu intuitif du mécanisme de rayonnement d'une charge ponctuelle

3.1.1. Description de l'onde rayonnée

Nous allons dans un premier temps considérer une charge se déplaçant avec un mouvement *accélééré* et montrer simplement qu'elle est une source de rayonnement, c'est-à-dire d'une onde qui se propage. On considère que la charge, initialement immobile en O , se déplace d'une distance a pendant un laps de temps dt court, puis s'immobilise en O' . La charge est donc soumise à un mouvement accéléré pendant l'intervalle de temps $[0, dt]$.

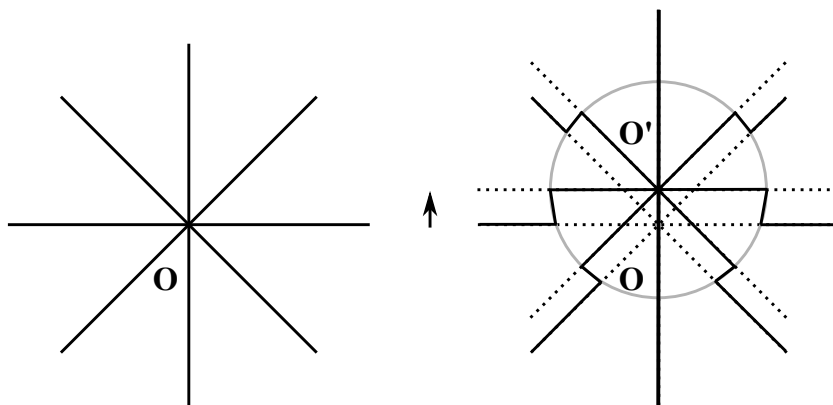


FIGURE 3.1. — *Vision schématique du rayonnement d'une charge ponctuelle. À gauche, la charge est immobile en O , à droite elle s'est déplacée en O' pendant dt . Les lignes noires sont les lignes de champ, en pointillés gris, les anciennes et futures lignes de champ (avant et après le passage de la perturbation).*

Les lignes de champ du vecteur électrique créé par la charge lorsqu'elle est immobile ($t < 0$) sont des lignes radiales, (voir figure 1a) centrées en O . Pour un instant $t = \infty$ les lignes de champ sont les mêmes mais centrées sur le point O' . Enfin pour un instant t fini positif, c'est-à-dire postérieur au déplacement de la charge, on peut séparer l'espace en deux régions : l'ensemble des points qui sont à l'intérieur d'une sphère de rayon $r = ct$ qui ont été rejoints par la perturbation et celui des points extérieurs à la sphère de rayon $r = c(t + dt)$ qui n'ont pas encore vu la perturbation. La figure 3.1 montre une seule sphère : on considère $dt \ll t$. Le point O' devrait être beaucoup plus près de O dans le schéma ($OO' < cdt$), mais par souci de lisibilité, on a écarté ces deux points. Dans la première région, les lignes de champ sont radiales centrées sur O' tandis que dans la deuxième région, les lignes de champ sont également radiales mais centrées sur O . Le champ a donc subi une rotation. Cela revient à dire que l'on a ajouté un champ orthoradial pendant le passage de la perturbation. Les lignes de champ sont donc orthoradiales dans la zone de la perturbation, c'est-à-dire dans la zone où se trouve le *champ rayonné* (voir figure 3.1).

3.1.2. Propriétés

La simple observation du schéma représentant les lignes de champ permet de mettre en évidence un certain nombre de propriétés générales du champ rayonné.

Le champ est localisé dans une coquille de rayon $r = ct$, il s'agit d'une onde sphérique.

Le champ rayonné, c'est-à-dire le champ qui est représenté par les lignes de champ au voisinage de $r = ct$, est transverse (voir figure).

Le champ rayonné est nul dans la direction du mouvement de la charge. On verra plus loin que le champ est proportionnel à l'accélération de la charge *perpendiculairement à la direction d'observation*.

On peut anticiper d'autres propriétés du champ. Ainsi, la conservation de l'énergie impose que le flux d'énergie par unité de surface décroisse en $1/r^2$ de sorte que l'amplitude du champ doit décroître en $1/r$.

3.1.3. Formulation générale du problème

En termes mathématiques, le problème du calcul des champs rayonnés se ramène à la résolution de l'équation de propagation *avec second membre*. En effet les seconds membres contiennent toute l'information sur *les sources* du rayonnement que sont les charges et les courants. Les équations à résoudre s'écrivent (voir chapitre 1) :

$$\begin{aligned}\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (3.1)$$

dans lesquelles, les termes sources sont supposés connus. Pour traiter ce problème, nous allons introduire une méthode générale de résolution d'équations linéaires avec second membre. Elle est applicable à des problèmes de rayonnement mais également à des problèmes de diffusion de la chaleur ou de diffusion de particules (électrons, molécules) par exemple. L'esprit de cette méthode est de trouver la "réponse" à une excitation impulsionnelle ; on considère alors le second membre, (terme source) comme une superposition d'excitations élémentaires, la solution est alors la superposition des solutions élémentaires. Afin d'illustrer cette démarche, nous allons la présenter sur un cas bien connu : le calcul du potentiel électrostatique créé par une distribution de charges statique $\rho(r)$.

3.2. Notion de fonction de Green. Illustration : cas de l'électrostatique

3.2.1. Introduction

Considérons une répartition de charges décrite par la densité de charge $\rho(\mathbf{r})$. Le problème du calcul du potentiel créé par cette répartition se ramène à la résolution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}\quad (3.2)$$

Le principe de la méthode repose sur deux remarques très simples :

L'équation du problème est linéaire, on peut donc appliquer le théorème de superposition.

La répartition de charges peut être considérée comme la superposition de charges ponctuelles. Le problème va donc être traité en deux temps ; tout d'abord il faut rechercher la solution correspondant à une charge ponctuelle, ensuite, il faut en déduire la solution correspondant à l'ensemble des charges que l'on obtient par superposition linéaire.

3.2.2. Charge ponctuelle placée en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$

La densité de charges correspondant à ce problème peut s'écrire :

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\quad (3.3)$$

De la sorte, on a bien une charge ponctuelle telle que l'intégrale de la densité de charge donne un résultat non nul. Par ailleurs on sait que (mathématiques des distributions) :

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.4)$$

Il en ressort que la solution de l'équation de Poisson peut s'écrire :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.5)$$

On retrouve ainsi un résultat très classique qui aurait pu se déduire plus simplement de l'expression de la force de Coulomb. Toutefois, cet exemple permet de préciser la notion d'excitation élémentaire ou impulsionnelle introduite ci-dessus. Physiquement, il s'agit du potentiel créé par une *charge ponctuelle* ; mathématiquement il s'agit de la fonction solution de l'équation de Poisson dont le second membre est une *distribution de Dirac*. Ce problème n'est pas traité de cette façon dans les cours d'introduction car il requiert de manipuler des distributions. La simplification conceptuelle qu'est l'utilisation de la notion de charge ponctuelle conduit à des difficultés mathématiques. Le problème est facile à contourner en calculant directement le champ, puis en déduisant le potentiel. Toutefois, dans le cas général, le calcul du champ n'est pas réalisable. C'est pourquoi il faut développer une technique de résolution de ce type de problème.

3.2.3. Cas d'une répartition de charges

Nous allons considérer en parallèle les deux cas de répartitions de charge : discrète et continue. Dans le premier cas la densité de charges $\rho(\mathbf{r})$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (3.6)$$

Dans le second cas on l'écrira sous la forme :

$$\int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.7)$$

La correspondance entre les deux écritures est claire : à q_i située en $\mathbf{r}_i$ on peut associer la charge $\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$ contenue dans l'élément de volume centré en $\mathbf{r}'$. La solution du problème posé s'obtient par *superposition*. Dans le cas discret, elle s'écrit :

$$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (3.8)$$

De la même façon, on obtient dans le cas continu :

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.9)$$

La vérification du fait que cette expression est effectivement solution du problème s'effectue en la reportant dans l'équation de Poisson. Il est important de remarquer que cette expression est le *produit de convolution de la solution du problème élémentaire (i.e. avec source ponctuelle) par la densité de charges*. Lorsque le point d'observation n'est pas situé au sein des sources, le terme en $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ne diverge pas. Le calcul du champ peut alors se faire sans problèmes, il est notamment possible de dériver sous le signe somme. En revanche, lorsque l'on s'intéresse au calcul du champ au sein de la distribution de charges, le problème est plus délicat. Toutefois, au sens des distributions, l'expression (3.9) est un produit de convolution de deux distributions. Les règles de calcul des dérivées de distribution donnent alors :

$$\Delta[\rho \otimes \frac{1}{r}] = \Delta\rho \otimes \frac{1}{r} = \rho \otimes \Delta \frac{1}{r} \quad (3.10)$$

En utilisant (3.4) , on vérifie immédiatement que (3.9) est bien solution de l'équation (3.2) .

3.2.4. Généralisation

De façon générale, une équation linéaire peut s'écrire de façon symbolique :

$$L f = s \quad (3.11)$$

où L est un opérateur linéaire tel que Δ ou $\Delta + k^2$ par exemple, où f est l'inconnue et s le terme source connu. Afin de trouver une solution particulière de ce problème, on recherche tout d'abord la solution du problème lorsque le second membre est une distribution de Dirac. On obtient alors la fonction de Green (ou réponse impulsionnelle) du problème qui est par définition la solution de l'équation :

$$LG(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.12)$$

satisfaisant de plus aux conditions aux limites du problème posé. Dans un deuxième temps, on effectue la superposition des solutions qui n'est autre qu'un produit de convolution de la fonction de Green (ou réponse impulsionnelle) par le terme source :

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') s(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (3.13)$$

Là encore on peut vérifier que cette expression est solution du problème en la reportant dans l'équation de départ et en utilisant (3.12).

3.3. Potentiels retardés

3.3.1. Recherche de la fonction de Green du problème

Nous revenons dans ce paragraphe à l'équation de propagation avec second membre. Pour traiter ce problème, nous allons utiliser la méthode de la fonction de Green. La relation de définition de la fonction de Green associée à l'équation de propagation va faire intervenir comme dans les exemples précédents une distribution de Dirac exprimant que l'on s'intéresse à une perturbation localisée dans l'espace ; il faut aussi faire apparaître le fait que la perturbation doit être localisée dans *le temps*. On obtient alors :

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (3.14)$$

Le problème qui se pose est la résolution de cette équation¹. Cela fait, la solution explicite du problème sera donnée par un produit de convolution comme on l'a vu. Afin de simplifier les notations, nous poserons :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R} \quad \text{et} \quad t - t' = \tau \quad (3.15)$$

3.3.2. Méthode de calcul de la fonction de Green

Le problème posé est celui de la résolution d'une équation aux dérivées partielles avec second membre. En pratique, on va transformer cette équation en équation algébrique en introduisant les transformées de Fourier de la fonction de Green par rapport à t et r . Ainsi, les dérivées temporelles deviendront des produits par $-i\omega$ etc. La démarche peut se résumer de la façon suivante :

1. Le signe moins est conventionnel. Il est utilisé ici de façon à obtenir une fonction de Green sans signe moins.

Équation aux dérivées partielles vérifiée par $G(\mathbf{R}, \tau)$

$\downarrow_{TF}$

Équation algébrique vérifiée par $G(\mathbf{k}, \omega)$

$\downarrow_{\text{résolution}}$

$G(\mathbf{k}, \omega)$

$\downarrow_{TF^{-1}}$

$G(\mathbf{R}, \tau)$

Les étapes du calcul sont donc l'établissement de l'équation à laquelle obéit $G(\mathbf{R}, \omega)$ puis $G(\mathbf{k}, \omega)$, la résolution pour $G(\mathbf{k}, \omega)$, puis le calcul de la transformée de Fourier sur les variables spatiales pour obtenir $G(\mathbf{R}, \omega)$ explicitement. On en déduit $G(\mathbf{R}, \tau)$ par transformée de Fourier sur les variables temporelles. Les détails du calcul sont donnés dans le complément 3A. Le résultat final est :

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \delta\left(\tau - \frac{|\mathbf{R}|}{c}\right) \quad (3.16)$$

Cette expression correspond tout à fait à l'image donnée par les considérations de l'introduction. Une source ponctuelle et instantanée rayonne une onde sphérique qui est nécessairement en $1/r$ pour assurer la conservation de l'énergie. Une image très simple de ce phénomène est un rond dans l'eau produit par la chute d'une pierre !

3.3.3. Solution des potentiels retardés

La solution $V(\mathbf{r}, t)$ s'obtient par convolution de la densité de charges et de la fonction de Green que l'on vient de déterminer :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \left[-\frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{\epsilon_0} \right] [-G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')] d^3\mathbf{r}' dt' \quad (3.17)$$

En reportant l'expression de G dans l'intégrale on obtient :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) d^3\mathbf{r}' dt' \quad (3.18)$$

et en effectuant l'intégration par rapport à t' , on obtient l'expression finale du potentiel retardé :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.19)$$

Un calcul en tout point analogue mène à l'expression de $\mathbf{A}$ en fonction de $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.20)$$

Dans ces expressions, la dépendance temporelle fait apparaître un retard R/c qui correspond au temps que met la lumière pour parcourir la distance séparant le point émetteur du point d'observation. Ceci est l'origine de l'appellation "potentiels retardés". Ainsi, une étoile située à plusieurs années lumière de la terre peut avoir disparu alors même qu'on l'observe.

Il est possible de voir ce retard avec un point de vue différent. Le retard $t = R/c$ n'est rien d'autre que la conséquence d'une différence de marche R . L'équation Eq.(3.20) montre que le potentiel vecteur résulte de l'addition des contributions des différents points de la source. Lorsque l'on ajoute leurs amplitudes, on prend en compte les différents chemins optiques parcourus R/c depuis différents points sources. On voit ainsi que l'expression des potentiels retardés apparaît comme le résultat *d'interférences* entre les champs émis par les différents points sources. A titre d'exemple, on peut remarquer que le rayonnement de deux dipôles en champ lointain est identique à la figure d'interférence des trous d'Young.

Notons enfin que l'on retrouve dans l'équation Eq.(3.20) une propriété qui avait été anticipée au début de ce chapitre : la décroissance en $1/r$ qui est nécessaire pour satisfaire la conservation de l'énergie.

3.4. Rayonnement en champ lointain

3.4.1. Approximation du champ lointain.

Nous envisageons ici le problème du rayonnement du point de vue d'un observateur qui se trouve éloigné de la répartition de charges. Il s'agit en pratique du cas le plus courant correspondant aux problèmes d'émission et de réception d'ondes radar, hertziennes, d'émission lumineuse par des atomes etc. Le calcul du champ rayonné peut alors être simplifié. Dans ce qui suit, nous travaillerons avec les composantes spectrales des champs $\mathbf{X}(\mathbf{r}, \omega)$, que l'on notera simplement $\mathbf{X}(\mathbf{r})$. En constatant que les $\exp(-i\omega t)$ forment une base orthonormale, il est facile de montrer que l'on a ² :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp\left[i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.21)$$

Soit L une longueur caractéristique de la source, soit $\mathbf{r}'$ le point courant, et soit $\mathbf{r}$ le point d'observation. Le système étudié est représenté sur la figure 3.2.

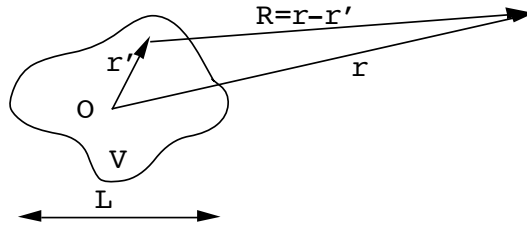


FIGURE 3.2. – Les courants de la source sont inclus dans le volume V , le point d'observation est repéré par $\mathbf{r}$.

Nous allons restreindre l'étude à des points tels que :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg L$$

Nous choisissons de placer l'origine au coeur du système de charges. Le terme de retard peut alors être simplifié :

$$R^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

en négligeant le terme d'ordre 2 en r'/r , on obtient :

$$R = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r - \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' \quad (3.22)$$

Il est possible de simplifier l'expression du potentiel vecteur en reportant cette expression dans (3.21) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{c} \frac{\omega}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' \quad (3.23)$$

Il s'agit de l'expression du *potentiel vecteur en champ lointain*. On reconnaît de gauche à droite dans cette expression, une constante, une onde sphérique sortante et la transformée de Fourier de la distribution de courants dans la source (en posant $\mathbf{k} = \omega/c \mathbf{u}_r$). Seul ce dernier terme introduit une *dépendance angulaire* dans le rayonnement de la source. On peut donc retenir que la directivité d'une antenne (ou plus généralement de tout système émetteur ou récepteur) est donnée par la transformée de Fourier de sa répartition de courants. Si l'on note Δx la largeur de l'antenne (et donc celle du support de la fonction $\mathbf{j}(x)$) et Δk_x la largeur du support de sa transformée de Fourier, la relation $\Delta x \Delta k_x > 2\pi$ montre qu'un système directionnel est nécessairement très grand par rapport à la longueur d'onde.

². On peut remarquer que cela revient exactement à considérer des champs monochromatiques $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ caractérisés par leur *amplitude complexe* notée $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ de sorte que $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{X}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$.

Nous avons déjà indiqué que les différents éléments de la source produisent des ondes qui interfèrent entre elles. Cela est particulièrement clair sur l'équation (3.23). Chaque point M de la source crée une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à la densité de courant au point M . L'intégrale exprime le fait que l'on superpose les champs créés par tous les éléments de volume. Le terme de déphasage

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'$$

représente exactement la *différence de marche* $[OD]-[MD]$ entre les trajets OD et MD où D désigne le détecteur placé en r .

Il faut prendre garde à l'utilisation de cette approximation. Nous avons invoqué la condition $|r| \gg L$ jusqu'à présent. Cette condition assure effectivement que $1/R \approx 1/r$. En revanche, elle n'assure pas du tout que l'approximation soit correcte dans l'argument de l'exponentielle. En effet, le terme négligé dans (3.22) représente une différence de marche *qui doit être comparée à la longueur d'onde*. Le terme varie comme r'^2/r et son ordre de grandeur est L^2/r . L'expression (3.23) est donc valable si la condition supplémentaire

$$\frac{L^2}{\lambda} \ll r$$

est satisfaite. Cette condition est la même que celle que l'on introduit en diffraction sous le nom d'approximation de Fraunhofer. Elle réserve généralement quelques surprises. Ainsi, à 5 mètres d'un trou de 5 mm éclairé en lumière visible ($\lambda = 0.5 \mu\text{m}$), l'approximation du champ lointain n'est pas valable. De même, un observateur terrestre n'est pas dans la zone de champ lointain du soleil ! En revanche, à 5 m de l'émetteur de la tour Eiffel (dimension caractéristique de l'antenne ≈ 5 m) qui émet sur une longueur d'onde 1800 m, la condition $\frac{L^2}{\lambda} \ll r$ est largement satisfaite ! En pratique cette condition dépend essentiellement de la taille de la source par rapport à la longueur d'onde. Elle exprime que le déphasage dû à la courbure du front d'onde est négligeable (voir Figure 3.3).

3.4.2. Approximation dipolaire électrique

Lorsque la répartition de courants est peu étendue par rapport à la longueur d'onde, ou autrement dit lorsque $L \ll \lambda$ les déphasages entre les différents points émetteurs deviennent négligeables. Il est naturel de penser que dans ces conditions la source est équivalente à une source ponctuelle, c'est à dire à un dipôle oscillant.

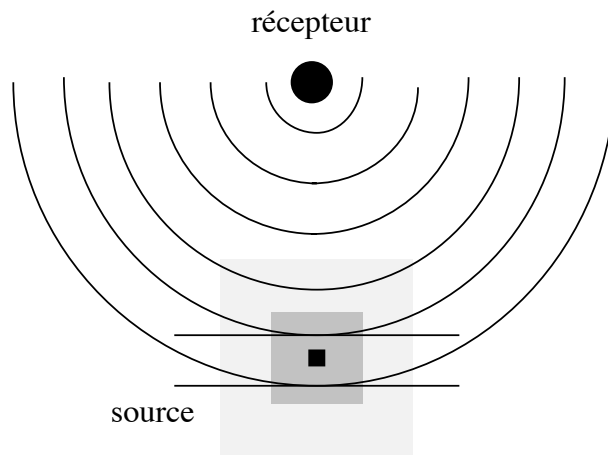


FIGURE 3.3. — Approximation dipolaire et approximation du champ lointain. En noir, la zone où $R \approx r$; en gris, la zone où $R \approx r - \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'$; en grisé très clair, la zone où l'on ne peut pas faire d'approximation.

L'approximation dipolaire et l'approximation de champ lointain sont des approximations faites sur la valeur de la différence de marche. Pour visualiser ce qu'elles représentent, considérons la figure 3.3, où l'on a tracé des cercles centrés sur le récepteur et séparés d'une longueur d'onde. Tous les points de la source situés sur un même cercle correspondent à une même différence de marche. Ils interfèrent donc de façon constructive au niveau du récepteur. On voit que dans le cas de la source noire, tous les points de la source sont en

phase : *c'est l'approximation dipolaire* que nous allons détailler plus loin. Pour la source représentée en gris clair, il n'est plus possible de négliger les déphasages. Toutefois, on remarque que les droites tracées de façon tangente aux cercles sont presque confondues avec le cercle. Cela signifie que l'expression (3.22) est une bonne approximation : *c'est l'approximation du champ lointain*. Enfin, dans le cas de la source représentée en gris clair, différents points situés sur une même droite reliant le centre de la source au détecteur sont clairement à une distance différente du récepteur. L'expression (3.22) qui leur attribue la même différence de marche n'est pas valable.

De façon plus précise, il est possible d'introduire un développement en termes dipolaires électriques et magnétiques, puis quadrupolaires, octupolaires, etc en introduisant le développement en série du terme de phase $\exp[-i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}']$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{r} \frac{i\omega}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') [1 - i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' + \dots] d^3\mathbf{r}' \quad (3.24)$$

Le premier terme de (3.24) correspond au rayonnement dipolaire électrique, le second au rayonnement dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique, etc. On peut justifier l'appellation dipolaire électrique en exprimant le résultat en fonction du moment dipolaire de la distribution défini par la relation :

$$\mathbf{p}(t) = \int \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (3.25)$$

où $\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$. On note alors $\mathbf{p}(t) = \text{Re} [\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}]$. Nous allons établir l'égalité

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (3.26)$$

qui montre que la contribution à l'ordre le plus bas dans l'équation (3.24) est due au moment dipolaire de la source.

Le plus parlant est d'établir ce résultat dans le cas d'une distribution ponctuelle de charges. Soit un élément de volume δV contenant N particules animées des vitesses $\mathbf{v}_i$ et situées en $\mathbf{r}_i$. On peut écrire le moment dipolaire résultant $\mathbf{p}$ ainsi que l'intégrale de la densité de courant sur δV par intégration des densités volumiques microscopiques.

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i \in \delta V} q_i \mathbf{r}_i \quad \text{et} \quad \int_{\delta V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \sum_{i \in \delta V} q_i \mathbf{v}_i \quad (3.27)$$

ce qui montre clairement que l'on a

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \int_{\delta V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (3.28)$$

L'approximation dipolaire consiste à négliger le terme en ω/c et les termes d'ordres supérieurs dans l'équation 3.24. Cela revient finalement à considérer $r \gg L$ et $\lambda \gg L$. le potentiel vecteur s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{r} \frac{i\omega}{c} (-i\omega \mathbf{p}_0) \quad (3.29)$$

Il est intéressant de remarquer ici que dans le cadre de ce cours, le dipôle $\mathbf{p}_0$ n'est pas nécessairement constitué que de deux charges positive et négative, bien qu'il ait été introduit auparavant de cette manière et qu'il en tire son nom. Pour nous, un dipôle peut être un petit élément de matière contenant quelques 10^6 électrons et autant de protons. En fait un dipôle est relié à un élément infinitésimal de courant, le "infinitésimal" étant à comparer avec la longueur d'onde du rayonnement. Un électron seul dont la position oscille à la fréquence ω est aussi un dipôle.

3.4.3. Calcul du champ rayonné

Nous allons effectuer le calcul des champs électrique et magnétique dans le cadre de l'approximation du champ lointain et pour un champ monochromatique. La méthode la plus simple consiste à calculer le champ

magnétique puis à en déduire le champ électrique en utilisant les propriétés de structure des ondes planes, l'onde rayonnée étant localement assimilée à une onde plane. Afin d'évaluer l'expression asymptotique du champ magnétique, nous ne gardons que les termes à l'ordre le plus bas en r^{-1} , les termes d'ordre supérieur devenant rapidement négligeables.

$$\mathbf{B} = \text{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{grad} \left(\frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{R} \right) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (3.30)$$

Le gradient porte sur la position d'observation $\mathbf{r}$. Il se calcule en remarquant que l'on peut écrire d'une part $\text{grad}_r f(R) = \partial f / \partial R \text{ grad}_r R$ et d'autre part $\text{grad}_r R = \mathbf{R}/R = \mathbf{u}_R$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[i\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_R - \frac{\mathbf{u}_R}{R} \right] \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\omega R/c}}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (3.31)$$

Aucune approximation n'a été faite jusqu'en (3.31). Si l'on se place dans le cadre du champ lointain, il est possible d'approximer le vecteur unitaire $\mathbf{u}_R$ par le vecteur unitaire $\mathbf{u}_r$ qui ne dépend plus de la variable d'intégration (ce qui est valable dans le cadre de l'approximation du champ lointain voir figure 3.3). Par ailleurs, nous allons aussi négliger le terme en $1/R$ par rapport au terme en $\omega/c = 2\pi/\lambda$, autrement dit nous allons faire une hypothèse supplémentaire sur la distance r qui est $r \gg \lambda$ (ou $R \gg \lambda$). Cette approximation n'est *a priori* pas incluse dans l'approximation dite "de champ lointain" : par exemple dans le cadre de l'approximation dipolaire (qui contient l'approximation de champ lointain), on ne sait rien de la relation entre r et λ . Toutefois, dans la plupart des cas de figure, toutes ces approximations sont remplies : ce seront les situations examinées en Travaux Dirigés. À l'aide du vecteur d'onde "local" défini par la relation $\mathbf{k} = \omega/c \mathbf{u}_r$ le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= i\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{A} \\ &= i\mathbf{k} \wedge \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ce résultat est celui que l'on aurait obtenu dans le cas d'une onde plane. Ceci montre que dans l'approximation du champ lointain, le champ a localement une structure d'onde plane. Ce résultat n'est pas surprenant puisque l'approximation du champ lointain est valable précisément lorsque l'on peut assimiler la surface équiphasé sphérique à son plan tangent (voir figure 3.3). On en déduit aisément le champ électrique en appliquant les règles de calcul des ondes planes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -c\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= i\omega[\mathbf{A}(\mathbf{r}) - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) \mathbf{u}_r] \\ &= i\omega\mathbf{A}(\mathbf{r})_{\perp} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Il est important de bien noter que le double produit vectoriel de $\mathbf{A}$ par le vecteur unitaire $\mathbf{u}$ (qui est l'expression en champ lointain de rot rot) n'est autre que l'opération de projection de $\mathbf{A}$ sur le plan perpendiculaire à $\mathbf{u}$. Le résultat est noté $\mathbf{A}_{\perp}$, on note que $|\mathbf{A}_{\perp}| = |\mathbf{A}| \sin \theta$, θ étant l'angle formé par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{u}$. On retrouve la propriété de transversalité du champ électrique qui n'est valable qu'en *champ lointain*. Par ailleurs, on observe que lorsque la direction d'observation $\mathbf{u}$ coïncide avec la direction de $\mathbf{A}$, l'angle θ s'annule et avec lui le champ rayonné. L'expression (3.33) du champ électrique peut également s'obtenir en partant de :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.34)$$

et en effectuant les approximations de champ lointain de la même façon sur le potentiel scalaire V . On s'aperçoit alors que le gradient du potentiel scalaire compense exactement la partie longitudinale du champ $-\partial \mathbf{A} / \partial t$ (voir chapitre 1 la décomposition canonique en champs longitudinal et transverse ainsi qu'en champs rotationnel et irrotationnel). Cette façon de procéder conduit donc à un calcul beaucoup plus lourd. En effectuant le même type de calcul sans faire l'hypothèse d'un champ monochromatique on obtient en champ lointain :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)_{\perp}}{\partial t} \quad (3.35)$$

3.4.4. Puissance rayonnée dans tout l'espace en champ lointain

La puissance totale rayonnée s'obtient en évaluant le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de rayon r suffisamment grande pour que l'approximation de champ lointain soit applicable. On peut alors utiliser les expressions approchées établies plus haut donnant les champs magnétiques et électriques en fonction du potentiel vecteur (3.32) et (3.33). Dans le cas de l'approximation dipolaire, on peut utiliser l'expression du potentiel vecteur en fonction du moment dipolaire obtenue en (3.29). Le flux d'énergie rayonné dans l'angle solide $d\Omega$ sous-tendu par la surface orientée $d\mathbf{S}$ est :

$$\begin{aligned}\Pi \cdot d\mathbf{S} &= \Pi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \Pi r^2 d\Omega \\ &= \Pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi\end{aligned}\quad (3.36)$$

avec dans le cas général d'après (3.32) et (3.33) :

$$\Pi = \frac{\epsilon_0 c}{2} \omega^2 |\mathbf{A}_\perp|^2. \quad (3.37)$$

Dans le cas de l'approximation dipolaire, on obtient un résultat explicite à l'aide de (3.29)

$$\Pi = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{\omega^4 |\mathbf{p}_\perp|^2}{r^2} \quad (3.38)$$

Il est important de bien noter la très forte dépendance de la puissance rayonnée par rapport à la pulsation ω . C'est pour cela que l'on peut transporter de fortes puissances le long de kilomètres de câbles à 50 Hz tandis qu'un fil de quelques mètres dissipe par rayonnement une grande partie de l'énergie qui lui est fournie lorsque la fréquence est supérieure à 10 kHz. On est alors dans le domaine radio et le fil est devenu une antenne.

La puissance totale rayonnée s'obtient en intégrant sur tous les angles solides :

$$\begin{aligned}P &= \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \omega^4 \int |\mathbf{p}_\perp|^2 d\Omega \\ &= \frac{\mu_0}{16\pi c} p_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 p_0^2\end{aligned}\quad (3.39)$$

Ce résultat très important est souvent donné en unités CGS (pour Centimètres Gramme Seconde)³. D'un point de vue pratique, le facteur multiplicatif $1/4\pi\epsilon_0$ que l'on peut mettre en évidence en unités SI disparaît en CGS.

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 p_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \quad (\text{unités SI}) = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} \quad (\text{unités CGS}) \quad (3.40)$$

Ce calcul montre que le dipôle émet du rayonnement, il perd donc de l'énergie.

3.4.5. Réaction de rayonnement

Lorsque l'on s'intéresse à la description de la dynamique du dipôle, la perte d'énergie par rayonnement est modélisée par une force dissipative. Dans le cas d'une charge q de masse m , il est facile de vérifier que la force appelée *réaction de rayonnement* est donnée par l'expression :

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3} m \tau \ddot{\mathbf{r}} \quad (3.41)$$

est bien égale à l'opposé de la puissance dissipée. Dans cette expression, τ est un temps donné par la relation $\tau = r_e/c$ où r_e est le rayon classique de l'électron défini par :

$$mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e}$$

3. En unité CGS, l'ampère n'est plus une unité de base. On trouvera une discussion intéressante sur les différents systèmes d'unité dans J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique*

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Retrouver le potentiel vecteur (ou scalaire) dans l'approximation de champ lointain à partir de son expression exacte (potentiel retardé)
- ❷ Écrire les conditions de l'approximation de champ lointain et de l'approximation dipolaire
- ❸ Savoir interpréter la directivité d'une antenne en termes d'interférences
- ❹ Calculer la puissance rayonnée par une antenne dans une direction donnée
- ❺ Calculer la puissance totale rayonnée

Compléments du chapitre 3

3A. Complément A

Fonction de Green

On souhaite résoudre :

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

pour une densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ donnée. Pour cela, nous allons d'abord chercher la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ définie par :

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad (3A.1)$$

La démonstration qui suit est donnée à titre indicatif. Elle fait en particulier appel aux distributions et aux intégrales dans le plan complexe. On pourra trouver une autre démonstration dans [Jackson, "Electrodynamique classique", Dunod, Paris, 2001].

3A.1. Fonction de Green dans l'espace de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction de Green $G(\mathbf{k}, \omega)$ vérifie :

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\mathbf{k}, \omega) = -1 \quad (3A.2)$$

Dans le cadre de la théorie des distributions, la solution de l'équation $xT(x) = 1$ est donnée par $T(x) = Vp \frac{1}{x} + C\delta(x)$ où C est une constante arbitraire.⁴ On en déduit donc :

$$G(\mathbf{k}, \omega) = Vp \frac{1}{k^2 - k_0^2} + C\delta(k - k_0) + C'\delta(k + k_0) \quad (3A.3)$$

où $k_0 = \omega/c$, et C, C' sont des constantes fixées par les conditions aux limites.

3A.2. Fonction de Green dans l'espace direct

La transformée de Fourier inverse par rapport aux variables d'espace s'écrit :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \omega) &= Vp \iiint G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\ &= Vp \int_{k=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} G(\mathbf{k}, \omega) e^{ikr \cos \theta} \frac{k^2 dk \sin \theta d\theta d\phi}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} Vp \int_0^{\infty} k^2 G(k, \omega) \int_{-1}^{+1} e^{ikru} du dk \quad \text{où } u = \cos \theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} Vp \int_0^{\infty} k^2 G(k, \omega) \frac{\sin kr}{k} dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[Vp \int_0^{\infty} k G(k, \omega) e^{ikr} dk \right] \end{aligned}$$

4. Une distribution $f(x)$ telle que la distribution de Dirac est définie par la valeur de l'intégrale $\int f(x)\phi(x)dx$ où $\phi(x)$ est appelée fonction test. Par exemple, la définition du delta de Dirac est $\int \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$. La valeur principale de $1/x$ est définie par

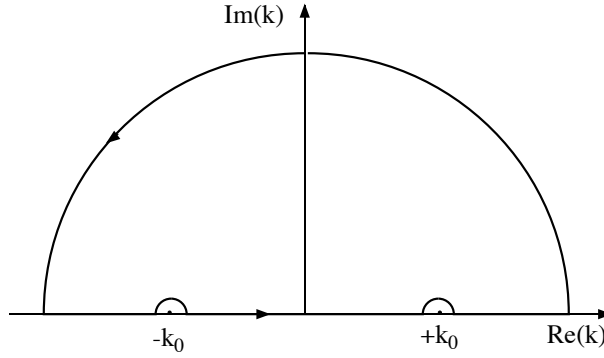
$$Vp \int \frac{1}{x} \phi(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x')}{x'} dx' + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x')}{x'} dx' \right]$$

(i) Evaluons la première contribution à cette intégrale :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[Vp \int_0^\infty \frac{k}{k^2 - k_0^2} e^{ikr} \right] \quad (3A.4)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r} \text{Im} \left[Vp \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2 - k_0^2} e^{ikr} \right] \quad (3A.5)$$

Pour évaluer cette intégrale, nous allons utiliser le chemin dans le plan complexe décrit par la figure ci-dessous. Le chemin le long de l'axe réel évite les deux pôles $k = k_0$ et $k = -k_0$ de la fonction de telle sorte qu'ils ne fassent pas partie de la surface entourée. L'intégrale sur l'ensemble du contour vaut donc zéro. La contribution le long de l'axe réel est exactement la valeur principale que nous voulons déterminer. La contribution le long du demi-cercle qui ferme le contour tend vers zéro car $\exp(ikr)$ tend vers zéro exponentiellement dans le demi-espace $\text{Im}(k) > 0$. La contribution du petit demi-cercle autour des pôles $+/- k_0$ donne $-i\pi \text{Res}(+/- k_0)$.



On obtient ainsi :

$$Vp \int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk - i\pi \text{Res}(k_0) - i\pi \text{Res}(-k_0) = 0 \quad (3A.6)$$

D'où l'on déduit :

$$Vp \int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk = i\pi \frac{k_0 e^{ik_0 r}}{2k_0} + i\pi \frac{-k_0 e^{-ik_0 r}}{-2k_0} \quad (3A.7)$$

$$= i\pi \cos(k_0 r) \quad (3A.8)$$

On obtient donc $I_1 = \frac{1}{4\pi r} \cos(k_0 r)$.

(ii) Evaluons la seconde contribution à l'intégrale :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[\int_0^\infty k C \delta(k - k_0) e^{ikr} \right] \quad (3A.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} [C k_0 e^{ik_0 r}] \quad (3A.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r} C k_0 \sin k_0 r \quad (3A.11)$$

(iii) La troisième contribution à l'intégrale est immédiate,

$$I_3 = \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[Vp \int_0^\infty k C \delta(k + k_0) e^{ikr} \right] = 0 \quad (3A.12)$$

puisque $-k_0$ n'appartient pas au domaine d'intégration. En rassemblant ces trois résultats, on obtient :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (3A.13)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \cos k_0 r + \frac{1}{2\pi^2 r} C k_0 \sin k_0 r \quad (3A.14)$$

$$= A \frac{e^{ik_0 r}}{r} + B \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \quad (3A.15)$$

où A et B sont deux constantes. La condition de rayonnement de Sommerfeld impose $B = 0$ (onde sortante), d'où

$$\frac{1}{4\pi} + \frac{iC k_0}{2\pi^2} = 0,$$

où

$$C = \frac{i\pi}{2k_0}.$$

Finalement

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi r} \cos k_0 r + \frac{i}{4\pi r} \sin k_0 r \quad (3A.16)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} e^{ik_0 r} \quad (3A.17)$$

Il reste maintenant à prendre la transformée de Fourier inverse par rapport au temps :

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3A.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi r} e^{i(\frac{\omega}{c}r - \omega t)} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3A.19)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (3A.20)$$

Le potentiel scalaire est donc donné par :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \otimes \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (3A.21)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt d^3\mathbf{r}' \quad (3A.22)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (3A.23)$$

Ce dernier résultat constitue la solution bien connue du potentiel retardé.

4. Diffusion

LA diffusion de la lumière est un phénomène qui se manifeste dans un grand nombre de situations physiques. Paradoxalement, il est souvent négligé. Ainsi, la loi de la propagation rectiligne de la lumière implique que l'on ne peut voir de lumière que si l'on est face à la source lumineuse. Pourtant, il est possible de "voir" les faisceaux lumineux tels qu'un rayon de soleil car des particules en suspension diffusent une faible fraction de la lumière dans d'autres directions. De la même façon, d'après les lois de la réflexion de Descartes, on ne devrait pas voir le point d'impact d'un faisceau sur un miroir. Si le miroir était idéalement lisse, les lois de Descartes s'appliqueraient. En pratique, le miroir présente toujours une certaine rugosité qui est responsable de la diffusion de la lumière. De façon générale, on pourra retenir que l'existence de diffusion traduit l'hétérogénéité d'un milieu. La diffusion de la lumière *renseigne donc sur la structure du milieu*. De ce fait, ce phénomène est à la base de très nombreuses techniques expérimentales de caractérisation de la structure de la matière. L'imagerie médicale par échographie d'ondes ultrasonores, la détermination de la structure de cristaux par diffraction de rayons X ou de neutrons, la détection des fonds marins par des sonars, la recherche de nappes de pétrole par diffusion d'ondes élastiques (sismiques) dans le sol, la détermination de la masse végétale de la forêt amazonienne ou de l'épaisseur des calottes glaciaires par diffusion d'ondes radar sont autant de variantes de la même technique.

Le mécanisme responsable de la diffusion peut être décrit de la façon suivante. Une onde incidente sur un milieu induit des courants. Ces courants sont des sources secondaires qui rayonnent à leur tour un champ électromagnétique appelé champ diffusé, la diffusion est donc simplement un mécanisme de re-rayonnement. On distingue deux types de diffusion : la diffusion élastique et la diffusion inélastique. On appelle diffusion élastique la diffusion sans changement de fréquence entre le champ incident et le champ diffusé. Il existe d'autres mécanismes de diffusion pour lesquels la fréquence du champ diffusé n'est plus celle du champ incident (effet Raman, effet Compton, diffusion Brillouin notamment), on parle alors de diffusion inélastique. La diffusion inélastique se produit par exemple pour des milieux non-linéaires. Elle peut aussi se produire pour des systèmes linéaires s'ils ne sont pas stationnaires¹.

La diffusion est un domaine en soi en optique et fait l'objet d'un cours entier (optionnel) en troisième année. Le but de ce chapitre est de donner une première approche de la diffusion. Nous allons tenter d'aborder les principaux concepts, section efficace de diffusion, libre parcours moyen..., à l'aide d'un exemple très simple : la diffusion de la lumière par un électron. Nous verrons ensuite la diffusion par une molécule (plusieurs électrons !) puis par un système ordonné. On verra alors que la diffusion nous donne les résultats connus de la diffraction.

4.1. Diffusion par un électron libre

On considère un électron libre de charge $q = -e$, de masse m , soumis à une onde électromagnétique incidente monochromatique de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\}$. Sous l'effet du champ incident, cette charge va osciller à la fréquence $\nu = \omega/2\pi$. De ce fait, elle se comporte comme l'électron d'un dipôle oscillant et par suite elle rayonne à la fréquence du champ incident créant ainsi un *champ diffusé*. La diffusion apparaît donc clairement comme un phénomène de rayonnement : la matière éclairée par un champ incident devient une source de rayonnement secondaire. On se limitera dans ce qui suit à une étude de la diffusion élastique.

Afin de calculer ce champ diffusé, il faut tout d'abord obtenir une expression explicite du mouvement de l'électron $\mathbf{r}(t)$; l'expression du rayonnement d'un dipôle oscillant donne alors directement le champ diffusé.

1. En effet, la forme la plus générale d'une relation linéaire entre un champ diffusé $E_d(t)$ et un champ incident $E_i(t)$ se met sous la forme $E_d(t) = \int K(t, t') E_i(t') dt'$. Pour un système physique stationnaire, l'opérateur K est nécessairement de la forme $K(t - t')$ car la loi doit rester la même dans une opération de translation par rapport au temps t . Le champ diffusé est donc un produit de convolution du champ incident par un certain noyau K de sorte que l'on a $E_d(\omega) = K(\omega) E_i(\omega)$. Cette relation montre qu'il ne peut pas y avoir dans le champ diffusé de fréquence qui ne soit pas dans le champ incident. On voit ainsi qu'un système linéaire indépendant du temps donne nécessairement de la diffusion élastique. En revanche, un système linéaire dépendant du temps peut donner lieu à de la diffusion inélastique : c'est par exemple le cas de l'effet Doppler.

4.1.1. Détermination du moment dipolaire de l'électron

Dans le cas monochromatique, le rayonnement du dipôle est décrit par l'équation (3.29). Pour caractériser ce rayonnement, nous avons donc besoin du moment dipolaire $\mathbf{p}_0$ de l'électron, excité par le champ incident. Pour cela, nous devons retrouver la trajectoire oscillante de l'électron induite par le champ incident. L'étude est effectuée dans le cadre de la mécanique classique. Le principe fondamental de la dynamique fournit l'équation d'évolution de la position de l'électron :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] + \mathbf{F}_{rad} \quad (4.1)$$

où l'expression de $\mathbf{F}_{rad}$ est donnée par l'équation (3.41). On peut négliger la contribution du champ magnétique lorsque la vitesse de l'électron est très inférieure à c . Lorsque le champ incident est de la forme donnée ci-dessus, on peut chercher une solution en régime permanent de la forme $\mathbf{r}(t) = Re\{\mathbf{r}_0 \exp[-i\omega t]\}$. On établit aisément :

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{2}{3}i\omega\tau} \mathbf{E} \quad (4.2)$$

avec $\tau = r_e/c \approx 10^{-23} s$ où r_e est le rayon classique de l'électron introduit dans le chapitre 3. Ainsi dans le cas d'une onde lumineuse visible, $\omega\tau \approx 10^{-7}$. En négligeant ce terme devant 1 (ce qui revient à négliger $\mathbf{F}_{rad}$ devant $q\mathbf{E}$), on obtient finalement :

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m\omega^2} \mathbf{E} \quad (4.3)$$

Notons que l'on a traité cette équation comme une équation linéaire. Cela est possible car on a supposé que $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0| \ll 1$ de sorte que $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \approx 1$. Cette approximation est valable car l'amplitude du déplacement de l'électron est très faible devant la longueur d'onde.

4.1.2. Calcul de la puissance diffusée. Section efficace de diffusion

Le résultat obtenu dans le cas du dipôle oscillant peut être utilisé sans modifications. La moyenne temporelle de la puissance totale P diffusée, c'est-à-dire prélevée au faisceau incident et rayonnée dans tout l'espace, est ainsi :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{3c^3} q^2 \left[\frac{q}{m\omega^2} \right]^2 E^2 \\ &= \frac{q^4}{4\pi\epsilon_0} \frac{E^2}{3m^2c^3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

En utilisant le rayon classique de l'électron, cette expression se réécrit sous la forme :

$$P = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \epsilon_0 c E^2 \quad (4.5)$$

On reconnaît la moyenne temporelle du vecteur de Poynting ou flux surfacique incident φ_i d'une onde plane $\epsilon_0 c E^2/2$. Finalement, la puissance diffusée se met sous la forme du produit du flux surfacique incident par une quantité homogène à une surface. Cette quantité est appelée *section efficace*. C'est la surface qui, exposée au flux incident, intercepterait un flux égal au flux diffusé. La section efficace d'un électron libre que nous venons de calculer est dite section efficace de Thomson. Son expression est remarquablement simple puisqu'elle est proportionnelle au carré du rayon classique de l'électron. Il faut remarquer qu'elle ne dépend pas de la fréquence du rayonnement incident :

$$P = \sigma_{Th} \varphi_i \quad \text{où} \quad \sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (4.6)$$

La valeur numérique est $r_e = 2.81 \cdot 10^{-15} m$. La section efficace de diffusion d'un électron est donc $\sigma_{Th} = 6.62 \cdot 10^{-29} m^2$.

4.1.3. Libre parcours moyen. Diffusion simple et diffusion multiple

Notons une application importante de la notion de section efficace de diffusion. Lorsqu'un faisceau se propage dans un milieu contenant n particules diffusantes par unité de volume ayant toutes une section efficace de diffusion σ et n'absorbant pas le rayonnement, il est facile de montrer que le faisceau s'atténue exponentiellement avec une longueur caractéristique de décroissance donnée par $1/n\sigma$. Cette longueur d'atténuation est souvent appelée libre parcours moyen par analogie avec la physique des gaz. Pour montrer cela, il suffit de raisonner sur une couche plane d'épaisseur dz et de section S éclairée sous incidence normale. On peut remarquer que la transmission de ce système est équivalente à celle d'une couche dans laquelle chaque diffuseur serait remplacé par un disque totalement absorbant d'aire σ . La transmission de cette couche est alors donnée par le rapport de la surface libre sur la surface totale : $T = [S - nSdz\sigma]/S$. On a donc $I(z + dz) = TI(z)$. Il s'en suit que l'intensité du faisceau satisfait l'équation $dI(z)/dz = -n\sigma I(z)$. L'intensité suit donc une loi de décroissance exponentielle du type

$$I(z) = I(0) \exp(-n\sigma z). \quad (4.7)$$

Un milieu dont l'épaisseur traversée est faible devant la longueur d'atténuation $l = 1/n\sigma$ n'atténue que très peu le faisceau. Il est pratique ici de raisonner avec une image corpusculaire de la lumière. Dans ce cas de figure, les photons subissent zéro ou une collision lors de la traversée du système. On parle de diffusion simple. A contrario, si le milieu a une épaisseur supérieure à quelques $1/n\sigma$, les photons subissent plusieurs diffusions avant de quitter le milieu. On parle de diffusion multiple. La distance d'atténuation $1/n\sigma$ apparaît comme le libre parcours moyen des photons dans le milieu diffusant. Notons que ces notions sont également valables pour tout type d'onde en milieu diffusant.

4.1.4. Section efficace différentielle de diffusion

La section efficace fournit la valeur du flux diffusé *dans tout l'espace*. Si l'on s'intéresse à l'atténuation d'un faisceau, cette information est suffisante. En revanche, si on cherche à savoir quelle quantité de lumière est diffusée dans une direction particulière, cette information est insuffisante. Plus précisément, le problème posé est de savoir quelle proportion de la puissance incidente est diffusée par unité d'angle solide autour d'une direction donnée. On pose alors :

$$dP = \frac{d\sigma}{d\Omega} \varphi_i d\Omega \quad (4.8)$$

où $d\sigma/d\Omega$ est, par définition, la section efficace différentielle. La notation (usuelle) $d\sigma/d\Omega$ de cette quantité peut porter à confusion en ce sens qu'il ne s'agit pas de la dérivée de σ par rapport à Ω . Afin de calculer $d\sigma/d\Omega$, il faut effectuer le calcul du flux du vecteur de Poynting à travers une surface dS interceptée par l'angle solide $d\Omega = dS/r^2$. On a vu au chapitre sur le rayonnement que la puissance émise en champ lointain par un dipôle oscillant varie comme $\sin^2 \theta$ où θ est l'angle entre le champ électrique excitateur (parallèle au dipôle induit) et la direction d'observation. On trouve alors :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta \quad (4.9)$$

qui par intégration sur 4π stéradians redonne immédiatement la section efficace Thomson. La dépendance angulaire de cette section efficace différentielle implique que le phénomène de diffusion peut polariser la lumière. Ceci peut se voir simplement de la façon suivante. Considérons une onde plane incidente se propageant le long de Ox avec un champ électrique polarisé rectilignement suivant Oz (Voir Figure 1). Elle induit un dipôle parallèle à Oz qui rayonne dans toutes les directions sauf dans la direction de Oz puisque le champ rayonné est nul dans la direction parallèle au dipôle. Ceci est une conséquence de la structure transverse du champ. En revanche, si le champ électrique est polarisé suivant Oy , l'onde diffusée suivant Oz est non nulle. Considérons maintenant une onde incidente non polarisée. Le champ électrique a une composante suivant Oz et une composante suivant Oy (une onde plane dans le vide est transverse)². Un observateur observant la particule diffusante suivant Oz recevra un rayonnement polarisé rectilignement suivant Oy . En résumé, le phénomène de diffusion modifie l'état de polarisation du rayonnement.

2. Si les composantes suivant Oz et suivant Oy sont corrélées, on a une onde polarisée elliptiquement, les cas circulaires et rectilignes étant des cas particuliers de la polarisation elliptique. Si les deux composantes sont aléatoires et non corrélées, on parle de champ dépolarisé.

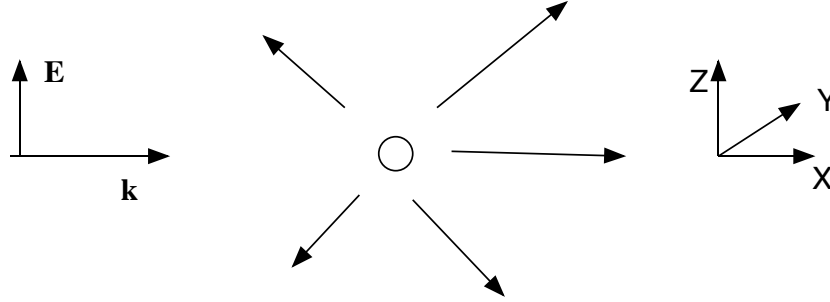


FIGURE 4.1. – Polarisation du champ diffusé

4.2. Diffusion par un atome ou une molécule

Un atome est constitué de charges lourdes (les protons ont une masse de $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) et de charges plus légères (les électrons ont une masse de $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg). La différence de masse entre les deux particules est de trois ordres de grandeur, la puissance électromagnétique rayonnée (diffusée) par les protons est donc de six ordres de grandeur en dessous de la puissance rayonnée par les électrons. Lorsque l'on s'intéresse à l'interaction d'atomes avec le champ électromagnétique, il est donc justifié de ne considérer que les électrons. Le fait qu'ils soient associés à un noyau est pris en compte classiquement via une force de rappel élastique (ressort). On parle dans ce cas d'*électrons liés* ou d'électron élastiquement lié. On peut s'attendre à l'apparition d'une forte dépendance en fréquence du fait de la présence d'une ou plusieurs fréquences de résonance (associées à différentes forces de rappels suivant les couches sur lesquelles se situent les électrons). Il faut aussi s'attendre à retrouver la section efficace de diffusion Thomson lorsque la fréquence du rayonnement incident sera nettement plus grande que la fréquence propre. La démarche que nous suivons est la même que dans la section 4.1 : calcul du dipôle induit puis de la puissance diffusée.

4.2.1. Équation du mouvement

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, nous ajoutons une force de rappel élastique (voir chapitre 6) :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_{rad} - m\omega_0^2 \mathbf{r}. \quad (4.10)$$

On en déduit l'amplitude complexe du mouvement :

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E} \quad (4.11)$$

avec $\gamma = (2/3)\omega^2\tau$ et $\tau = r_e/c$.

Le moment dipolaire s'écrit donc :

$$\mathbf{p}_0 = q\mathbf{r}_0 = -\frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E} \quad (4.12)$$

Il est possible d'introduire la *polarisabilité* $\alpha(\omega)$ qui est une grandeur qui caractérise la capacité de l'atome, la molécule ou bien une particule plus grosse à se polariser. La polarisabilité relie le moment dipolaire au champ électrique de la manière suivante³ :

$$\mathbf{p}_0 = \epsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E} \quad (4.13)$$

Dans le cas de l'électron élastiquement lié, la polarisabilité a une expression simple :

$$\alpha(\omega) = -\frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \quad (4.14)$$

3. Plus généralement, la polarisabilité est en fait un tenseur qui permet de prendre en compte le fait que le moment dipolaire n'est pas nécessairement aligné avec le champ électrique

4.2.2. Section efficace de diffusion

Nous avons vu que la section efficace de diffusion est proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement du dipôle oscillant. La section efficace de diffusion pour l'électron élastiquement lié s'obtient donc immédiatement en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_{Th}} &= \left| \frac{r_{0\text{ lie}}}{r_{0\text{ libre}}} \right|^2 \\ &= \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

d'où finalement :

$$\sigma(\omega) = \sigma_{Th} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (4.16)$$

4.2.3. Diffusion Rayleigh, diffusion Thomson et diffusion résonnante

Suivant les valeurs des différents paramètres, on distingue plusieurs types de régimes.

Diffusion Rayleigh : $\omega \ll \omega_0$ et $\gamma \ll \omega_0$

Dans ce cas, le dénominateur varie comme ω_0^4 d'où :

$$\sigma(\omega) = \sigma_{Th} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (4.17)$$

Il s'agit de la diffusion Rayleigh. Ce résultat montre que l'infrarouge est beaucoup moins diffusé que le rayonnement visible. En particulier, au sein du spectre visible, le bleu est plus diffusé que le rouge. Cela explique que le soleil vu en transmission au travers d'une couche importante d'atmosphère au couchant soit rouge, la lumière transmise étant plus appauvrie en bleu qu'en rouge. En revanche, lorsque l'on regarde ailleurs que dans la direction du soleil, ou d'une autre étoile, on ne devrait pas voir de lumière. La lumière vue est la lumière *diffusée par l'atmosphère*, elle est donc plus riche en bleu qu'en rouge.

Diffusion Thomson : $\omega \gg \omega_0 \gg \gamma$

Sous les deux conditions ci-dessus, on peut considérer que l'électron est libre. En effet, dans ce cas, le mouvement de l'électron (de vitesse angulaire ω_0) est pratiquement rectiligne pendant quelques dizaines de périodes du rayonnement incident de pulsation ω , il se comporte donc comme un électron libre. Un autre point de vue consiste à dire que l'énergie du photon incident est beaucoup plus grande que l'énergie de liaison de l'électron. La diffusion des rayons X est une diffusion de type Thomson pour les électrons des couches périphériques. L'énergie de liaison des électrons des couches internes croît avec le nombre de protons de l'atome, on peut alors avoir diffusion résonnante.

Diffusion résonnante : $\omega \approx \omega_0$

Au voisinage de la pulsation propre, on peut faire apparaître un profil lorentzien :

$$\sigma(\omega) = \sigma_{Th} \frac{\omega_0^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (4.18)$$

En fait, ce qui apparaît ici comme un processus de diffusion résonnante dans une description classique revêt un comportement différent dans une approche quantique. A forte intensité, le processus devient un processus d'absorption et d'émission. Ce processus a une différence fondamentale avec le processus de diffusion : il n'existe aucune relation de phase entre le photon absorbé et le photon émis. En revanche, à faible niveau d'éclairement, le processus dominant est le processus de diffusion élastique qui conserve la cohérence de

l'onde. Quoi qu'il en soit, la section efficace est considérablement plus grande que le processus de diffusion Thomson. En calculant la valeur maximale à la résonance on trouve :

$$\sigma(\omega_0) = \sigma_{Th} \left(\frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 \quad (4.19)$$

où ω_0 est typiquement 10^{15}s^{-1} dans le visible et un bon ordre de grandeur de γ est 10^8s^{-1} (ce qui revient à dire que la durée de vie $1/\gamma$ d'un état excité est de l'ordre de 10^{-8}s). On trouve un rapport $\sigma(\omega_0)/\sigma_{Th}$ de 14 ordres de grandeur !

4.2.4. Pourquoi le ciel est bleu, pourquoi les nuages et le lait sont blancs ?

La diffusion de la lumière visible par des électrons des molécules d'azote ou d'oxygène est typiquement de la *diffusion Rayleigh*. En effet, les fréquences propres des électrons de ces molécules sont beaucoup plus élevées que les fréquences du spectre visible (l'ionisation se produit avec de l'UV ou des rayons X suivant que l'on considère des électrons périphériques ou appartenant au cœur des atomes). La diffusion se fait donc en ω^4 . Par ailleurs, les molécules présentes dans l'air ayant une taille de quelques Ångströms, l'ensemble des électrons rayonne en phase, la longueur d'onde étant typiquement de quelques milliers d'Ångströms. La lumière provenant du ciel est de la lumière émise par le soleil puis diffusée par l'atmosphère, la diffusion étant en ω^4 , la composante à $0,4 \mu\text{m}$ est 10 fois plus diffusée que la composante à $0,7 \mu\text{m}$.

Lorsque l'on observe la couronne solaire, on observe la lumière du soleil diffusée par des électrons libres situés au voisinage du soleil. Il s'agit donc de diffusion Thomson, ce qui explique qu'il n'y ait pas de modification de la couleur apparente entre le soleil et sa couronne.

Dans le cas des nuages, le phénomène est différent. Le premier point à noter est qu'il n'y a pas d'absorption de la lumière visible par les gouttes d'eau. La couleur des nuages qui va du gris très sombre (couverture nuageuse épaisse) à un blanc éclatant est un effet de diffusion. On peut noter que les nuages vus d'avion sont toujours blancs. En revanche, ils sont toujours gris au sol si la couverture nuageuse est épaisse. Lorsque l'on observe des cumulo nimbus, ils sont parfois gris, parfois blancs. A quoi est donc due la couleur des nuages ? Puisqu'il n'y a pas d'absorption, il s'agit d'un effet d'atténuation par diffusion. Lorsque l'épaisseur des nuages est suffisante, la fraction de lumière transmise tend vers zéro. Puisqu'il n'y a pas d'absorption, la lumière qui n'est pas transmise est nécessairement réfléchi. Ceci explique l'aspect brillant des nuages vus d'avion et le fait que les nuages soient gris-noir vus du sol. La couleur des nuages dépend donc de la position relative de l'observateur, du soleil et des nuages. Les nuages épais isolés dans un ciel bleu sont blancs lorsqu'ils sont vus en réflexion et noirs en transmission. C'est le même mécanisme qui explique la couleur blanche du lait. La lumière est diffusée par des molécules organiques en suspension dans l'eau. En revanche, en diluant quelques gouttes de lait dans de l'eau, on peut observer de la diffusion bleue tandis que le faisceau transmis devient rouge.

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Retrouver un moment dipolaire à partir d'un modèle simple (électron libre ou lié), ou à partir de la polarisabilité
- ❷ Calculer la puissance diffusée
- ❸ Écrire la section efficace de diffusion différentielle et totale
- ❹ Définir le libre parcours moyen et l'atténuation d'une onde dans un milieu diffusant

5. Équations de Maxwell dans la matière

5.1. Introduction

Le problème que nous abordons dans ce chapitre est celui de l'étude des champs électromagnétiques dans un milieu matériel. Rappelons que les champs fournissent une description commode des efforts effectués par un ensemble de charges "sources" sur une charge d'essai. Lorsque l'on considère une onde électromagnétique dans le "vide", cela signifie que les charges constituant l'émetteur (la source) sont très éloignées du point où se trouve la charge d'essai *supposée isolée*. Envisageons maintenant que celle-ci soit placée dans un milieu matériel, de ce fait elle se trouve entourée de charges (les électrons et les noyaux constituant la matière) et donc, soumise à des efforts de leur part. Le champ électrique, qui traduit l'ensemble des efforts sur la charge d'essai, dépend donc de la distribution de charges dans la matière environnante. Cela pose le problème de la description de la distribution des charges dans la matière et de leur lien avec les champs électromagnétiques. Pour traiter ce problème, l'utilisation des densités de charge et de courant microscopiques

$$\rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (5.1)$$

$$\mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (5.2)$$

qui met en jeu quelques 10^{23} particules par unité de volume n'est pas envisageable. De même, le calcul des champs électromagnétiques microscopiques, qui prennent des valeurs très importantes au voisinage des charges ce qui implique de très grandes variations sur des distances de l'ordre de grandeur de 10^{-10} m (distance interatomique dans la matière) n'est ni réalisable ni utile. Nous allons donc introduire des grandeurs "macroscopiques", c'est-à-dire des grandeurs moyennées, pour décrire l'évolution des ondes électromagnétiques dans la matière.

5.2. Moyennes spatiales

Les équations de Maxwell microscopique font appel aux champs électrique et magnétique et à leurs dérivées spatiales et temporelle ainsi qu'aux densités de charge et de courant. Pour "gommer" les singularités de la matière, nous voulons moyenner spatialement ces grandeurs. Pour établir de nouvelles équations de Maxwell gouvernant les champs moyennés, il est donc nécessaire de savoir comment prendre la moyenne spatiale des champs d'une part et comment calculer la dérivée spatiale de ces champs moyennés d'autre part. Définir une moyenne nécessite au moins la donnée d'une longueur caractéristique L_0 sur laquelle seront calculées les moyennes. On peut trouver un ordre de grandeur de L_0 en considérant que cette grandeur doit être grande devant la taille d'un atome ($\approx 10^{-10}$ m) et petite devant les variations spatiales du champ lui-même, c'est à dire la longueur d'onde (≈ 500 nm dans le domaine visible). Une bonne valeur est de prendre $L_0 \approx 10$ nm. Un volume L_0^3 contient encore environ 10^6 atomes, de sorte que les fluctuations des champs sont effacées par la moyenne spatiale. Ce volume reste encore assez petit pour que les variations des champs aient un sens physique.

5.2.1. Définition de la moyenne spatiale

Le but de cette opération est double :

- i) supprimer les variations rapides de ρ , $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Il s'agit donc d'un filtrage passe-bas en termes de fréquences spatiales.

ii) remplacer les distributions (au sens mathématique du terme) $\rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}')$ et $\mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}')$, qui contiennent des singularités du type $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$, par des fonctions continues des variables d'espace $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r})$ et $\langle \mathbf{j}_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r})$.

Considérons une fonction $f(\mathbf{r})$, à support borné (de longueur caractéristique L_0) et vérifiant :

$$\int f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1 \quad (5.3)$$

Par définition, la densité de charges moyennée sera :

$$\langle \rho_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r}) = \int \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.4)$$

Par exemple, la fonction f peut être $C \exp(-r^2/L_0^2)$ où C est une constante de normalisation fixée par (5.3). L_0 est la longueur caractéristique de la fonction f . L_0 est suffisamment grand pour absorber les fluctuations spatiales rapides de la densité de charge (à chaque fois qu'on "croise" un électron par exemple), et suffisamment petit pour que la donnée de $\mathbf{r}$ ait un sens pour une onde électromagnétique se propageant dans la matière.

Considérons le cas d'une charge isolée ponctuelle en $\mathbf{r}_0(t)$:

$$\rho_{\text{micro}} = q \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \quad (5.5)$$

D'après (5.4) :

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r}) &= \int q \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)] f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= q f[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'opération de moyenne ainsi définie consiste à délocaliser la charge qui se trouve répartie continuellement dans un volume d'environ L_0^3 . La condition (5.3) assure toutefois la conservation de la charge totale :

$$\int \langle \rho_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int q f[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] d^3\mathbf{r} = q = \int \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.7)$$

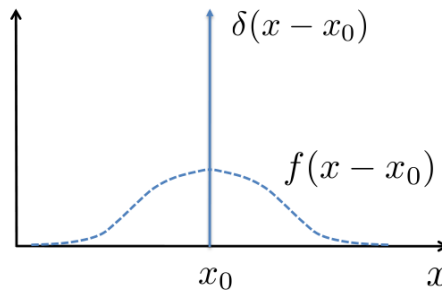


FIGURE 5.1. – Fonction continue remplaçant la distribution

5.2.2. Analogie avec la formation des images

Par définition, un système optique stigmatique associe à un point objet, un point image (tout rayon lumineux passant par l'un, passe par l'autre). Supposons maintenant que l'on observe l'image formée dans un plan légèrement décalé par rapport au plan image, conjugué du plan objet. L'image d'un point devient une *tache* d'autant plus grande que le plan d'observation s'éloigne du plan image. Le résultat est une image floue à cause du défaut de mise au point. Seules les caractéristiques à grande échelle sont conservées dans une image floue tandis que les détails sont supprimés. La distribution de lumière dans la *tache* due au défaut de mise au point joue le rôle de la fonction f de lissage. La juxtaposition de ces taches conduisant à l'image floue est analogue à la "juxtaposition" des "charges floues" de la relation (5.4) qui peut se réécrire :

$$\langle \rho_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r}) = \sum q_i f[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i] \quad (5.8)$$

Enfin, de la même façon, la quantité $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle$ est "floue" en ce sens que la structure fine de ρ_{micro} a disparu.

5.2.3. Dérivée d'une quantité moyennée

Nous définissons les champs moyennés de la même façon. Ainsi par exemple :

$$\langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}_{\text{micro}}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (5.9)$$

Les équations de Maxwell faisant intervenir les dérivées des champs macroscopiques, il faut étudier l'effet de l'opération de moyenne sur les dérivées. On montre que :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle(\mathbf{r})}{\partial x} = \langle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \rangle(\mathbf{r}) \quad (5.10)$$

C'est-à-dire que *la dérivée d'une moyenne est égale à la moyenne de la dérivée.*

5.3. Équations de Maxwell macroscopiques

5.3.1. Équations de Maxwell macroscopiques

Le problème que nous abordons ici est celui de la recherche des *équations satisfaites par les champs moyennés*. Dans le cas des équations de Maxwell sans sources, les équations de Maxwell macroscopiques, c'est-à-dire les équations qui régissent les champs moyens peuvent s'écrire d'emblée en moyennant les équations de Maxwell microscopiques :

$$\begin{aligned} \text{rot} \langle \mathbf{E} \rangle &= - \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} \\ \text{div} \langle \mathbf{B} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

On constate que les équations de Maxwell sans terme source sont les mêmes pour les champs moyens et pour les champs microscopiques. Dans le cas des équations de Maxwell avec termes sources, il nous faut moyenner la densité de charges (Maxwell-Gauss) et la densité de courant (Maxwell-Faraday). Afin d'alléger l'exposé, nous mènerons le calcul à son terme dans le seul cas de l'équation de Maxwell-Gauss.

$$\text{div} \mathbf{E}_{\text{micro}} = \frac{\rho_{\text{micro}}}{\epsilon_0} \quad (5.12)$$

Lorsque l'on moyenne (5.12), on obtient :

$$\text{div} \langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle = \frac{\langle \rho_{\text{micro}} \rangle}{\epsilon_0} \quad (5.13)$$

Il nous reste à faire le calcul de $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle$ afin de trouver la forme classique de l'équation de Maxwell-Gauss *macroscopique* que nous rappelons :

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \quad (5.14)$$

ou encore

$$\text{div} \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\rho_{\text{libre}} - \text{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (5.15)$$

Il s'agit donc de montrer que l'on a $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle = \rho_{\text{libre}} - \text{div} \mathbf{P}$.

5.3.2. Calcul de $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle$: Équation de Maxwell-Gauss macroscopique

Pour mener ce calcul, nous allons procéder en 2 étapes. Tout d'abord, nous envisageons le cas d'un atome isolé, ensuite nous passons à un ensemble d'atomes. Dans tout ce qui suit, nous adoptons le mot atome pour désigner tout ensemble de charges liées entre elles telles que ions en solution, molécules d'un gaz ou d'un liquide, ions dans un cristal ionique ou covalent, voire électrons libres.

Désignons par $\mathbf{r}_{\text{at}}$ le barycentre des charges d'un atome et par $\mathbf{r}_i$ la position de la $i^{\text{ème}}$ particule de cet atome par rapport à ce barycentre (voir figure 5.2). Avec ces notations, la densité de charge due à cet atome s'écrit :

$$\rho_{\text{at micro}}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}} - \mathbf{r}_i) \quad (5.16)$$

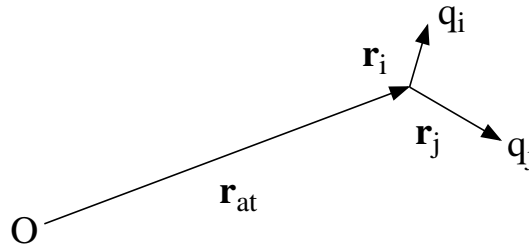


FIGURE 5.2. – Position des charges dans l'atome.

Par définition, la densité moyennée est :

$$\langle \rho_{\text{at}}(\mathbf{r}) \rangle = \int \rho_{\text{at}}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \sum_i q_i f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}} - \mathbf{r}_i) \quad (5.17)$$

Exploitions maintenant le fait que la fonction f varie très doucement à l'échelle atomique en la développant au premier ordre autour du point $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}$:

$$\langle \rho_{\text{at}}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_i q_i f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}) - \sum_i q_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}) \quad (5.18)$$

Introduisons les notations :

$$\sum_i q_i = q_{\text{at}} \quad \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \mathbf{p}_{\text{at}} \quad (5.19)$$

où q_{at} est la charge de l'atome et $\mathbf{p}_{\text{at}}$ son moment dipolaire instantané. La densité de charge atomique moyennée s'écrit alors :

$$\langle \rho_{\text{at}}(\mathbf{r}) \rangle = q_{\text{at}} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}) - \mathbf{p}_{\text{at}} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}) \quad (5.20)$$

Le premier terme du second membre est nul si l'atome est neutre ; dans le cas contraire, il correspond à un "nuage" de charge centré autour du barycentre des charges de l'atome. Dans le cas d'un atome neutre, la densité de charges peut néanmoins être non nulle comme le montre la présence du second terme. C'est le cas lorsque l'atome est polarisé (molécule possédant un moment dipolaire permanent comme H_2O ou CO par exemple ou atome polarisé sous l'effet d'un champ extérieur). La figure 5.3 illustre de quelle façon un atome neutre contribue à la densité de charge. On parle alors de *charge liée* ou plus judicieusement de densité de *charge de polarisation*.

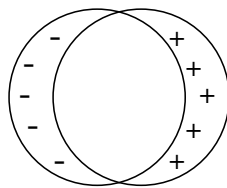


FIGURE 5.3. – Atome polarisé.

Considérons maintenant l'ensemble des atomes constituant le milieu matériel envisagé. Il faut ajouter la contribution de chaque "atome". Notons A l'indice repérant un atome :

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle &= \sum_A \langle \rho_A(\mathbf{r}) \rangle \\ &= \sum_A q_A f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) - \sum_A \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)\end{aligned}\quad (5.21)$$

Le premier terme est appelé "densité de charges libres" (bien qu'elle ne soit pas constituée seulement de charges libres!). Le second est la densité de charge liée et peut s'exprimer à l'aide du vecteur polarisation $\mathbf{P}$. Avant de l'introduire rappelons l'identité :

$$\sum_A \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = \text{div} \left[\sum_A \mathbf{p}_A f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \right] \quad (5.22)$$

où l'on a utilisé le fait que $\mathbf{p}_A$ n'est pas un champ et est traité comme une constante. Posons alors *par définition* de la densité de polarisation $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_A \mathbf{p}_A f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \quad (5.23)$$

Ce champ vectoriel est une densité de polarisation : $\mathbf{p}_A$ est homogène à un moment dipolaire tandis que f est homogène à l'inverse d'un volume. En intégrant $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ sur un volume unité, on obtient, compte-tenu des propriétés de normalisation de f , la somme des moments dipolaires contenus dans ce volume. Finalement, en utilisant (5.23), on obtient l'expression finale de la densité de charge moyennée :

$$\langle \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}) \rangle = \rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}) - \text{div} \mathbf{P} \quad (5.24)$$

avec

$$\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}) = \sum_A q_A f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \quad (5.25)$$

d'où l'expression de l'équation de Maxwell-Gauss pour les champs macroscopiques :

$$\text{div} \langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle = \frac{\rho_{\text{libre}} - \text{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (5.26)$$

Remarque 1 : Le développement effectué en (5.18) pourrait être poussé plus loin, on obtiendrait à l'ordre suivant le moment quadrupolaire puis... etc. On parle de développement multipolaire. Formellement, ce développement peut être effectué à tous les ordres. La polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ qui intervient dans (5.24) est alors la somme du terme dipolaire que nous avons explicité et de tous les autres termes du développement.

Remarque 2 : Les appellations usuelles "charge libre" et "densité de charge libre" prêtent à confusion. L'origine de cette confusion tient à l'équation (5.24). Dans celle-ci, le terme $-\text{div} \mathbf{P}$ correspond comme on l'a vu aux *charges de polarisation* que l'on appelle *charges liées*. Par opposition (mais c'est un abus de langage) l'autre terme est appelé densité de charges libres. En effet, l'expression (5.25) montre clairement que des charges éventuellement immobiles peuvent participer à ρ_{libre} .

L'exploitation de (5.26) pour calculer $\mathbf{E}$ nécessite la connaissance de $\mathbf{P}$. En d'autres termes, *le champ électrique en un point de la matière dépend des charges électriques environnantes*. Il est possible de dissimuler formellement cette dépendance explicite du champ par rapport aux charges liées en introduisant le vecteur induction électrique également appelé excitation électrique ou déplacement électrique :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.27)$$

Dorénavant, nous omettrons les signes $\langle \rangle$ étant entendu que tout champ électromagnétique dans la matière est un champ moyenné. De (5.26), on déduit :

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \quad (5.28)$$

Si cela permet de ramener formellement les équations de Maxwell macroscopiques aux équations de Maxwell microscopiques, c'est au prix de l'introduction d'un champ inconnu $\mathbf{D}$. Il faut donc trouver une relation liant $\mathbf{D}$ à $\mathbf{E}$ ou encore $\mathbf{P}$ à $\mathbf{E}$. Cette relation sera caractéristique d'un matériau donné, elle est appelée *relation constitutive*.

5.3.3. Équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère microscopique est :

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{micro}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.29)$$

Après moyenne, on obtient :

$$\text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{j}_{\text{micro}} \rangle + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} \quad (5.30)$$

avec :

$$\langle \mathbf{j}_{\text{micro}} \rangle = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{M} \quad (5.31)$$

où $\mathbf{M}$ est l'aimantation du milieu. La quantité $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ est la contribution des "atomes" de charge totale q_{at} non nulle, libres de se déplacer sur de grandes distances (par rapport à la taille des atomes). Le terme $\partial \mathbf{P} / \partial t$ traduit le courant dû aux oscillations du nuage électronique d'un atome autour du noyau. Le terme $\mathbf{M}$ est dû aux courants électroniques (éventuels) intramoléculaires c'est-à-dire aux moments magnétiques élémentaires, c'est donc un terme essentiellement quantique. De même que l'introduction de l'excitation électrique permet de dissimuler formellement la polarisation, l'excitation magnétique $\mathbf{H}$ va permettre une réécriture de (5.30) :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.32)$$

avec :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (5.33)$$

5.3.4. Interprétation physique des charges liées

Donnons tout d'abord quelques exemples de charges libres. Les charges libres sont des particules chargées pouvant se déplacer librement ... ou non ! Par exemple : électrons libres dans les métaux, ions dans les électrolytes ou dans les gaz, impureté dans une matrice de semi-conducteur...

Dans la suite, on va donner quelques exemples destinés à illustrer à quelles situations physiques correspond $\rho_{\text{lié}} = -\text{div} \mathbf{P}$.

Premier cas : Envisageons la situation schématisée par la figure 4 :

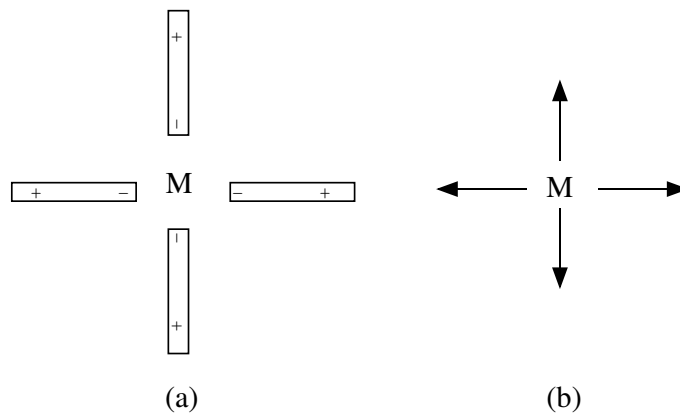


FIGURE 5.4. – Polarisation créée par une charge positive

Les lignes de champ de $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ sont toutes issues d'un point donné. C'est une situation où $\text{div} \mathbf{P}$ est positif (figure 4b) donc $\rho_{\text{lié}} = -\text{div} \mathbf{P}$ est négatif ce qui correspond bien à la figure 4a. Suite à la polarisation du matériau, il apparaît localement un excédent de charge. Allons plus loin en nous demandant dans quelle situation physique on peut obtenir une telle configuration. Les charges négatives sont attirées vers M tandis que les charges positives sont repoussées. Il est possible d'obtenir cette situation en plaçant en M une

charge libre positive. Ce serait par exemple le cas d'un ion interstitiel dans un cristal ou bien le cas d'un ion H_3O^+ "habillé" par des molécules d'eau dans une solution. De façon générale, il faut une charge libre extérieure pour induire une charge liée volumique de ce type. On peut montrer dans le cas d'un diélectrique homogène isotrope ce résultat, le point de départ est la relation constitutive qui s'écrit :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (5.34)$$

d'où l'on tire :

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} \quad (5.35)$$

La densité de charges liées s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{lié}} &= -\text{div} \mathbf{P} \\ &= -\text{div} \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} \right] \\ &= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \text{div} \mathbf{D} \\ &= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_{\text{libre}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

ce qui montre que si ρ_{libre} est nulle alors $\rho_{\text{lié}}$ dans un milieu homogène est nulle aussi.

Deuxième cas : Dans le calcul précédent, nous avons supposé explicitement que ϵ_r ne dépend pas des variables d'espace en le sortant de l'opérateur divergence. Dans le cas contraire, il apparaîtrait un terme dû à l'inhomogénéité du milieu :

$$\rho_{\text{lié}} = -\mathbf{grad} \left[\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right] \cdot \mathbf{D} \quad (5.37)$$

Montrons là encore à l'aide d'un schéma l'origine physique de ce terme : on envisage un gaz dont les particules sont polarisées et qui présente un gradient de concentration donc un gradient de sa constante diélectrique.

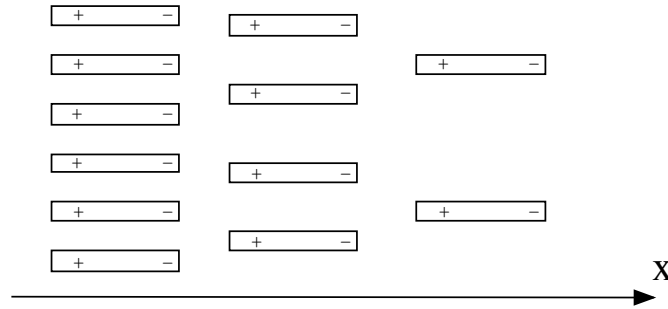


FIGURE 5.5. – Gradient de concentration dans un milieu polarisé

Il apparaît qu'une tranche de gaz comprise entre x et $x + dx$ sera chargée négativement.

Troisième cas : Nous envisageons le cas d'une interface. Si la matière est polarisée dans la direction normale à la surface, il apparaît une charge surfacique :

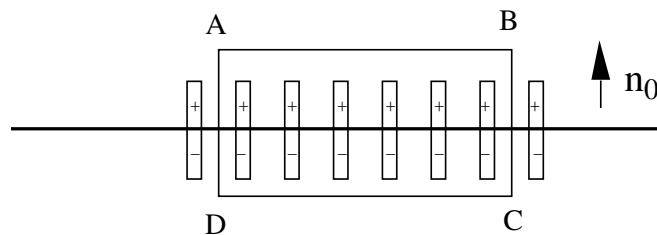


FIGURE 5.6. – Polarisation sur une interface

D'une certaine façon, ce cas se ramène au précédent, la discontinuité de la constante diélectrique étant un cas limite du gradient. Appelons σ la charge surfacique, on peut la déduire de $\rho_{\text{lié}} = -\text{div}\mathbf{P}$ en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski au contour ABCD :

$$\begin{aligned}
 \int_{ABCD} -\text{div}\mathbf{P} \, d\tau &= -\int_{AB} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} \, dS - \int_{CD} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} \, dS \\
 &= \int_{CD} -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} \, dS \\
 &= \int_{CD} \sigma \, dS
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

avec $\sigma = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}}$

où $\mathbf{n}_{\text{ext}}$ est la normale sortante du volume d'intégration, donc $\mathbf{n}_{\text{ext}}(CD) = -\mathbf{n}_0$

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \tag{5.39}$$

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Écrire les équations de Maxwell dans la matière
- ❷ Faire la différence entre un champ microscopique et macroscopique
- ❸ Faire la différence entre charges libres et charges liées

6. Relations constitutives

COMME nous l'avons vu au précédent chapitre, nous avons besoin de décrire le comportement des milieux matériels en spécifiant par exemple leur aptitude à être polarisés ou la quantité de courant pour un champ électromagnétique donné. Ces relations dites constitutives peuvent être par exemple :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \text{ la loi d'Ohm}$$

$$\mathbf{j} = -K \mathbf{A}, \text{ la loi de London pour les supraconducteurs}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \text{ où } \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \text{ pour un diélectrique}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \text{ pour un milieu magnétique.}$$

Nous allons voir dans la suite les caractéristiques de ces relations constitutives et comment elles vont nous conduire à **reformuler les équations de Maxwell**. Les nouvelles équations que nous obtiendrons sont les suivantes :

$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\mathbf{div} \mathbf{D} = 0$

Ceci est la version utile et usuelle des équations de Maxwell dans les domaines des fréquences optiques aux fréquences radio. Elle prend en compte les contributions des charges libres et des charges liées, ce sont elles qu'il faudra écrire lorsque vous utiliserez des constantes diélectriques mesurées expérimentalement (c'est-à-dire tout le temps). Nous verrons dans le chapitre suivant comment cette constante diélectrique est reliée à l'indice optique.

6.1. Propriétés

Une relation constitutive peut prendre des formes différentes suivant les particularités du milieu considéré. Nous allons voir ces différentes propriétés en prenant comme exemple la polarisation. Ces mêmes propriétés peuvent bien sûr concerner d'autres caractéristiques du milieu.

6.1.1. Homogénéité

Le milieu est dit homogène si ses propriétés *ne dépendent pas du point considéré*. Par exemple :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

si χ ne dépend pas de $\mathbf{r}$.

6.1.2. Isotropie

Le milieu est dit isotrope si ses propriétés *ne dépendent pas de l'orientation du champ* (ce n'est pas le cas dans un milieu biréfringent comme vous le verrez en cours de polarisation) :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Si χ est un scalaire, la polarisation induite par le champ électrique $\mathbf{E}$ ne dépend pas de l'orientation de $\mathbf{E}$. Dans le cas contraire, si le milieu est anisotrope, certaines directions de $\mathbf{E}$ produiront une plus forte polarisation, en général $\mathbf{P}$ et $\mathbf{E}$ ne seront plus colinéaires et χ sera un tenseur.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0[\chi]\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Où, en utilisant la notation d'Einstein¹ :

$$P_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j(\mathbf{r})$$

6.1.3. Linéarité

Le milieu est dit linéaire si la relation entre le vecteur $\mathbf{P}$ et la vecteur $\mathbf{E}$ est linéaire :

$$P_i = \epsilon_0 \chi E_i$$

Dans le cas le plus général, anisotrope et non linéaire, on peut écrire par exemple :

$$P_i = \epsilon_0 [\chi_{ij} E_j + \underbrace{\chi_{ijk} E_j E_k + \dots}_{\text{termes non linéaires}}]$$

On voit ici que si le champ électrique est suffisamment faible, le milieu pourra être approximativement considéré comme linéaire. Pour des champs forts comme ceux parfois générés par les lasers, les effets non-linéaires commencent à apparaître (voir Complément 6B).

6.1.4. Localité

La localité suppose que le déplacement de l'électron ne dépend que du champ au point où il se trouve.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Dans la mesure où la vitesse de l'électron ne dépend pas que de la force au point considéré, mais aussi de l'histoire de la force on devrait avoir :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int \gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (6.1)$$

où γ est une conductivité par unité de volume. La largeur de la fonction $\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est liée au libre parcours moyen. Un électron assurant un transport de charge en $\mathbf{r}$ provient de $\mathbf{r}'$ où il a subi le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$. Dans la mesure où $\mathbf{E}$ ne varie pas de façon appréciable sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen de l'électron (distance moyenne entre deux "chocs"), on peut considérer que les porteurs de charge sont soumis à un champ uniforme. Dans la plupart des cas, $\lambda \gg lpm$ et le milieu peut être étudié dans l'approximation locale. Néanmoins, il peut y avoir des effets non locaux près des interfaces. Dans le cas des semi-conducteurs, des paires électrons-trous appelées excitons peuvent avoir une contribution non locale aux propriétés optiques des semi-conducteurs. Dans ce cas, la relation constitutive (6.1) s'écrira dans l'espace des vecteurs d'onde $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$.

6.1.5. Dispersion

Le milieu est dit dispersif si son comportement dépend de la fréquence :

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega) = \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$

ou, dans l'espace direct :

$$\mathbf{j}(t) = \int G_\sigma(t - t') \mathbf{E}(t') dt',$$

où l'on a introduit la transformée de Fourier de la conductivité

$$G_\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (6.2)$$

1. Il y a dans cette notation une somme implicite sur l'indice qui se trouve répété. La relation précédente est donc équivalente à $P_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j(\mathbf{r})$.

6.2. Origine de la dispersion

Le phénomène de dispersion est directement lié au temps de réponse du matériau. Prenons pour exemple la polarisation d'un matériau. On peut parler d'une réponse non-instantanée du matériau de la même façon que l'on a parlé d'une réponse non-locale plus haut. La valeur du moment dipolaire d'un élément de volume dV à l'instant t dépend de la valeur du champ électrique qui induit le dipôle à l'instant t mais également des valeurs prises par le champ pendant les instants précédant t . Ceci est un effet dû au comportement dynamique des charges. Toutefois, alors que la plupart des matériaux peuvent être décrits par une relation locale, seul le vide est non-dispersif. Notons néanmoins que l'on peut généralement négliger la dispersion pour des fréquences inférieures à quelques GHz.

6.2.1. Exemple de l'oscillateur harmonique

L'étude d'un simple oscillateur mécanique peut être très instructif pour discuter de l'origine de la dispersion. Nous considérons un oscillateur harmonique constitué d'une masse accrochée à un ressort (Figure 6.1). On appelle x l'écart à la position d'équilibre (x est algébrique). La masse est soumise à une force de rappel $-kx$, une force de frottement visqueux $-m\gamma\dot{x}$ et une force excitatrice $F(t)$ (oscillations forcées).

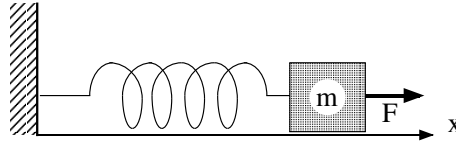


FIGURE 6.1. – Modèle d'oscillateur harmonique.

Écrivons la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} + F(t)$$

Nous introduisons de façon tout à fait générale les transformées de Fourier des grandeurs $x(t)$ et $F(t)$:

$$x(t) = \int x(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{et} \quad F(t) = \int F(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Les exponentielles $e^{-i\omega t}$ constituant une base orthonormale, on a donc pour chaque fréquence ω :

$$x(\omega)[-m\omega^2 + k - im\gamma\omega] = F(\omega)$$

ou encore :

$$x(\omega) = \frac{F(\omega)}{m} \frac{1}{\frac{k}{m} - \omega^2 - i\gamma\omega} = F(\omega) C(\omega)$$

On constate que $x(\omega)$ est un produit de $F(\omega)$ et d'une fonction $C(\omega)$. Dans l'espace temporel, cela se traduit par un produit de convolution. On a donc :

$$x(t) = \int C(t-t') F(t') dt' \quad (6.3)$$

Si la masse m tend vers zéro, alors la relation entre $x(\omega)$ et $F(\omega)$ se réduit à $x(\omega) = \frac{1}{k} F(\omega)$ soit $x(t) = \frac{1}{k} F(t)$ ce qui correspond à une réponse instantanée. Il n'y a donc plus de dispersion. Il apparaît que *la dispersion est une conséquence directe de l'inertie*.

On voit sur cet exemple qu'en l'absence de dissipation d'énergie, c'est-à-dire sans frottements, $C(\omega)$ est réel ($\text{Im}[C] \rightarrow 0$ si $\gamma \rightarrow 0$). Dans l'équation (6.3), si $C(\omega)$ est réel positif, le déplacement de la masse est alors en phase avec la force. Cependant, on a toujours

$$x(t) = \int C(t-t') F(t') dt',$$

le déplacement dépend de l'histoire de la force. Ce n'est pas une réponse instantanée.

La puissance dissipée par le système a pour moyenne temporelle :

$$\begin{aligned}
 P &= \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v}] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{F}^* \cdot (-i\omega) \mathbf{X}] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{F}^* \cdot (-i\omega) C(\omega) \mathbf{F}] \\
 &= \frac{\omega |\mathbf{F}|^2}{2} \text{Im}[C(\omega)]
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

On observe que les pertes sont proportionnelles à la partie imaginaire du facteur de réponse C . Il est rassurant de constater que la partie imaginaire de C est nulle si le terme de frottement visqueux γ est nul. On en conclut que *le déphasage entre la réponse X et l'excitation F est relié à l'existence de phénomènes dissipatifs.*

6.2.2. Cas d'un milieu

Du fait que les masses des charges d'un milieu matériel ne sont jamais strictement nulles, il y a toujours de la dispersion, sauf dans le vide. La dispersion peut être négligée dans deux cas :

si la fréquence est très petite devant la fréquence de résonance $\omega \ll \omega_0$. Cette fréquence correspond souvent à une transition optique (IR - proche UV).

si $\omega \gg \omega_0$, les électrons ne peuvent pas osciller à la fréquence du champ car elle est trop élevée. Le milieu se comporte alors comme le vide.

Le premier cas correspond aux ondes radio et microondes. De façon plus précise, à toutes les fréquences inférieures à la plus basse fréquence pour laquelle le milieu a une résonance. Le second cas correspond aux rayons X. L'indice est alors proche de 1.

6.3. Constante diélectrique généralisée

6.3.1. Régime statique

L'équation (5.31) donne l'expression du courant qui intervient comme terme source dans les équations de Maxwell. A chaque terme source correspond une situation physique macroscopique claire : contribution des charges de polarisation pour le terme $\partial \mathbf{P} / \partial t$, contribution des charges libres pour le terme $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ et contribution des "boucles de courant interne" par le biais du terme $\text{rot } \mathbf{M}$ qui est nul pour un matériau non magnétique. En régime statique (cas d'une pile branchée aux bornes d'une ampoule par exemple), la conduction du courant est assurée par le seul terme $\mathbf{j}_{\text{libre}}$. Cette quantité est décrite à l'aide de la conductivité statique $\sigma(\omega = 0)$. Le terme $\partial \mathbf{P} / \partial t$ ne contribue pas au courant en régime statique. En revanche la polarisation statique est décrite par la constante diélectrique $\epsilon_r^{\text{pol}}(\omega = 0)$. En statique, ces deux paramètres, σ et ϵ_r^{pol} , peuvent être mesurés séparément. Ainsi, on pourra faire des mesures de résistance pour déterminer σ et des mesures de capacité de condensateurs plans fourniront ϵ_r^{pol} .

6.3.2. Régime dépendant du temps

La situation est tout à fait différente en *régime variable*. Dans ce cas, une mesure de résistance, qui est une mesure de densité de courant, donnera la somme des effets dus aux charges libres et aux charges liées. En effet, en régime alternatif, une charge libre a un comportement oscillatoire autour de sa position moyenne fixe. De la même façon, une charge liée à un atome oscille tout en restant au voisinage de l'atome. Il n'y

a plus de différence fondamentale de comportement entre une charge libre et une charge liée mis à part une dépendance en fréquence très différente liée à l'existence de fréquences de résonance pour les charges liées. De ce fait, il est impossible de concevoir une mesure portant sur un type de charge et pas sur l'autre (à l'exception des basses fréquences où le comportement des charges libres est quasistatique et correspond au cas statique). Il est donc impossible de définir deux paramètres (σ et ϵ_r^{pol}) en régime dynamique. Ceci apparaît dans les équations de la façon suivante. Plaçons nous en régime monochromatique. L'amplitude complexe de la densité de courant s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \{\sigma(\omega) - i\omega\epsilon_0[\epsilon_r^{\text{pol}}(\omega) - 1]\}\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}$$

A partir de là, on constate que la densité de courant est proportionnelle au champ électrique. On peut donc définir une conductivité équivalente qui incorpore la contribution des charges liées $\sigma_{\text{eq}}(\omega) = \sigma(\omega) - i\omega\epsilon_0[\epsilon_r^{\text{pol}}(\omega) - 1]$. Ce seul paramètre est un paramètre complexe qui permet de rendre compte de la totalité du terme source apparaissant dans les équations de Maxwell, il est donc suffisant. C'est l'approche qui est adoptée dans le domaine des micro-ondes où le facteur dominant est $\sigma(\omega)$. On travaille alors avec des courants et des conductivités. Dans les domaines infrarouge et visible, le paramètre qui l'emporte est $i\omega\epsilon_0[\epsilon_r^{\text{pol}}(\omega) - 1]$ du fait de la forte valeur de la fréquence dans cette région du spectre. Il est donc habituel d'introduire une constante diélectrique équivalente dite constante diélectrique généralisée par la relation :

$$\mathbf{P}_{\text{eff}} = \epsilon_0(\epsilon_{r,\text{eff}} - 1)\mathbf{E} \quad (6.5)$$

où la constante diélectrique effective est donnée par :

$$-i\omega\epsilon_0[\epsilon_{r,\text{eff}}(\omega) - 1] = \sigma(\omega) - i\omega\epsilon_0[\epsilon_r^{\text{pol}}(\omega) - 1]$$

soit

$$\epsilon_{r,\text{eff}}(\omega) = \epsilon_r^{\text{pol}}(\omega) + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega\epsilon_0}$$

Ce choix se justifie d'autant mieux que - comme on le verra dans le chapitre suivant - la constante diélectrique est le carré de l'indice optique qui est le paramètre le plus naturel pour l'étude de la propagation d'ondes dans un milieu matériel. Dans ces domaines on travaille donc avec la polarisation $\mathbf{P}$ et l'indice ou la constante diélectrique. Dans tout ce qui suit (ainsi que dans tous les ouvrages), la constante diélectrique sera toujours implicitement une constante généralisée et on omettra l'indice "eff". Soulignons le fait que la constante diélectrique $\epsilon_r^{\text{pol}}(\omega)$ et la conductivité $\sigma(\omega)$ sont des nombres complexes. Il n'y a qu'à des fréquences inférieures à 100 MHz que ces quantités sont (presque) des nombres réels.

On voit ainsi immédiatement que l'on a la relation d'équivalence :

$$\mathbf{j}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (6.6)$$

6.3.3. Formulation pratique des équations de Maxwell dans la matière

L'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6.7)$$

devient

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}}{\partial t}, \quad (6.8)$$

où $\mathbf{D}_{\text{eff}} = \epsilon_0\epsilon_{r,\text{eff}}\mathbf{E}$. De même, en utilisant l'équation de conservation de la charge $\text{div}\mathbf{j}_{\text{libre}} = i\omega\rho_{\text{libre}}$, l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \quad (6.9)$$

devient

$$\text{div}\mathbf{D}_{\text{eff}} = 0. \quad (6.10)$$

Répetons une fois de plus que ce sont les équations concernant $\mathbf{D}_{\text{eff}}$ que l'on utilise en pratique. L'indice "eff" est de ce fait implicite et sera toujours omis.

En résumé, si l'on considère un matériau donné, par exemple silice, cristal de NaCl, GaAs, métal... dont on connaît la constante diélectrique $\epsilon(\omega)$ ($\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$) et la perméabilité $\mu(\omega)$ ($\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{div} \mathbf{D} = 0$$

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Ce qu'est une relation constitutive
- ❷ Définir la linéarité, l'isotropie, la dispersion et la localité
- ❸ D'où vient la dispersion
- ❹ Ce que représente la constante diélectrique généralisée
- ❺ Écrire les équations de Maxwell dans la matière (en utilisant la constante diélectrique généralisée)
- ❻ Trouver ou retrouver une constante diélectrique à partir d'un modèle simple

Compléments du chapitre 6

6A. Complément A

Pourquoi peut-on traiter classiquement le mouvement de l'électron ?

6A.1. Le théorème d'Ehrenfest

Le théorème d'Ehrenfest explicite le passage à la limite de la mécanique quantique. Il fournit une expression de la dérivée temporelle de la position moyenne d'une particule ainsi que de la dérivée temporelle de l'impulsion de la particule. Les valeurs moyennes sont définies par rapport à la fonction d'onde qui décrit la particule.

$$\frac{d\langle\Psi|X|\Psi\rangle}{dt} = \frac{\langle\Psi|P_x|\Psi\rangle}{m} \quad (6A.1)$$

$$\frac{d\langle\Psi|P_x|\Psi\rangle}{dt} = \langle\Psi| -\frac{dV}{dx}|\Psi\rangle \quad (6A.2)$$

Ces équations montrent que la valeur moyenne de la position obéit à une équation analogue à l'équation de la mécanique classique :

$$m\frac{d^2\langle\Psi|X|\Psi\rangle}{dt^2} = \langle\Psi| -\frac{dV}{dx}|\Psi\rangle \quad (6A.3)$$

Ceci est vrai à une différence près : c'est la valeur moyenne du gradient du potentiel et non pas la valeur du gradient en $\langle\Psi|X|\Psi\rangle$ qui intervient.

6A.2. Equations du mouvement d'un électron dans un métal

Un électron libre (dans un métal par exemple) a une fonction d'onde décrite par une exponentielle normalisée par intégration sur le volume V . On a donc :

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{V}} \quad (6A.4)$$

L'énergie de l'électron dans cet état est $E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$.

La densité de probabilité de présence de cet état est uniforme. L'électron décrit par cette solution est donc totalement délocalisé dans l'espace. Afin de décrire un électron qui est localisé et auquel on puisse associer une position bien définie dans l'espace ($x = \langle\Psi|X|\Psi\rangle$), on va utiliser un paquet d'ondes d'extension défini par :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \iiint c(\mathbf{k})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})d k_x d k_y d k_z \quad (6A.5)$$

On considère un électron dans un cristal dont le paramètre de maille est noté a . On va chercher quel doit être l'ordre de grandeur de l'extension spatiale minimale du paquet d'ondes si l'on veut décrire un électron de vecteur d'onde (et donc d'énergie) bien défini.

Si Δk_x est l'extension de la fonction $c(\mathbf{k})$ suivant la direction k_x alors l'extension Δx du paquet d'ondes est supérieure à $2\pi/\Delta k_x$. Par ailleurs, pour que l'énergie soit bien définie, il faut que Δk_x soit très petite devant k_x .

On peut montrer en physique du solide que k_x varie dans un intervalle de largeur $\frac{2\pi}{a}$ (en 1D), il faut donc que l'extension Δk_x satisfasse à la condition $\Delta k_x \ll \pi/a$. Il en résulte que l'extension spatiale du paquet d'ondes doit être très grande par rapport à la maille élémentaire. L'électron n'est donc pas localisé dans une maille (atome).

Pour que la mécanique classique puisse s'appliquer, il faut que l'extension spatiale du paquet d'ondes soit petite devant les échelles de variation du potentiel. Il faut donc que le potentiel décrivant les forces extérieures, c'est-à-dire le champ électrique qui éclaire le cristal, ne varie pas appréciablement à l'échelle de quelques 10 nm (le paramètre de maille a est de l'ordre de l'Angstrom pour tous les cristaux). Dans ce cas de figure, on peut écrire :

$$\langle \Psi | -\frac{dV}{dx} | \Psi \rangle = -\frac{dV}{dx} (\langle \Psi | X | \Psi \rangle) \quad (6A.6)$$

On retrouve donc la relation fondamentale de la dynamique pour l'électron en $x = \langle \Psi | X | \Psi \rangle$. L'électron n'est dans ce cas pas ponctuel à proprement parler, mais délocalisé sur un volume dont la taille caractéristique est très petite devant la longueur d'onde. Cela est largement satisfait pour les ondes lumineuses visibles (longueur d'onde de l'ordre de $0,5\mu m$).

6B. Complément B

Modèle de l'électron élastiquement lié

Le but de cette étude est d'établir un modèle permettant de calculer le moment dipolaire induit d'un atome. On raisonne sur un électron particulier occupant un état quantique donné. Afin de décrire son mouvement, on utilise le potentiel $V(r)$ supposé à symétrie sphérique. L'électron est "au voisinage" de r_{eq} qui correspond à la position où le potentiel est minimum $V_{min} = V(r_{eq})$. Notons que si l'on considère un électron différent, occupant un autre état quantique, le potentiel $V(r)$ est différent.

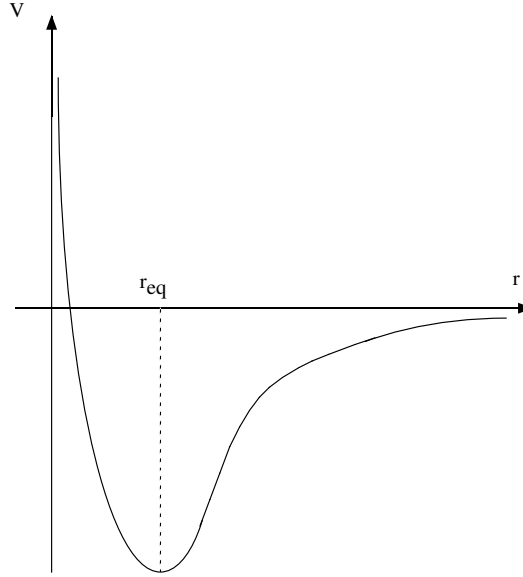


FIGURE 6.2. –

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'expression du potentiel est exacte, mais pour tout autre atome on l'approxime par un potentiel effectif moyen qui inclut un effet d'écrantage du noyau par les autres électrons. C'est l'approximation des électrons indépendants.

On suppose que l'on peut utiliser la mécanique quantique pour étudier la "trajectoire" de l'électron. On obtient ainsi :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{grad} V(r) - m\nu \mathbf{v} - \mathbf{E}_{micro} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) - \omega t]} - e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_{micro} e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) - \omega t]} \quad (6B.7)$$

où $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ est le champ électromagnétique d'une onde se propageant dans la vapeur atomique, et où $-m\nu \mathbf{v}$ est un terme qui permet de décrire la perte d'énergie due aux phénomènes de collisions ou aux pertes par rayonnement.

Au niveau de l'étude microscopique, *ce terme n'a pas de signification physique simple*. Il permet d'introduire dans le modèle un terme dissipatif qui prend tout son sens, en bout de course, sur les quantités microscopiques.

6B.1. Hypothèses simplificatrices

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)$ apparaît dans l'expression de la phase du champ. Pour une longueur d'onde dans le visible ou l'infrarouge et une amplitude du mouvement de l'ordre de 10^{-10}m , la fluctuation de la phase est très inférieure à 1 :

$$\Delta\varphi \approx 2\pi \frac{10^{-10}}{10^{-6}} = 2\pi 10^{-4} \ll 1$$

On fait alors l'approximation $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)} \approx 1$.

Le terme $e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ est négligeable devant $e\mathbf{E}$ puisque

$$|\mathbf{B}| \approx \left| \frac{\mathbf{E}}{c} \right| \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}}{E} \right| \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

sauf si l'électron est relativiste...

L'amplitude du mouvement induit par le champ externe est très faible car les champs externes que l'on sait faire sont généralement très faibles devant les champs intramoléculaires. Ainsi, le champ électrique d'un laser de 1 mW ayant un spot de 5mm est donné par :

$$\epsilon_0 c E^2 \Delta S = 10^{-3} \text{W} \Rightarrow E \approx 16 \text{Vm}^{-1}$$

Pour estimer les champs intramoléculaires, on peut les assimiler au champ électrostatique.

$$E_{\text{intra}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad \text{avec} \quad a \approx 10^{-10} \text{m} \quad \text{d'où} \quad E_{\text{intra}} \approx 1,5 \cdot 10^{10} \text{Vm}^{-1}$$

6B.2. Conclusions

Le champ extérieur est une très faible perturbation ce qui permet de considérer que :

- le mouvement $\mathbf{r}(t)$ est sensiblement le mouvement en l'absence de la perturbation auquel il faut ajouter une correction $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)$
- le potentiel $V(r)$ peut être développé au voisinage de r_{eq} .

Etude de $\mathbf{r}(t)$

(i) Développement du potentiel au voisinage de r_{eq}

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r_{eq}) + (r - r_{eq}) \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r_{eq}} + \frac{1}{2} (r - r_{eq})^2 \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{min}} \\ &= V(r_{eq}) + \frac{1}{2} (r - r_{eq})^2 \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{min}} \end{aligned} \quad (6B.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\mathbf{grad}V(r) \\ &= - \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{eq}} (r - r_{min}) \mathbf{u}_r \\ &= -m\omega_0^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{min}) \end{aligned} \quad (6B.9)$$

En posant

$$m\omega_0^2 = \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{min}} \quad (6B.10)$$

(ii) Mise en équation

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{eq}) - m\nu \mathbf{v} - e\mathbf{E} \quad (6B.11)$$

On pose $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)$, d'où :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = -m\omega_0^2 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{eq}) - m\nu \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \quad (6B.12)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}_1 - m\nu \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - e\mathbf{E} \quad (6B.13)$$

La première équation décrit le mouvement de l'électron en l'absence de champ. Elle est complètement fautive puisque pour résoudre ce problème il faut faire de la mécanique quantique !!

La seconde équation décrit l'évolution de $\mathbf{r}_1$ qui seul contribue au moment dipolaire induit. On voit apparaître la force de rappel élastique du modèle de Thomson. Cette équation, obtenue dans le cadre de la mécanique classique, peut être retrouvée à l'aide de la mécanique quantique grâce au théorème d'Ehrenfest (voir Complément 6A ou Cohen-Tannoudji Chap XIII, B-XIII).

(iii) Résolution classique

On obtient aisément l'amplitude du mouvement de l'électron en régime permanent.

$$\mathbf{r}_1(\omega) = \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\nu\omega} \quad (6B.14)$$

et $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$

Soit n_0 le nombre de particules par unité de volume :

$$\mathbf{P} = n_0 \langle \mathbf{p} \rangle = -\frac{n_0 e^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\nu\omega} \quad (6B.15)$$

Or $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$, donc :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{n_0 e^2}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\nu\omega} \quad (6B.16)$$

En posant $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}$, on obtient :

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2\omega^2} + i \frac{\nu\omega\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2\omega^2} \quad (6B.17)$$

Remarque 1 :

Si $\nu = 0$, alors il n'y a pas de dissipation d'énergie et $\text{Im}[\epsilon_r(\omega)] = \epsilon''(\omega) = 0$. En effet, la puissance dissipée est donnée par $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$ et est proportionnelle à $\epsilon''(\omega)$.

Remarque 2 :

Ce modèle est proche de celui des électrons libres. On le retrouve en "libérant" les électrons, c'est à dire en supprimant la force de rappel élastique qui provient du potentiel. Si $V(r) = 0$, alors $\omega_0 = 0$ et

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega}$$

Les modèles se ressemblent parce que dans les deux cas, on ne s'intéresse qu'au mouvement perturbatif des électrons, négligeant tous les autres effets plus fins qui sont radicalement différents.

6B.3. Non-linéarité

Au voisinage d'une position d'équilibre $\mathbf{r}_{eq}$, le potentiel peut être approximé par une fonction parabolique $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$. C'est ce que l'on peut voir sur la figure suivante.

Nous venons de voir que dans le cadre d'un modèle classique, l'électron soumis au champ électromagnétique aura alors un mouvement donné par l'équation :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} - m\gamma \dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{E}_{inc} e^{i(\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

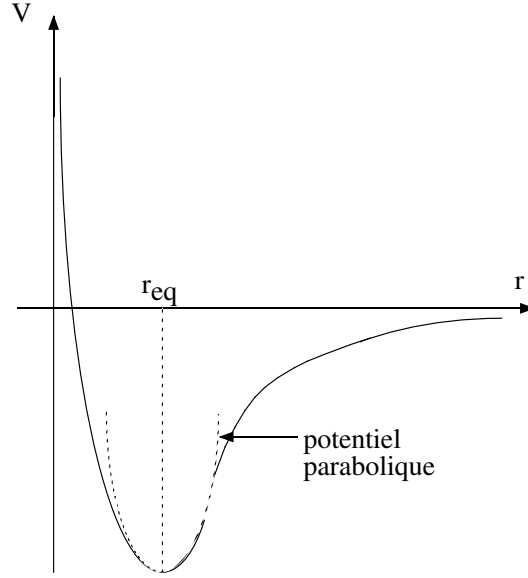


FIGURE 6.3. – *Approximation parabolique du potentiel*

où γ rend compte des pertes énergétiques par rayonnement. Lorsque $\mathbf{E}_{inc}$ augmente, l'amplitude du mouvement de l'électron augmente de sorte que l'approximation parabolique du potentiel n'est plus correcte. Si on considère alors un potentiel de la forme $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 + m\omega_0^2 \frac{r^3}{3r_0}$, l'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} - m\omega_0^2 r^2 \frac{\mathbf{e}_r}{r_0} - m\gamma \dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{E}_{inc} e^{i(\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

et la force dite de "rappel" n'est plus linéaire.

6C. Complément C

Le but de cette étude est la modélisation des interactions entre un cristal ionique et le rayonnement visible ou infrarouge. Pour ce faire, nous allons d'abord étudier dans le cadre de la mécanique classique le mouvement des ions. Nous considérerons par la suite les modes de vibration susceptibles d'être couplés au rayonnement et, par conséquent, de donner lieu à des phénomènes d'absorption et de dispersion.

On assimile un cristal de NaCl à une série de chaînes d'ions parallèles entre elles. Chaque chaîne est constituée d'ions Na^+ de masse m_+ et de charge $+q$ ainsi que d'ions Cl^- de masse m_- et de charge $-q$ situés respectivement aux points d'abscisses $x_{2n} = 2na$ et $x_{2n+1} = (2n+1)a$ où n est un entier. Les interactions entre l'ion n et les autres ions sont décrites par une énergie potentielle approchée

$$V(\mathbf{r}_n) = \frac{1}{2}C [(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1})^2 + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n+1})^2]$$

où $\mathbf{r}_n$ est le déplacement de l'ion n par rapport à sa position d'équilibre.

Le but de cette première partie est l'étude de la constante diélectrique du cristal, ce qui nécessite une modélisation de sa polarisabilité. Avant d'étudier la réponse du cristal à un champ électrique incident, nous allons étudier son comportement dynamique en régime libre ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$) afin de mettre en évidence les fréquences propres du cristal.

On cherche les solutions sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{2n} &= \mathbf{r}_+ \exp[i(kx_{2n} - \omega t)] \\ \mathbf{r}_{2n+1} &= \mathbf{r}_- \exp[i(kx_{2n+1} - \omega t)]\end{aligned}$$

La résolution complète du système couplé permet d'obtenir les ondes de vibration élastique qui se propagent dans le solide (Cf. PC 8). On peut ainsi retrouver la vitesse des ondes acoustiques (vitesse du son). Dans ce qui suit, nous nous intéressons uniquement aux modes de vibration susceptibles d'interagir avec les ondes lumineuses. Ce sont donc les modes de vibration pour lesquels les mouvements des charges font apparaître des dipôles élémentaires dans chaque maille du réseau.

Par ailleurs, on s'intéresse à des longueurs d'onde visible ou infrarouge très grandes devant la taille de la maille a . On peut alors se restreindre à l'étude de $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ dans la limite $k = 0$.

À partir des équations du mouvement suivantes

$$\begin{aligned}m_+ \frac{d^2 \mathbf{r}_{2n}}{dt^2} &= -C[2\mathbf{r}_{2n} - \mathbf{r}_{2n-1} - \mathbf{r}_{2n+1}] \\ m_- \frac{d^2 \mathbf{r}_{2n+1}}{dt^2} &= -C[2\mathbf{r}_{2n+1} - \mathbf{r}_{2n} - \mathbf{r}_{2n+2}] \\ -m_+ \omega^2 \mathbf{r}_+ &= -C[2\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- e^{-ika} - \mathbf{r}_- e^{ika}] \\ -m_- \omega^2 \mathbf{r}_- &= -C[2\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+ e^{-ika} - \mathbf{r}_+ e^{ika}]\end{aligned}$$

on obtient pour $k = 0$:

$$\begin{aligned}-m_+ \omega^2 \mathbf{r}_+ &= -2C[\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-] \\ -m_- \omega^2 \mathbf{r}_- &= -2C[\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+]\end{aligned}$$

d'où

$$-\omega^2(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -2C \left[\frac{1}{m_+} + \frac{1}{m_-} \right] (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$$

On obtient ainsi un mode collectif de vibration de pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{2C}{\mu}}$. On doit s'attendre à ce que cette pulsation joue un rôle analogue à celui que joue la pulsation caractéristique du mode de vibration d'une molécule diatomique.²

On étudie maintenant la polarisabilité du cristal. On suppose qu'une onde lumineuse, située dans le visible ou le proche infrarouge, se propage dans le cristal. Son champ électrique est donné par la relation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_i \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \}$$

Dans un milieu condensé, il est incorrect de considérer que le champ éclairant un atome est le champ moyen. Il faut en fait retrancher du champ moyen la contribution de l'atome qui vaut $-\mathbf{P}/3\epsilon_0$. On obtient alors ce que l'on appelle le champ local qui s'écrit :

$$\mathbf{E}_{loc}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

De ce fait, le champ local est également de la forme

$$\mathbf{E}_{loc}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}_{loc} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \}$$

Nous allons calculer l'expression du dipôle électrique d'une maille de la chaîne en fonction du champ local. On notera que les variations spatiales du champ électrique sont négligeables à l'échelle d'une maille du réseau.

Pour une maille, le dipôle électrique induit par le mode optique au centre de la zone de Brillouin est

$$\mathbf{p} = q_+ \mathbf{r}_+ + q_- \mathbf{r}_- = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \quad (6C.1)$$

$$\begin{aligned} -m_+ \omega^2 \mathbf{r}_+ &= -2C[\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-] + q\mathbf{E}_{loc} \\ -m_- \omega^2 \mathbf{r}_- &= -2C[\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+] - q\mathbf{E}_{loc} \end{aligned} \quad (6C.2)$$

D'où,

$$\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = -\frac{q\mathbf{E}_{loc}}{\mu} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (6C.3)$$

Soit :

$$\mathbf{p} = -\frac{q^2}{\mu} \frac{\mathbf{E}_{loc}}{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (6C.4)$$

On introduit maintenant une contribution supplémentaire : les ions ont eux même un moment dipolaire lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique. On écrit pour cela la polarisabilité atomique des ions α_+ et α_- et l'on admet que l'on peut simplement ajouter les différentes contributions.

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N \left[\epsilon_0 \alpha_+ + \epsilon_0 \alpha_- - \frac{q^2}{\mu} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2} \right] \mathbf{E}_{loc} \quad (6C.5)$$

Le champ local calculé dans le modèle de Lorentz vaut $\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$. Par ailleurs, $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$, d'où

$$\frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2} = \frac{N}{3\epsilon_0} \left[\epsilon_0 \alpha_+ + \epsilon_0 \alpha_- - \frac{q^2}{\mu} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2} \right] \quad (6C.6)$$

2. La pulsation de vibration d'une molécule diatomique, c'est-à-dire du motif isolé, qui est égale à $\sqrt{\frac{C}{\mu}}$ est différente de ω_p qui correspond au mouvement collectif des atomes de la chaîne.

On peut éliminer $\frac{N}{3}(\alpha_+ + \alpha_-)$ et $\frac{N}{3\epsilon_0} \frac{q^2}{\mu\omega_p^2}$ du système précédent et les exprimer en fonction de ϵ_∞ et ϵ_s pour aboutir à l'expression du texte. En résolvant par rapport à $\epsilon(\omega)$, on obtient :

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{\omega_T^2 - \omega^2} \omega_T^2 \quad (6C.7)$$

avec $\omega_T^2 = \omega_p^2 \frac{\epsilon_\infty + 2}{\epsilon_s + 2}$.

En négligeant la correction de champ local, on obtiendrait :

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty \frac{\omega^2 - \omega_p^2 \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_\infty} \right)}{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (6C.8)$$

La constante diélectrique présenterait alors une fréquence de résonance ω_p^2 . Du fait de la correction de champ local, c'est-à-dire de la prise en compte des interactions avec le milieu environnant, ou encore du comportement collectif, la résonance est légèrement décalée et a lieu en $\omega = \omega_T$. La mesure de ϵ_∞ correspond à la mesure de l'indice $n(\infty) = \sqrt{\epsilon_\infty}$ et celle de ϵ_s à la mesure de la constante diélectrique statique.

Soulignons que nous avons utilisé un modèle microscopique, incluant des paramètres microscopiques inconnus : α_+ , α_- , μ ; le modèle permettant d'effectuer le passage du microscopique au macroscopique et les paramètres inconnus ont pu être déterminés à l'aide de quantités macroscopiques aisément mesurables telles que ϵ_s et ϵ_∞ .

7. Propagation dans la matière

DANS ce chapitre, nous allons examiner comment une onde électromagnétique se propage dans un milieu matériel homogène. D'un point de vue microscopique, un champ exciteur induit un mouvement des charges de la matière. On crée ainsi une densité de courant qui elle-même va rayonner un champ électromagnétique. Le champ total dans la matière (et à l'extérieur) est la superposition de ce champ rayonné et du champ incident. On peut par exemple décrire le phénomène de faible pénétration d'une onde dans un métal avec ce type d'approche : les courants induits au voisinage de l'interface rayonnent une onde qui interfère destructivement avec le champ incident.

Dans ce chapitre, nous adopterons une démarche purement macroscopique, qui contient (mais cache) le modèle microscopique. Nous utiliserons les relations constitutives pour établir les équations de propagation en milieu matériel. On pourra alors mettre en évidence les effets d'absorption (c'est-à-dire de conversion d'énergie électromagnétique en chaleur), d'atténuation d'une onde et de dispersion. On verra également comment la relation de dispersion permet de rendre compte de ces effets.

7.1. Cas Particulier : Propagation en milieu non-dispersif

Il est parfois possible de négliger la dispersion de la matière pour des ondes électromagnétiques, en général dans le cas "basse-fréquence". En pratique, cela correspond à un domaine de fréquences inférieures à 1 GHz environ, bien loin du domaine optique ! Plus précisément, pour un matériau donné, c'est le domaine des fréquences inférieures aux fréquences de résonances d'absorption de ce milieu.

7.1.1. Modèle

Le milieu est supposé linéaire, homogène et isotrope. S'il est non dispersif, il est décrit par les relations constitutives qui ne dépendent pas de la fréquence :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (7.3)$$

où ϵ_r , μ_r et la conductivité σ sont supposés constants dans la gamme de fréquence étudiée.

7.1.2. Équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$

Dans l'hypothèse où le milieu est neutre, l'équation de Maxwell-Gauss donne $\text{div} \mathbf{D} = 0$. Pour un milieu homogène et isotrope, on en déduit $\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \text{div}(\mathbf{E}) = 0$. On a donc deux solutions possibles de cette équation : soit $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ qui correspond à un champ transverse ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$), soit $\epsilon_r(\omega) = 0$ et une solution avec un champ longitudinal est possible ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$). On ne considère que la solution transverse dans ce qui suit. Les équations de Maxwell couplant $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ permettent d'écrire :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{B}) \\ \text{grad}(\text{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} &= \mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ \Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Cette équation est appelée équation des télégraphistes.

La vitesse de phase v de l'onde électromagnétique dépend des caractéristiques du milieu : $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$.

Le second membre, qui différencie cette équation de l'équation de propagation, est lié à l'existence de pertes par effet Joule dans le milieu.

7.2. Cas Général : Équation de propagation en milieu dispersif

7.2.1. Modèle

Dans le cas de la propagation d'ondes optiques ou infrarouge par exemple, il est souvent nécessaire de prendre en compte la dispersion. De façon plus générale, cela est nécessaire dès que l'on considère des milieux qui absorbent. En effet, les relations de Kramers-Krönig montrent que les milieux qui absorbent sont nécessairement dispersifs. Les relations constitutives que nous avons utilisées plus haut ne sont plus correctes. Les équations (7.1) et (7.2) reliant $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ d'une part, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ d'autre part, ont alors la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \int G_\epsilon(t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int G_\sigma(t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'\end{aligned}$$

Dans le cas d'un milieu stationnaire¹, la fonction réponse linéaire G la plus générale est telle que G est une fonction de $t - t'$ seulement. La relation ci-dessus se ramène alors à un produit de convolution :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \int G_\epsilon(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \int G_\sigma(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'\end{aligned}$$

La difficulté d'utiliser de telles relations conduit naturellement à travailler dans l'espace de Fourier. En effet, les transformées de Fourier par rapport au temps des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont simplement reliées par :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (7.5)$$

Ainsi, les produits de convolution deviennent des produits dans l'espace des fréquences. On va donc cesser de travailler avec des champs dépendant du temps pour travailler avec leurs transformées de Fourier. Il faut donc déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ qui remplace l'équation de propagation satisfaite par $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

7.2.2. Équation de Helmholtz : Équation de propagation en régime monochromatique

Les équations de Maxwell peuvent être réécrites pour les transformées de Fourier des champs. Par exemple,

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega).$$

En pratique, il suffit de remplacer une dérivée partielle par rapport au temps par un produit par $-i\omega$, et de substituer $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ par $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. Dans l'espace des fréquences, l'équation (7.4) s'écrit :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mu_0 \mu_r(\omega) \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (7.6)$$

1. Un milieu instationnaire est décrit par un indice dépendant du temps. C'est par exemple un milieu traversé par une onde acoustique, une suspension de particules agitées par le mouvement Brownien, l'atmosphère, etc. . .

On peut mettre cette équation sous la forme d'une équation d'Helmholtz

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (7.7)$$

en introduisant la constante généralisée $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r(\omega) + \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega}$ qui rend compte à la fois du phénomène de polarisation et de la conduction par les charges libres du milieu. En posant $n^2(\omega) = \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)$, on obtient :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (7.8)$$

On peut faire trois remarques importantes ici :

- i) On peut retrouver l'équation précédente en utilisant les équations de Maxwell dans la matière, prenant en compte directement la constante diélectrique généralisée (fin du chapitre 6).
- ii) À cause du produit $n^2(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, il est difficile d'écrire l'équivalent de cette équation dans l'espace direct : elle mettrait en jeu un produit de convolution.
- iii) On sait que $\epsilon_r(\omega)$ est généralement complexe. Il s'ensuit que l'indice est généralement complexe.

7.3. Propagation dans un milieu matériel

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\mathbf{E}$ s'écrit :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Cherchons la solution en 1D sous la forme $\mathbf{E} = E(x, \omega) \mathbf{e}_y$. Elle vérifie alors :

$$\frac{\partial^2 E(x, \omega)}{\partial x^2} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} E(x, \omega) = 0$$

qui a pour solution $E(x, \omega) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ avec

$$k^2 = n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (7.9)$$

Ceci est la relation de dispersion pour un milieu isotrope, homogène, dispersif et local. L'indice du milieu étant complexe, le vecteur d'onde le sera aussi.

Si on se limite à l'onde se propageant dans le sens des x croissants,

$$\begin{aligned} E(x, \omega) &= A e^{i(n' + in'') \frac{\omega}{c} x} \\ &= A e^{in'(\omega) \frac{\omega}{c} x} e^{-n''(\omega) \frac{2\pi}{\lambda_0} x} \end{aligned}$$

Il faut alors choisir la partie imaginaire de n positive : $n'' > 0$ pour assurer la décroissance de l'onde au fur et à mesure de sa propagation (avec l'autre convention $E \propto e^{i\omega t}$, l'onde se propagerait dans le sens des x décroissants et il faudrait choisir $n'' < 0$).

Signification des parties réelle et imaginaire de n :

- i) La partie réelle de n est reliée à la vitesse de phase de l'onde $v_\varphi = \frac{c}{n'(\omega)}$.
- ii) La partie imaginaire de n donne l'atténuation de l'onde : $E \propto e^{-x/\delta}$. La longueur caractéristique de la décroissance est donnée par

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n''(\omega)},$$

λ_0 étant la longueur d'onde dans le vide. Cette décroissance peut être due soit aux *pertes* dans le milieu soit à la *réflexion* de l'onde.

Supposons $n = 1.5 + i10^{-3}$. La partie imaginaire de n semble très petite comparée à la partie réelle. Néanmoins, comparer n'' à n' n'a pas de sens. Il faut comparer l'épaisseur du milieu à la longueur de décroissance de l'onde. Cette longueur est souvent appelée profondeur de peau dans le cas des métaux.

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n''(\omega)} \approx \frac{5 \cdot 10^{-7}}{10 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 50 \mu\text{m}$$

Ce milieu est donc opaque pour une épaisseur de $200 \mu\text{m}$! Il apparaît donc que, dans le visible, $\text{Im}[n] = 10^{-3}$ est une valeur très grande.

7.4. Discussion de la propagation dans l'espace réciproque

Les équations de Maxwell couplant les champs électriques et magnétiques peuvent s'écrire dans l'espace des vecteurs d'onde :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = \mu_0 \mu_r \omega \mathbf{H} \\ \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \Rightarrow \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{H} = -\epsilon_0 \epsilon_r \omega \mathbf{E} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) &= -\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \omega^2 \mathbf{E} \\ \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Cette équation contient à la fois les solutions où le champ $\mathbf{E}$ est transverse et celles où il est longitudinal. En multipliant scalairement l'équation par $\mathbf{k}$, nous allons sélectionner les solutions *longitudinales*.

$$0 = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$$

Si $\mathbf{E}_{//} \neq 0$ alors il faut $\epsilon_r(\omega) = 0$ ou $\mu_r(\omega) = 0$. Ces équations constituent alors les relations de dispersion pour les ondes longitudinales.

Les solutions *transverses* sont caractérisées par $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{E} = 0$. L'équation (7.10) devient alors :

$$\mathbf{E}_\perp [k^2 - \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}] = 0$$

Dans ce cas, la relation de dispersion est donnée par :

$$k^2 = \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$$

C'est celle que l'on a obtenue au paragraphe 3. La solution longitudinale avait été éliminée par l'hypothèse $\text{div} \mathbf{E} = 0$ qui est faite en passant de $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E})$ à $-\Delta \mathbf{E}$.

7.5. Aspects énergétiques

7.5.1. Puissance échangée entre le champ et la matière

Le champ électromagnétique contient de l'énergie. La puissance des efforts du champ sur une distribution de charges microscopique est aisée à calculer. On part de la définition habituelle du travail d'une force. Dans le cas d'une seule charge q , on obtient :

$$W_{\text{CEM} \rightarrow \text{matière}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (7.11)$$

Le champ magnétique donne lieu à une force qui est perpendiculaire à la vitesse de sorte qu'elle ne travaille pas. Dans le cas d'une distribution de N charges microscopiques, on obtient :

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = \int \mathbf{j}_{\text{micro}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (7.12)$$

Nous admettrons que cette expression reste valable après passage aux champs et densité de courant moyens. Le travail effectué par les forces électromagnétiques sur la matière par unité de temps et de volume est alors donnée par

$$\frac{\partial W}{\partial V} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (7.13)$$

7.5.2. Puissance moyenne absorbée

Nous pouvons maintenant calculer la puissance absorbée par unité de volume dans un milieu matériel non magnétique en moyenne temporelle. Nous choisissons tout d'abord de décrire le milieu par une conductivité équivalente $\sigma(\omega)$. On obtient alors :

$$\mathcal{P} = \left\langle \frac{\partial W}{\partial V} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{\operatorname{Re}(\sigma)}{2} |\mathbf{E}|^2, \quad (7.14)$$

On retrouve ainsi la forme habituelle de l'effet Joule sous sa forme locale. En choisissant de décrire les propriétés de la matière à l'aide d'une constante diélectrique, on obtient une forme légèrement différente. Le courant s'exprime en fonction de la polarisation par $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ de sorte que $\mathbf{j} = -i\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$. On obtient finalement :

$$\mathcal{P} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \operatorname{Im}(\epsilon_r) |\mathbf{E}|^2. \quad (7.15)$$

C'est cette expression qui fournit par exemple la puissance dissipée par unité de volume dans une tasse de thé placée dans un four à micro-ondes.

7.5.3. Bilan d'énergie

Il est possible d'obtenir une forme locale de la conservation de l'énergie électromagnétique en partant de l'équation de Maxwell-Ampère et en faisant apparaître le terme de puissance cédée à la matière :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.16)$$

Dans cette écriture, nous considérons que le courant $\mathbf{j}_{\text{ext}}$ est un courant imposé de l'extérieur du système. C'est par exemple le courant qui circule dans une antenne du fait de la tension appliquée par un générateur. Nous conviendrons que le terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ contient quant à lui l'ensemble des courants induits dans la matière, qu'ils soient dus à des charges libres ou à des charges de polarisation. En prenant le produit scalaire de cette équation avec le champ électrique, nous obtenons :

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{ext}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (7.17)$$

Il est alors utile d'utiliser l'identité $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$ pour obtenir :

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{ext}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (7.18)$$

Finalement, en remplaçant $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ par $\partial \mathbf{B} / \partial t$, on obtient l'équation :

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E} - \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (7.19)$$

Cette équation peut s'interpréter comme une équation de conservation locale de l'énergie. Le premier terme de droite correspond à l'énergie apportée par les courants extérieurs. Le second décrit l'énergie rayonnée qui apparaît comme le flux du vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Le terme de gauche de l'égalité recouvre plusieurs contributions : les variations d'énergie du champ électromagnétique et de l'énergie potentielle stockée dans la matière d'une part, l'absorption d'autre part.

Une forme légèrement différente de cette équation est obtenue en fonction des champs électriques et magnétiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) = -\mathbf{j}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (7.20)$$

Cette dernière équation peut s'interpréter de la façon suivante : le terme de gauche représente la densité d'énergie associée au champ électromagnétique dans la matière. Le terme $-\mathbf{j}_{ext} \cdot \mathbf{E}$ représente l'énergie fournie au champ par le courant extérieur, les deux termes $-\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ représentent l'énergie cédée par le champ à la matière. Cette énergie peut être soit de l'énergie emmagasinée par la matière sous forme d'énergie potentielle, soit de l'énergie dissipée en chaleur². Enfin, le dernier terme est la divergence du vecteur de Poynting qui décrit l'énergie rayonnée.

Dans le cas d'un régime monochromatique permanent, le bilan d'énergie se simplifie. En effet, l'énergie emmagasinée dans le cristal n'apparaît plus dans le bilan en régime stationnaire. De même, le taux de variation de l'énergie électromagnétique est nul. L'équation de conservation de l'énergie se ramène alors à :

$$\langle -\mathbf{j}_{ext} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathcal{P}_{abs} \rangle + \text{div}(\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle). \quad (7.21)$$

où les crochets désignent une moyenne temporelle. Le membre de gauche représente l'énergie cédée par les sources extérieures au champ. Le bilan montre ainsi que la puissance par unité de volume est égale à la somme de ce qui est absorbé et de ce qui est rayonné. En l'absence de courant extérieur, l'équation de conservation de l'énergie se met sous la forme :

$$0 = \langle \mathcal{P}_{abs} \rangle + \text{div}(\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle). \quad (7.22)$$

où le terme d'absorption est donné par :

$$\langle \mathcal{P}_{abs} \rangle = \langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle = \frac{\omega \epsilon_0 \text{Im}(\epsilon_r)}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\omega \text{Im}(\mu_r)}{2 |\mu_r|^2 \mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (7.23)$$

Le premier terme décrit les pertes diélectriques ainsi que l'effet Joule puisque nous n'avons pas séparé les contributions des charges libres de celles des charges de polarisation. Le second terme décrit les pertes magnétiques.

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Écrire les transformées de Fourier des champs
- ❷ Retrouver la propagation en milieu dispersif et l'équation de Helmholtz
- ❸ Calculer la puissance moyenne absorbée et faire un bilan d'énergie
- ❹ Distinguer l'atténuation et l'absorption
- ❺ La signification physique des parties réelles et imaginaires de l'indice et de la constante diélectrique

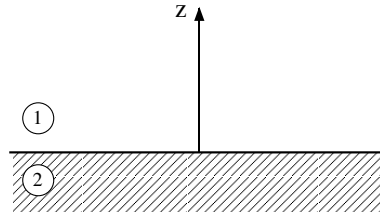
2. Imaginons que l'on éclaire un cristal ionique avec une onde infrarouge dont la fréquence coïncide avec un phonon optique. Une partie de l'énergie de l'onde va servir à exciter le phonon optique et sera donc emmagasinée sous forme d'énergie potentielle et cinétique dans la matière. Une autre partie de l'énergie de l'onde sera dissipée dans le cristal du fait des collisions phonon-phonon. Cette énergie est également associée à de l'énergie cinétique et potentielle des atomes du cristal mais il s'agit de l'énergie associée aux fluctuations des mouvements des atomes que l'on appelle chaleur.

8. Réflexion, réfraction

8.1. Introduction

Le mécanisme à l'origine de la réflexion peut être décrit de la façon suivante : l'onde incidente met en mouvement les charges du milieu éclairé et celles-ci deviennent sources d'un rayonnement secondaire. L'onde rayonnée vers l'arrière est l'onde réfléchie. La superposition de l'onde incidente et de l'onde rayonnée vers l'avant correspond à l'onde dite transmise. Ce problème peut donc être traité en utilisant la théorie du rayonnement. Dans le cas de géométries simples telles que deux demi-espaces séparés par une interface, il est plus simple de procéder à la résolution des équations différentielles vérifiées par les champs compte tenu des conditions aux limites.

Dans ce qui suit, nous allons travailler avec des indices complexes. Afin d'éviter l'introduction d'angles complexes, nous travaillerons avec les composantes complexes des vecteurs d'onde. On pourra alors traiter avec le même formalisme les diélectriques, les métaux et le cas des ondes évanescentes. On pourra notamment en déduire l'émissivité et l'absorptivité d'un corps.



Considérons l'interface représentée sur la figure ci-dessus. L'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} + \epsilon_r(\omega, z) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (8.1)$$

peut être décomposée en deux parties :

$$\Delta \mathbf{E}_1 + \epsilon_{r1}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 = 0 \quad z > 0 \quad (8.2)$$

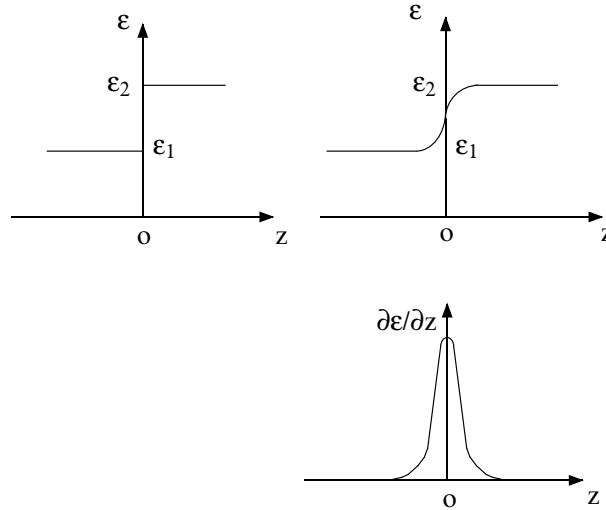
$$\Delta \mathbf{E}_2 + \epsilon_{r2}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_2 = 0 \quad z < 0 \quad (8.3)$$

et résolue en tenant compte

- i) des conditions aux limites en $z \rightarrow \pm\infty$
- ii) des relations de continuité en $z = 0$.

8.2. Relations de continuité

Les relations de continuité (ou relations de passage) *se déduisent des équations de Maxwell*. Avant d'introduire une technique générale de recherche de ces conditions, précisons les notations du problème : le plan $\mathcal{P}$ dont la normale $\mathbf{n}$ est confondue avec $\mathbf{e}_z$ sépare les milieux 1 et 2 de constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 . La constante diélectrique est donc discontinue en $z = 0$. Nous allons considérer dans ce qui suit que les quantités discontinues sont des limites de fonctions continues à variations très rapides. On peut alors définir la dérivée de $\epsilon(z)$ au sens des fonctions. C'est une fonction à support très petit et prenant de très grandes valeurs. Ce point de vue est schématisé sur la figure (8.1) :

FIGURE 8.1. – Fonction discontinue en $z = 0$.

On a bien sûr la relation :

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \int_{-z_0}^{+z_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} dz = \epsilon_2 - \epsilon_1$$

En revanche, la même intégrale effectuée avec un intégrande correspondant à une fonction ne présentant pas de singularité en $z = 0$ donne 0. Par exemple dans le cas ci-dessus, si les milieux 1 et 2 sont non magnétiques, ce qui est le cas la plupart du temps en optique, il n'y a pas de singularités le long de l'axe z pour la perméabilité μ .

La démarche pratique consiste donc à écrire explicitement les équations de Maxwell, puis à identifier les termes susceptibles d'avoir des singularités, par exemple $\partial X / \partial z$ si X présente une discontinuité en $z = 0$. Il reste ensuite à intégrer de $-z_0$ à $+z_0$ et à prendre la limite pour passer de $\partial X / \partial z$ à X .

Nous allons maintenant traiter les équations de Maxwell dans la matière une par une pour faire apparaître les relations de continuité des champs électromagnétiques aux interfaces. Le traitement est fait dans le cas des champs *effectifs*, c'est-à-dire que les densités de charge libre et de courant libre sont intégrées dans la constante diélectrique ϵ (voir chapitre 6).

Commençons par $\text{div} \mathbf{D} = 0$. Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

Dans cette expression, il n'existe pas de changement brutal de conditions le long des axes x et y qui pourraient induire des discontinuités pour le champ $\mathbf{D}$. Seul le terme $\partial D_z / \partial z$ pourrait présenter des singularités. D'où, après intégration de l'équation précédente autour de la singularité possible en $z = 0$:

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \int_{-z_0}^{+z_0} \frac{\partial D_z}{\partial z} dz = 0$$

On voit immédiatement que $D_{n,1} = D_{n,2}$, où l'indice n signifie composante normale¹. **Il y a conservation de la composante normale du champ $\mathbf{D}$ à une interface.** Cela implique que la composante normale du champ électrique $\mathbf{E}$ est discontinue.

L'équation $\text{div} \mathbf{B} = 0$ amène un résultat bien évidemment similaire : $B_{n,1} = B_{n,2}$. **Il y a conservation de la composante normale du champ magnétique $\mathbf{B}$ à une interface.**

L'équation $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ fait intervenir les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. En ne gardant que les termes susceptibles d'être singuliers, on en tire $-\partial E_y / \partial z = 0$ et $\partial E_x / \partial z = 0$, d'où $E_{y,1} = E_{y,2}$ et $E_{x,1} = E_{x,2}$ soit

$$\mathbf{E}_{tg,1} = \mathbf{E}_{tg,2} \quad (8.4)$$

1. Si on avait dû prendre en compte la densité de charges libres, l'équation $\text{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$ aurait amené à $D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma_{\text{libre}}$ où σ_{libre} est une densité surfacique de charge.

Il y a conservation de la composante tangentielle du champ électrique $\mathbf{E}$ à une interface. La relation est cette fois vectorielle, car il y a deux composantes tangentielles (sur x et sur y dans ce cas de figure).

La dernière équation $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ amène un résultat similaire :

$$\mathbf{H}_{tg,1} = \mathbf{H}_{tg,2} \quad (8.5)$$

Il y a conservation de la composante tangentielle du champ $\mathbf{H}$ à une interface. Pour des milieux magnétiques, cela signifie que la composante tangentielle du champ magnétique $\mathbf{B}$ est discontinue².

On peut donc finalement résumer les relations de continuité des champs à une interface :

$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tg,1} &= \mathbf{E}_{tg,2} & B_{n,1} &= B_{n,2} \\ \mathbf{H}_{tg,1} &= \mathbf{H}_{tg,2} & D_{n,1} &= D_{n,2} \end{aligned}$
--

Dans les ouvrages traitant de l'électromagnétisme, on trouvera souvent les relations faisant intervenir les densités de charges libres et de courants libres. Il faut retenir que ces relations sont utilisées la plupart du temps dans un modèle de matière simplifié. Par exemple si l'on traite du cas d'un métal "parfait". Dans ce modèle le métal est infiniment conducteur et les champs sont nuls dans le métal. Pour que cela n'implique pas des champs nuls à l'interface, on est alors obligé d'introduire la notion de densités surfaciques de charge ou de courant. Ce modèle repose sur le fait que l'épaisseur de peau d'un métal est très faible et que l'on peut considérer que les champs sont nuls au bout d'une distance de quelques dizaines de nanomètres dans le matériau.

Remarque : En utilisant les notions de distributions, on peut définir les dérivées de quantités discontinues. On obtient alors une formulation des équations de Maxwell qui fait apparaître les termes de discontinuité (Voir par exemple R. Petit, Électromagnétisme, Masson ; C. Vassallo, Théorie des guides d'ondes EM, Eyrolles).

8.3. Lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes sont une conséquence de la continuité de la phase sur l'interface.

Les champs incident, réfléchi et transmis s'écrivent dans le plan $z = 0$:

$$\begin{aligned} E_i(z=0) &= E_0 \exp i(\alpha_i x + \beta_i y) \\ E_r(z=0) &= r E_0 \exp i(\alpha_r x + \beta_r y) \\ E_t(z=0) &= t E_0 \exp i(\alpha_t x + \beta_t y) \end{aligned} \quad (8.6)$$

La continuité de E_{tg} entraîne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tg1}(z=0) &= \mathbf{E}_{tg2}(z=0) \\ E_i(z=0) + E_r(z=0) &= E_t(z=0) \\ \exp i(\alpha_i x + \beta_i y) + r \exp i(\alpha_r x + \beta_r y) &= t \exp i(\alpha_t x + \beta_t y) \end{aligned} \quad (8.7)$$

d'où :

$$t = \exp[i(\alpha_i - \alpha_t)x + i(\beta_i - \beta_t)y] + r \exp[i(\alpha_r - \alpha_t)x + i(\beta_r - \beta_t)y] \quad (8.8)$$

Ceci doit être vrai pour tout x et tout y , ce qui entraîne $\alpha_i = \alpha_r = \alpha_t$ et $\beta_i = \beta_r = \beta_t$.

Les vecteurs d'onde sont donnés sans perte de généralité par :

$$\mathbf{k}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_r = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r = 0 \\ \gamma_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_t = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t = 0 \\ \gamma_t \end{pmatrix}$$

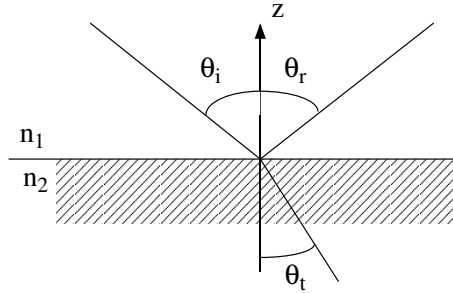


FIGURE 8.2. – Angles d'incidence de réflexion et de réfraction

où $\alpha_i = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_i$; $\alpha_r = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_r$ et $\alpha_t = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_t$. On obtient donc :

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad (8.9)$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (8.10)$$

Si l'on raisonne en termes de photons, ceci correspond à la continuité de la composante de la quantité de mouvement parallèle à l'interface. On peut montrer que cela est une conséquence de l'invariance par translation le long de Ox et Oy du système physique.

8.4. Facteur de réflexion en polarisation TE

8.4.1. Notations : polarisations TE et TM

L'interface $z = 0$ sépare deux milieux semi-infinis d'indices n_1 et n_2 a priori complexes. On note :

$$\mathbf{k}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

Le plan d'incidence est le plan défini par les vecteurs $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. La polarisation de l'onde est dite TE si le champ électrique $\mathbf{E}$ est orthogonal au plan d'incidence.

La polarisation de l'onde est dite TM si le champ magnétique $\mathbf{B}$ est orthogonal au plan d'incidence. $\mathbf{E}$ appartient alors au plan d'incidence.

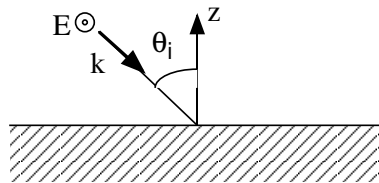


FIGURE 8.3. – Polarisation TE

D'autres dénominations sont parfois utilisées. Elles sont présentées dans le tableau ci-dessous :

TE	s	H	⊥
TM	p	V	//

En optique, on utilise habituellement les notations s et p. Dans le domaine radar, les notations sont H pour horizontal et V pour vertical.

2. Si n avait dû prendre en compte la densité de courants libres, l'équation $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ aurait amené à $\mathbf{H}_{tg,1} = \mathbf{j}_{s,\text{libre}} \wedge \mathbf{n}$ où le terme $\mathbf{j}_{s,\text{libre}}$ est une densité surfacique de courant.

8.4.2. Facteurs de réflexion et de transmission

La démarche que nous allons utiliser pour déterminer les ondes réfléchies et transmises est très générale et comporte les étapes suivantes :

- i) Écriture des équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs.
- ii) Détermination de la solution générale.
- iii) Utilisation des conditions aux limites et des équations de continuité pour écrire un système linéaire.
- iv) Résolution du système donnant les facteurs de réflexion et de transmission.

Dans le cas d'une unique interface séparant les milieux 1 et 2, ces étapes sont :

i)

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E}_1 + \epsilon_{r,1} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 &= 0 \quad z > 0 \\ \Delta \mathbf{E}_2 + \epsilon_{r,2} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_2 &= 0 \quad z < 0\end{aligned}$$

ii) Le champ incident a pour amplitude complexe :

$$\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{e}_y \exp i(\alpha_i x - \gamma_i z)$$

avec $\gamma_i^2 = \epsilon_{r,1} \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_i^2$, $\text{Re}[\gamma_i] > 0$, $\text{Im}[\gamma_i] > 0$. Ce choix est conventionnel. La convention choisie ici, associée au choix conventionnel $\exp -i\omega t$ entraîne qu'une onde du type $\exp[i(\gamma z - \omega t)]$ se propage dans le sens des z croissants³.

On peut donc écrire les amplitudes complexes des champs réfléchis et transmis sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r &= r E_0 \mathbf{e}_y \exp i(\alpha_i x + \gamma_i z) \\ \mathbf{E}_t &= t E_0 \mathbf{e}_y \exp i(\alpha_i x - \gamma_t z)\end{aligned}$$

avec $\gamma_r^2 = \epsilon_{r,1} \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_i^2$, $\text{Re}[\gamma_r] > 0$, $\text{Im}[\gamma_r] > 0$ et $\gamma_t^2 = \epsilon_{r,2} \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_i^2$, $\text{Re}[\gamma_t] > 0$, $\text{Im}[\gamma_t] > 0$. L'absence d'onde incidente venant de $-\infty$ conduit à ne pas prendre d'onde en $\exp -i\gamma_t z$. L'onde incidente venant de $+\infty$ a une amplitude E_0 connue : c'est l'amplitude de l'onde en $\exp -\gamma_i z$. On a ainsi une solution générale du problème qui incorpore déjà les conditions à l'infini et les lois de Snell-Descartes.

iii) La continuité de $\mathbf{E}_{tg}$ sur le plan $z = 0$ s'écrit :

$$1 + r = t$$

Il faut bien noter que ceci n'est pas une équation de conservation de l'énergie !

Continuité de $\mathbf{H}_{tg}$:

$$B_x = \frac{1}{i\omega} (\text{rot} \mathbf{E})_x = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

La continuité de H_x entraîne donc la continuité de $\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}$, ce qui se traduit par :

$$\frac{1}{\mu_1} (-\gamma_i + \gamma_i r) = -t \frac{\gamma_t}{\mu_2}$$

3. Ces deux critères sont compatibles dans un milieu non amplificateur. En effet, on a d'une part $\text{Im}[\gamma^2] = \text{Im}[\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2] = \text{Im}[\epsilon_r] \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ et d'autre part, $\text{Im}[\gamma^2] = 2\text{Re}[\gamma]\text{Im}[\gamma]$. Donc $\text{Re}[\gamma]$ et $\text{Im}[\gamma]$ ont le même signe

On obtient ainsi un système linéaire :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = t \frac{\gamma_t}{\gamma_i} \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{cases}$$

iv) Les facteurs de réflexion et de transmission sont donnés par :

$$\begin{cases} r = \frac{\mu_2 \gamma_i - \mu_1 \gamma_t}{\mu_2 \gamma_i + \mu_1 \gamma_t} \\ t = \frac{2 \mu_2 \gamma_i}{\mu_2 \gamma_i + \mu_1 \gamma_t} \end{cases} \quad \text{ou, si } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0 \quad \begin{cases} r = \frac{\gamma_i - \gamma_t}{\gamma_i + \gamma_t} \\ t = \frac{2 \gamma_i}{\gamma_i + \gamma_t} \end{cases}$$

En général, r et t sont complexes ce qui traduit un déphasage entre le champ incident et le champ réfléchi ou transmis.

8.4.3. Cas de la réflexion totale

Supposons que le milieu 1 ait un indice réel plus élevé que celui du milieu 2. C'est le cas de la réflexion sur une interface verre-air par exemple. Si l'angle d'incidence est suffisamment grand, il y a réflexion totale. Ceci correspond à une onde transmise évanescente et un facteur de réflexion de module égal à 1.

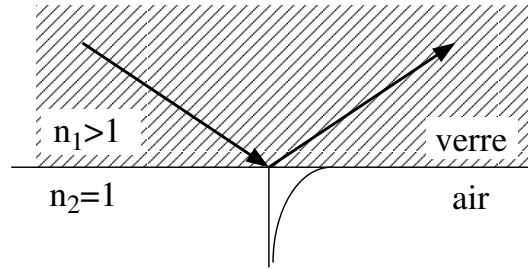


FIGURE 8.4. – Réflexion totale

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \left[\frac{\omega^2}{c^2} - n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \\ &= \frac{\omega}{c} [1 - n_1^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2} \end{aligned}$$

Lorsque $\sin \theta_i > \frac{1}{n_1}$, alors $\gamma_t = i|\gamma_t|$ est un imaginaire pur. On peut alors réécrire l'amplitude complexe du champ transmis :

$$E_t = \frac{2\gamma_i}{\gamma_i + i|\gamma_t|} E_0 \exp i\alpha_i x \exp -|\gamma_t|z \quad (8.11)$$

Le champ transmis n'est pas strictement nul dans le milieu 2 mais l'onde se propage selon Ox et son amplitude décroît selon $-Oz$ avec une longueur caractéristique $1/|\gamma_t|$.

8.5. Facteurs de réflexion en intensité

8.5.1. Définition

Les facteurs de réflexion et de transmission en intensité sont définis à partir du flux du vecteur de Poynting à travers une portion de l'interface d'aire unité par :

$$R = \frac{|\langle S_z^r \rangle|}{|\langle S_z^i \rangle|} \quad T = \frac{|\langle S_z^t \rangle|}{|\langle S_z^i \rangle|} \quad (8.12)$$

Nous allons montrer comment calculer R et T en fonction de r et t .

8.5.2. Flux du vecteur de Poynting

Dans le cas de la polarisation TE, les amplitudes complexes des champs électriques incident et réfléchi sont prises sous la forme :

$$\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{e}_y \exp i(\alpha x - \gamma_1 z)$$

$$\mathbf{E}_r = r E_0 \mathbf{e}_y \exp i(\alpha x + \gamma_1 z)$$

La composante selon z du vecteur de Poynting dans le milieu 1 a pour valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \langle S_z^{(1)} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}^* \wedge \mathbf{H}] \cdot \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[E_y^* H_x] \end{aligned}$$

En supposant le milieu non magnétique, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$, d'où :

$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

Sur l'interface $z = 0$,

$$E_y = E_0(1 + r)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\gamma_1 E_0(1 - r)$$

Les composantes selon Oz des vecteurs de Poynting s'écrivent alors :

$$\langle S_z^{(i)}(z=0) \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \operatorname{Re}[\gamma_1] \quad (8.13)$$

$$\langle S_z^{(r)}(z=0) \rangle = -\frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 |r|^2 \operatorname{Re}[\gamma_1] \quad (8.14)$$

$$\langle S_z^{(t)}(z=0) \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 |t|^2 \operatorname{Re}[\gamma_2] \quad (8.15)$$

D'où les valeurs des facteurs de réflexion et transmission en intensité :

$$R = |r|^2 \quad (8.16)$$

$$T = |t|^2 \frac{\operatorname{Re}[\gamma_2]}{\operatorname{Re}[\gamma_1]} \quad (8.17)$$

On peut remarquer que dans le cas de la réflexion totale, le champ transmis n'est pas nul mais décroît exponentiellement. En revanche, le facteur de transmission T est nul car $\operatorname{Re}(\gamma_2) = 0$.

Lorsque l'on compare les expressions de R et T , on s'aperçoit que R est simplement le facteur de réflexion en amplitude en module au carré tandis qu'un facteur supplémentaire $\operatorname{Re}[\gamma_2]/\operatorname{Re}[\gamma_1]$ apparaît dans le cas de la transmission. La figure ci-dessous illustre la variation de section d'un faisceau réfracté. Par ailleurs, la vitesse de propagation de l'énergie, ainsi que l'énergie par unité de volume dépendent de l'indice. Le facteur $\operatorname{Re}[\gamma_2]/\operatorname{Re}[\gamma_1]$ rend compte de ces trois effets liés à la différence d'indice des deux milieux.

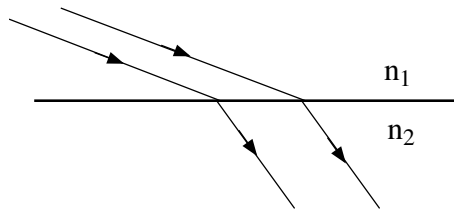


FIGURE 8.5. – Faisceau réfracté

8.5.3. Conservation de l'énergie à une interface

Pour des milieux diélectriques sans pertes, on peut constater sans difficulté que l'on a la relation $R + T = 1$. Cette relation s'interprète comme une relation de conservation de l'énergie. Cependant, il faut prendre garde à ne pas considérer que cette relation est la forme générale de la conservation de l'énergie à une interface. Bien qu'elle semble exprimer naturellement le fait que tout ce qui arrive est soit réfléchi, soit transmis, cette relation tombe en défaut dans plusieurs cas. Si la relation semble si naturelle, c'est qu'elle correspond à une vision intuitive (corpusculaire) de la lumière. Si elle tombe en défaut, c'est parce que cette vision ne prend pas en compte l'aspect ondulatoire de la lumière.

Lorsque l'on effectue un bilan d'énergie sur un volume fermé compris entre deux plans parallèles situés de part et d'autre d'une interface et séparés par une distance infiniment faible, on obtient directement la continuité du vecteur de Poynting. En notant $z = 0$ l'équation de l'interface plane, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\langle S_z^{(1)}(z = 0) \rangle = \langle S_z^{(2)}(z = 0) \rangle \quad (8.18)$$

Dans le cas d'une onde plane telle qu'on l'a décrite au paragraphe qui précède, on obtient :

$$\langle S_z^{(1)}(z = 0) \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \operatorname{Re}[(1 + r^*)(1 - r)\gamma_1] \quad (8.19)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \{ (1 - |r|^2) \operatorname{Re}[\gamma_1] + \operatorname{Re}[(r^* - r)\gamma_1] \} \quad (8.20)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \{ (1 - |r|^2) \operatorname{Re}[\gamma_1] + 2\operatorname{Im}[\gamma_1] \operatorname{Im}[r] \} \quad (8.21)$$

Nous avons mené le calcul sans faire d'hypothèses particulières sur α et γ qui peuvent être complexes. Examinons la signification de ces parties imaginaires. Si α est imaginaire, cela signifie que l'onde s'atténue lors de sa propagation suivant l'axe des x . Si γ est imaginaire, de la même façon, on a une onde qui s'atténue ou bien qui croît lorsque l'on s'éloigne de l'interface. Le premier cas correspond à une onde guidée par l'interface : on parle d'ondes de surface. Le second cas semble au premier abord non physique puisque l'onde semble croître en s'éloignant de la surface et finalement diverger à l'infini. Supposons toutefois qu'une source soit placée au-dessus de l'interface à distance finie : ce type de solution décrit alors une onde générée par la source et qui décroît en s'approchant de la surface. On a vu au chapitre 2 que la représentation générale d'un champ comporte des ondes évanescentes. Le problème de la divergence disparaît puisque cette solution ne doit être retenue que dans l'espace compris entre la source et l'interface.

L'équation (8.18) devient alors :

$$(1 - |r|^2) \operatorname{Re}[\gamma_1] + 2\operatorname{Im}[\gamma_1] \operatorname{Im}[r] = |t|^2 \operatorname{Re}[\gamma_2]$$

ce qui entraîne $R + T = 1$ seulement dans le cas où $\operatorname{Im}[\gamma_1] = 0$. La relation générale s'écrit sous la forme :

$$R + T = 1 + 2 \frac{\operatorname{Im}(\gamma_1) \operatorname{Im}(r)}{\operatorname{Re}(\gamma_1)} \quad (8.22)$$

Dans quels cas la partie imaginaire de γ_1 est-elle différente de zéro ?

1^{er} cas : S'il y a des pertes dans le milieu 1.

2^{ème} cas : En l'absence de pertes dans le milieu 1, si l'onde incidente est évanescente. Ceci correspond au cas d'une source placée au-dessus de l'interface mais également au cas de la réflexion totale.

Supposons par exemple n_1 réel et $\alpha > n_1 \frac{\omega}{c}$.

$$\gamma_1 = [n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2]^{1/2} = i|\gamma_1|$$

Dans ce cas, $\langle S_z^i(z = 0) \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \operatorname{Re}[\gamma_1] = 0$. Néanmoins, pour la superposition des deux ondes évanescentes, incidente et réfléchie, $\langle S_z^1(z = 0) \rangle \neq 0$.

8.5.4. Emissivité et absorptivité

Des considérations thermodynamiques permettent d'établir qu'un corps chauffé à température T rayonne une luminance qui est donnée par le produit de la luminance du corps noir par une quantité comprise entre 0 et 1 appelée émissivité. La loi de Kirchhoff stipule que l'émissivité est égale à l'absorptivité α de la surface⁴. La conservation de l'énergie d'un faisceau éclairant une interface donne $\alpha = 1 - R$. Dans le cas d'une interface séparant un milieu transparent d'un milieu absorbant, on a la relation simple $R + T = 1$. On peut donc écrire $1 - R = T$. Il s'en suit que l'absorptivité (et donc l'émissivité) d'un milieu est donnée par $1 - R$. L'absorptivité du demi-espace apparaît ainsi comme égale à la transmittivité de l'interface. En effet, tout photon traversant l'interface sera absorbé dans le demi-espace contenant le milieu absorbant. Les propriétés radiatives d'émission et d'absorption d'un corps opaque sont donc décrits à l'aide des facteurs de réflexion et transmission de Fresnel.

8.6. Cas de l'incidence normale

8.6.1. Facteur de réflexion

En incidence normale, $\alpha = 0$ et $\gamma = n \frac{\omega}{c}$. Le facteur de réflexion peut s'écrire en fonction des indices des deux milieux :

$$r = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Pour une interface verre-air, $n_1 \approx 1.5$, $n_2 = 1$ d'où $r = 0.2$ (et $r = -0.2$ pour une interface air verre) et $R = |r|^2 = (0.2)^2 = 4\%$. Ce qui correspond à une transmission $T = 96\%$ en énergie (si $\text{Im}[\gamma_1] = 0$). Cette valeur du coefficient de transmission peut sembler élevée, mais pour un système comportant plusieurs interfaces, les "pertes" énergétiques deviennent trop importantes pour un fonctionnement satisfaisant. Ainsi par exemple, un système comportant 5 lentilles à 10 dioptries de sorte que la transmission est de $0.96^{10} = 0.66$. D'où la nécessité de mettre au point des dispositifs limitant encore la réflexion.

8.6.2. Dispositifs antirélecteurs

Différents concepts peuvent être utilisés pour limiter la réflexion.

Utilisation de milieux magnétiques

Dans le cas de milieux magnétiques, le facteur de réflexion s'écrit :

$$r = \frac{\gamma_1/\mu_1 - \gamma_2/\mu_2}{\gamma_1/\mu_1 + \gamma_2/\mu_2}$$

En incidence normale $\gamma_1 = n_1 \frac{\omega}{c} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \frac{\omega}{c}$. Dans ce cas, le facteur de réflexion s'annule si

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}$$

Un revêtement magnétique déposé sur la carlingue métallique d'un avion, par exemple, peut constituer un système antireflet à condition que le revêtement soit absorbant de manière à éviter toute réflexion à l'interface revêtement-métal.

Système interférentiel

Une couche d'indice n' déposée à la surface d'un milieu d'indice n pourra servir de couche anti-reflet si les ondes réfléchies 1 et 2 (fig. 13.9) se détruisent par interférences.

Deux conditions doivent donc être satisfaites :

4. On peut montrer que cette propriété est une conséquence directe de la propriété de réciprocité des équations de Maxwell. Le théorème de réciprocité revient à dire que l'on obtient le même signal en permutant source et détecteur.

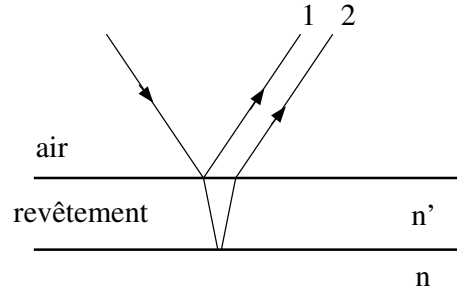


FIGURE 8.6. – Dispositif interférentiel

- 1 et 2 doivent être en opposition de phase, ce qui fixe l'épaisseur d de la couche : $d = \lambda/4n'$.
- 1 et 2 doivent avoir la même amplitude ce qui fixe l'indice n' tel que $n' = \sqrt{n}$.

Ce dispositif est utilisé pour les verres de lunettes sur lesquels on dépose une couche de quartz. Il faut noter que la condition d'interférences destructives n'est vérifiée qu'en incidence normale et pour une longueur d'onde donnée, ce qui limite l'efficacité du système.

Revêtement multicouche

Le facteur de réflexion étant proportionnel à la différence d'indice entre les deux milieux, on peut diminuer la réflexion en déposant sur la surface un revêtement multicouche de telle sorte que la différence d'indice soit faible pour chaque interface (fig 13.10). Ceci correspond à une "adaptation d'impédance" progressive.

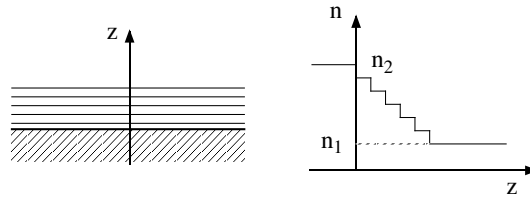


FIGURE 8.7. – Dispositif multicouche

8.6.3. Paradoxe de l'absorbeur

Considérons l'interface entre le vide ou de l'air et un milieu absorbant. L'indice généralisé du milieu absorbant étant complexe, on le notera $n = n' + in''$. Le facteur de réflexion en intensité devient :

$$R = \left| \frac{n - 1}{n + 1} \right|^2 = \frac{(n' - 1)^2 + n''^2}{(n' + 1)^2 + n''^2}$$

Dans le cas d'un milieu fortement absorbant telle que sa partie imaginaire de la constante diélectrique soit très grande devant 1, le module de l'indice est très grand devant 1. Dans ce cas, on constate que $R \rightarrow 1$. Le milieu réfléchira donc presque totalement la lumière et de ce fait, ne l'absorbera pas !

Le paradoxe repose sur deux définitions distinctes de la notion d'absorbeur. D'une part, on peut considérer qu'un milieu est très absorbant si la longueur de propagation de l'onde dans le matériau est très faible : l'onde est absorbée sur une distance très courte. D'autre part, un milieu remplissant un demi espace est un bon absorbeur s'il ne réfléchit pas la lumière. Ces deux notions sont distinctes et, comme on l'a vu, incompatibles.

Pour absorber de l'énergie lumineuse incidente, il ne faut pas la réfléchir ce qui nécessite un faible contraste d'indice. Il ne faut donc pas que la partie imaginaire de la constante diélectrique soit très élevée. La longueur de pénétration de l'onde doit simplement être plus petite que l'épaisseur du corps pour qu'il y ait absorption.

8.6.4. Couleur d'un corps

Nous pouvons utiliser les notions introduites pour discuter de la couleur des corps. Lorsqu'un milieu opaque absorbe les longueurs d'onde correspondant à une couleur spécifique, il apparaît alors en réflexion la couleur complémentaire. Considérons une goutte d'encre déposée sur une feuille de papier. Si elle comporte des pigments qui absorbent dans le bleu/vert, la lumière sera plus atténuée dans cette région spectrale que dans le rouge lors de la propagation au travers de la goutte. La feuille de papier blanche diffuse en réflexion la lumière qui s'atténue à nouveau lors du trajet retour. La lumière réfléchie apparaît alors rouge. Si l'on utilise cette même encre sur un transparent, la couleur apparaît moins nettement en projection que lorsque l'on regarde le transparent posé sur une feuille de papier. En effet, dans le cas de la projection, la lumière ne traverse le colorant qu'une seule fois.

L'eau de mer absorbe le rouge et les couleurs observées en plongée ont une forte dominante bleue. Cela est dû au fait que la lumière incidente éclairant les objets est fortement atténuée dans la zone rouge du spectre. La dominante bleue disparaît si le plongeur éclaire ce qu'il regarde près de lui avec une lampe car le trajet effectué par la lumière issue de cette lampe est trop court pour qu'une forte proportion du rouge ne soit absorbée.

Essayons maintenant de relier la couleur de l'or aux valeurs de l'indice optique. Considérons les valeurs de l'indice complexe et de la constante diélectrique de l'or pour le vert ($0.5\mu\text{m}$) et l'infrarouge proche ($0.8\mu\text{m}$).

Au	$n = n' + in''$	$\epsilon_r = \epsilon'_r + i\epsilon''_r$
$0.5\mu\text{m}$	$0.84 + i 1.84$	$-2.68 + i 3.09$
$0.8\mu\text{m}$	$0.16 + i 4.84$	$-23.4 + i 1.55$

On voit que le module de l'indice est plus élevé dans le proche infrarouge que dans le vert. L'or réfléchit donc plus fortement le rouge que le bleu/vert. Ceci explique la couleur de l'or vu en réflexion. Lorsque l'on observe un film mince d'or en transmission, on constate que la lumière transmise est verte. Cela est dû à deux phénomènes. D'une part, comme on vient de le voir, la réflexion aux interfaces est plus forte pour le rouge que pour le bleu. D'autre part, le bleu est plus atténué lors de la propagation que le rouge comme on peut le voir en examinant les valeurs des parties imaginaires des indices. Ces deux effets jouent donc dans le même sens : l'or est vert en transmission.

8.7. Cas d'une polarisation quelconque

8.7.1. Facteurs de réflexion et de transmission

Les courbes de la figure 8.8 donnent l'allure de la variation du facteur de réflexion en intensité pour une interface verre-air puis pour une interface air-verre en fonction de l'angle d'incidence i . Les deux courbes de chaque graphe correspondent aux deux polarisations TE et TM. On peut remarquer que dans le cas de l'interface verre-air, le facteur de réflexion vaut 1 lorsque l'angle d'incidence est supérieur à une certaine valeur i_c , ce qui correspond à la réflexion totale. On peut aussi noter qu'en incidence normale les courbes correspondant aux deux polarisations sont confondues. Une lentille ne modifiera pas la polarisation de la lumière uniquement si elle est éclairée sous de faibles angles d'incidence ($< 30^\circ$ en pratique pour du verre).

Pour les deux interfaces, dans le cas d'une polarisation TM, le facteur de réflexion s'annule pour une valeur particulière de l'angle d'incidence appelée angle de Brewster et notée i_B .

8.7.2. Angle de Brewster

Cette propriété de l'angle de Brewster est utilisée pour réaliser des polariseurs. En effet, de la lumière non polarisée éclairant une lame de verre sous l'incidence i_B donnera un faisceau réfléchi de polarisation TE.

On peut expliquer simplement l'existence de ce phénomène. Considérons une onde incidente arrivant sur l'interface sous l'angle θ_i . L'onde réfléchie ne peut avoir qu'une seule direction de propagation donnée par $\theta_r = \theta_i$. Cette onde réfléchie est due au rayonnement des dipôles induits par l'onde incidente et on sait que le rayonnement d'un dipôle électrique est nul le long de son axe. Donc, si la direction $\theta_r = \theta_i$ correspond à l'axe des dipôles induits, il n'y aura pas d'onde réfléchie.

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Écrire les relations de continuité avec la constante diélectrique généralisée
- ❷ Définir les polarisations de base Transverse Électrique et Transverse Magnétique
- ❸ Calculer les facteurs de réflexion et transmission en amplitude et en intensité à l'aide des vecteurs d'onde
- ❹ Retrouver la réflexion totale, angle de Brewster.

9. Optique géométrique

9.1. Limite des courtes longueurs d'onde

9.1.1. Introduction

L'OBJET de ce chapitre est d'établir un lien entre l'optique géométrique et la théorie électromagnétique de la lumière. Nous allons montrer que l'optique géométrique est obtenue à partir des équations de Maxwell dans la limite des faibles longueurs d'ondes. En premier lieu, il faut donner une définition du rayon, concept de base de l'optique géométrique, dans le langage des équations de Maxwell. A partir de là, il faut établir la loi d'évolution du rayon lumineux. Pour obtenir une telle description, il faut faire des approximations. La conséquence en est la perte d'une partie des propriétés ondulatoires de la lumière. La notion de phase n'est pas perdue : dans une description en termes de rayons lumineux, il est en effet naturel d'associer un chemin optique (et donc une phase) à un rayon lumineux. C'est bien ainsi que l'on procède lorsque l'on calcule les figures d'interférence : on raisonne sur des rayons lumineux se propageant de façon rectiligne en milieu homogène. En revanche, la diffraction et la diffusion sont perdues dans la limite des courtes longueurs d'onde.

Dans tout le chapitre, nous raisonnerons sur un milieu diélectrique isotrope, non magnétique ($\mu_r = 1$) caractérisé par sa constante diélectrique $\epsilon = n^2$. Nous ne supposons pas le milieu homogène, ϵ est donc une fonction des variables d'espace.

En ce qui concerne les champs électromagnétiques, nous les choisissons monochromatiques et nous faisons apparaître explicitement leur phase et leur amplitude :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \exp \left[i \frac{\omega}{c} S(\mathbf{r}) - i\omega t \right] \right\} \quad (9.1)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \exp \left[i \frac{\omega}{c} S(\mathbf{r}) - i\omega t \right] \right\} \quad (9.2)$$

La phase est une fonction réelle de $\mathbf{r}$. Par contre, les amplitudes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ peuvent être complexes afin de pouvoir décrire tous les états de polarisation. Deux exemples :

Pour une onde plane : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ c'est-à-dire $S(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{k}$ et $|\mathcal{E}| = \text{constante}$

Pour une onde sphérique décrivant le champ électrique dipolaire en champ lointain : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\perp \frac{\exp[ikr]}{r}$
c'est-à-dire $S(\mathbf{r}) = r$ et $|\mathcal{E}| = \frac{\sin \theta}{r}$

Dans ces deux cas de figure, $\mathbf{e}$ est un vecteur complexe décrivant l'état de polarisation du champ (voir chapitre 1). De façon générale, la phase dépendante de $S(\mathbf{r})$ permet de décrire un front de phase quelconque. Dans la suite, nous poserons $k_0 = \omega/c$.

9.1.2. Équations de Maxwell (dans l'approximation $k_0 \rightarrow \infty$)

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ \text{rot} \mathbf{B} &= -\epsilon_0 \epsilon_r i\omega \mathbf{E} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \text{div}(\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) &= 0 \end{aligned}$$

En introduisant la forme choisie en 9.2 pour représenter les champs, on obtient pour la première de ces quatre équations :

$$\mathbf{rot}[\mathcal{E} \exp(ik_0 S)] = \exp(ik_0 S)[\mathbf{rot} \mathcal{E} + ik_0 \nabla S \times \mathcal{E}] \quad (9.3)$$

Dans la limite des faibles longueurs d'ondes, k_0 devient très grand. Le second terme est donc prépondérant dans le membre de droite lorsque la longueur d'onde est très petite devant une distance caractéristique de l'évolution de $\mathcal{E}$. Cela signifie physiquement que la phase du champ varie beaucoup plus rapidement que son amplitude. Cette hypothèse tombe en défaut lorsque l'amplitude varie appréciablement sur quelques longueurs d'ondes : au voisinage d'un point de focalisation, à la limite d'une ombre, sur un bord net, etc. En d'autres termes, en négligeant $\mathbf{rot} \mathcal{E}$ devant $ik_0 \nabla S \times \mathcal{E}$, ce qui revient à négliger les dérivées de l'amplitude par rapport aux dérivées de la phase, **on élimine tous les effets de diffraction.**

De même, on aura pour la dernière des quatre équations de Maxwell :

$$\text{div}[\epsilon_r \epsilon_0 \mathcal{E} \exp(ik_0 S)] = \exp(ik_0 S)[\epsilon_0 \nabla(\epsilon \mathcal{E}) + \epsilon \epsilon_0 ik_0 \nabla S \cdot \mathcal{E}] \quad (9.4)$$

Là encore, en supposant que ϵ (donc la structure du milieu) ne varie pas trop vite, le terme dominant est $k_0 \nabla S \cdot \mathcal{E}$. Négliger les autres termes revient à **éliminer les effets de diffraction dus aux poussières, rayures, etc.**

Les équations de Maxwell se réécrivent dans cette limite :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \cdot \nabla S &= 0 & \mathcal{B} &= \frac{k_0}{\omega} \nabla S \times \mathcal{E} \\ \mathcal{E} \cdot \nabla S &= 0 & \mathcal{E} &= -\frac{\nabla S \times \mathcal{B}}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 c} \end{aligned} \quad (9.5)$$

En éliminant $\mathcal{B}$ par exemple, on obtient l'équation qui régit la phase $S(\mathbf{r})$ appelée eikonale

$$(\nabla S)^2 = \epsilon = n^2(\mathbf{r}) \quad (9.6)$$

Nous introduisons le vecteur unitaire $\mathbf{t}$ normal à la surface équiphase par la relation :

$$\nabla S = |\nabla S| \mathbf{t} = n \mathbf{t} \quad (9.7)$$

On peut constater que le gradient de la phase s'écrit $\nabla \Phi = n \frac{\omega}{c} \mathbf{t}$, ce qui apparaît ainsi comme le vecteur d'onde local du champ.

9.2. Rayons lumineux

Nous allons définir dans cette partie la notion de rayon lumineux à partir des grandeurs électromagnétiques et nous allons trouver l'équation donnant l'évolution d'un rayon lumineux.

9.2.1. Vecteur de Poynting

Il est naturel de faire appel au vecteur de Poynting $\mathbf{R}$ qui caractérise les flux d'énergie dans le cadre de la théorie électromagnétique pour introduire la notion de rayon lumineux. Compte tenu des équations (9.5) on obtient :

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \mathcal{E} \times \mathcal{B}^* \} = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathcal{E}|^2 \nabla S \quad (9.8)$$

Introduisons la densité d'énergie dans cette expression :

$$u = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon |\mathcal{E}|^2 \quad (9.9)$$

On en tire, en reportant dans l'équation (9.8) :

$$\langle \mathbf{R} \rangle = \frac{c}{n} u \mathbf{t} \quad (9.10)$$

où on a repris $\nabla S = n \mathbf{t}$ montré en (9.7). La vitesse de propagation de l'énergie est, d'après l'équation 9.10 c/n , elle est donc égale à la vitesse de phase. Il faut rappeler à ce stade que nous raisonnons sur un champ monochromatique et qu'il n'apparaît pas de ce fait d'effets liés à la dispersion. Le vecteur de Poynting étant parallèle à $\mathbf{t}$, l'énergie se propage perpendiculairement aux fronts d'onde.

9.2.2. Rayons lumineux

On définit les rayons lumineux comme les lignes de champ du vecteur de Poynting. Ce sont donc, d'après ce qui précède, les trajectoires orthogonales aux fronts d'onde caractérisés par une phase $S(\mathbf{r})$ constante.

9.3. Équation des rayons lumineux

Le problème est de trouver la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu inhomogène. Il faut éliminer $S(\mathbf{r})$ pour obtenir une équation différentielle reliant la tangente à la trajectoire $\mathbf{t}$, à l'indice n .

Nous allons introduire l'abscisse curviligne le long de la trajectoire. On rappelle que l'on a par définition :

$$\frac{d}{ds} = \mathbf{t} \cdot \nabla$$

En dérivant l'équation (9.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d(n\mathbf{t})}{ds} &= \frac{d}{ds}(\nabla S) \\ &= (\mathbf{t} \cdot \nabla) \nabla S \\ &= \left(\frac{\nabla S}{n} \cdot \nabla \right) \nabla S \\ &= \frac{1}{2n} \nabla [(\nabla S)^2] \\ &= \frac{1}{2n} \nabla (n^2) \\ &= \nabla n \end{aligned} \tag{9.11}$$

où on a utilisé $\nabla(\mathbf{A}^2) = 2\{(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})\}$

Finalement, on obtient l'équation des rayons lumineux :

$$\frac{d(n\mathbf{t})}{ds} = \nabla n \tag{9.12}$$

9.4. Lois de Snell-Descartes

Supposons que l'on ait $\nabla n = \partial n / \partial z \mathbf{e}_z$. Le cas du dioptre est un cas particulier de ce type. L'équation des rayons lumineux donne :

$$\frac{d(n\mathbf{t})}{ds} = \frac{\partial n}{\partial z} \mathbf{e}_z \tag{9.13}$$

Introduisons l'angle formé par le rayon et $\mathbf{e}_z$: $\theta = (\mathbf{e}_z, \mathbf{t})$. En effectuant le produit vectoriel de (9.13) par le vecteur $\mathbf{e}_z$ on obtient :

$$\mathbf{e}_z \times \frac{d(n\mathbf{t})}{ds} = \frac{d(\mathbf{e}_z \times n\mathbf{t})}{ds} = 0 \tag{9.14}$$

donc $(n \mathbf{e}_z \times \mathbf{t}) = \mathbf{C}$ où $\mathbf{C}$ est un vecteur constant ; cette relation montre que la trajectoire est plane. Ceci constitue la première loi de Snell-Descartes. On en déduit $d(n \sin \theta)/ds = 0$ soit $n \sin \theta = \text{constante}$ (cette constante est définie le long d'un rayon lumineux donné). On retrouve ainsi une loi qui généralise la loi de Snell-Descartes de la réfraction.

9.5. Applications

9.5.1. Effet mirage

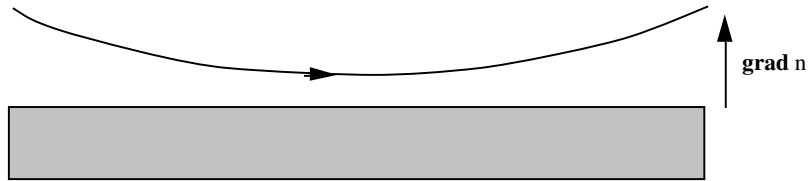
On peut réécrire l'équation (9.13) en introduisant le rayon de courbure et le vecteur $\mathbf{N}$, unitaire, orthogonal à $\mathbf{t}$ et centripète associés aux rayons lumineux :

$$\frac{dn}{ds} \mathbf{t} + \frac{n}{R} \mathbf{N} = \nabla n \quad (9.15)$$

Cette expression montre que les rayons tournent leur concavité vers les indices croissants. Dans le cas d'un mirage, l'air est plus chaud donc plus dilué au voisinage du sol. On en déduit le sens de ∇n par la loi de Gladstone qui relie l'indice optique à la masse volumique d'un gaz :

$$\frac{n-1}{\rho} = \text{constante} \quad (9.16)$$

Elle exprime que l'indice est d'autant plus grand que la matière est dense. On en déduit l'allure des rayons schématisée ci-dessous :



9.5.2. Déviation par l'atmosphère

On considère que l'atmosphère est un milieu d'indice à symétrie sphérique d'indice optique $n(r)$. On peut montrer alors que $\mathbf{r} \times n\mathbf{t}$ est constant le long d'un rayon lumineux :

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{r} \times n\mathbf{t})}{ds} &= \mathbf{t} \times n\mathbf{t} + \mathbf{r} \times \frac{d(n\mathbf{t})}{ds} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \nabla n \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9.17)$$

On a donc :

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{t} = \mathbf{C} \quad (9.18)$$

De ce fait, tous les points de la trajectoire du rayon appartiennent à un plan perpendiculaire à $\mathbf{C}$; la trajectoire est donc plane. De surcroît, on a $|\mathbf{r} \times n\mathbf{t}| = n r \sin \phi = |\mathbf{C}|$ où ϕ est l'angle formé par $\mathbf{r}$ et $\mathbf{t}$.

Calculons maintenant la déviation d'un faisceau lumineux par l'atmosphère d'épaisseur H . Supposons qu'en $r = R$, à la surface de la terre l'indice soit n_0 et qu'en $r = R + H$, l'indice soit 1. Soient i_0 et i les angles sous lesquels est vue une étoile en présence ou en absence d'atmosphère. Ils sont liés par la relation :

$$n_0 R \sin i_0 = (R + H) \sin i$$

avec :

- H = hauteur de l'atmosphère
- $n_0 = 1,0003$
- Δ = déviation du rayon

Posons $i = i_0 + \Delta$. On obtient, en supposant Δ petit devant 1 et i_0 différent de $\pi/2$:

$$\Delta = \left[\frac{n_0 R}{R + H} - 1 \right] \tan i_0 \quad (9.19)$$

L'atmosphère introduit donc une erreur systématique dans les relevés astronomiques ainsi que dans les relevés de position au sextant sauf pour $i_0 = \pi/2$. Le cas du coucher de soleil correspond à $\pi/2 = i_0$. On

a alors $n_0 R = (R + H) \cos \Delta$. Le soleil se trouve en dessous de l'horizon géométrique ! La déviation étant fonction de l'indice, elle dépend à travers lui de la longueur d'onde. Il y a donc autant de soleils couchants que de couleurs dans le spectre. Le premier à disparaître est le rouge. Ce phénomène implique que le dernier rayon lumineux aperçu soit... violet. Cependant, du fait de la diffusion du rayonnement par l'atmosphère, il y a mélange du violet avec les couleurs voisines du spectre : bleu, bleu vert et jaune. Ainsi, la couleur du sommet du disque solaire est verte... lorsque les turbulences atmosphériques ne sont pas trop importantes afin de ne pas entraîner un brouillage complet. En effet, si les fluctuations des angles de réfraction sont comparables ou supérieures aux valeurs moyennes des angles de réfraction, le phénomène est complètement masqué.

9.5.3. Applications aux mesures de température et de concentrations

Des mesures de déviation de faisceaux sondes peuvent être faites avec une grande précision par l'emploi de détecteurs de positions de faisceau. Des déplacements de quelques centaines d'angstroems peuvent être mesurés. On peut ainsi obtenir une information liée au gradient d'indice donc, d'après la loi de Gladstone, à sa masse volumique. On dispose ainsi d'une technique de mesure non intrusive de température ou de concentration pour les écoulements, les flammes, etc.

Ce qu'il faut absolument savoir

- ❶ Définir un rayon lumineux
- ❷ Écrire l'équation des rayons lumineux

A. Séries et Transformation de Fourier

A.1. Séries de Fourier

A.1.1. Série en $\exp[ik_n x]$

NOTONS $f(x)$ une fonction périodique de période d . Si elle vérifie certaines conditions mathématiques (pratiquement toujours réalisées en physique), on peut la développer en séries sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$k_n = n 2\pi/d \quad (\text{A.2})$$

où les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) e^{-ik_n x} dx \quad (\text{A.3})$$

x_0 étant un nombre réel quelconque. Ce résultat se vérifie immédiatement en remarquant que :

$$\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} e^{-i(k_n - k_p)x} dx = \delta_{np} \quad (\text{A.4})$$

On appelle spectre de Fourier l'ensemble des valeurs $|c_n|$. On remarque que $f(x)$ est une fonction réelle si et seulement si :

$$c_{-n} = c_n^* \quad (\text{A.5})$$

A.1.2. Série de cosinus et de sinus

En groupant dans (A-3) les termes correspondants à des valeurs opposées de n on obtient :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{ik_n x} + c_{-n} e^{-ik_n x}] \quad (\text{A.6})$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)] \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \quad n > 0 \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \quad n > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De (A.3) on déduit alors :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) \cos(k_n x) dx \\ b_n &= \frac{2}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) \sin(k_n x) dx \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Si $f(x)$ est paire, $b_n = 0$

Si $f(x)$ est impaire, $a_n = 0$

Si $f(x)$ est réelle, a_n et b_n sont réels

A.1.3. Egalité de Bessel-Parseval

On montre à partir de (A.9) que l'on a :

$$\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (\text{A.10})$$

En utilisant le développement A.6, on obtient :

$$\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (\text{A.11})$$

A.2. Transformation de Fourier

A.2.1. Définitions : L'intégrale de Fourier comme limite d'une série de Fourier

L'approche que nous allons suivre pour présenter la notion de transformée de Fourier est celle qui a été utilisée historiquement, elle consiste à considérer la transformée de Fourier comme la limite d'une série de Fourier. Il ne s'agit pas d'une méthode rigoureuse. Toutefois elle est intéressante par sa simplicité et par le fait que tout calcul numérique de spectre est discret et est donc approximé par un calcul de série de Fourier.

Nous envisageons ici une fonction $f(x)$ *non périodique* et nous définissons $f_d(x)$ comme la fonction périodique de période d coïncidant avec $f(x)$ sur l'intervalle $[-d/2, d/2]$. $f_d(x)$ peut être développée en série de Fourier :

$$f_d(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (\text{A.12})$$

où c_n est donné par (A.3) :

$$c_n = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f_d(x) e^{-ik_n x} dx \quad (\text{A.13})$$

Lorsque d tend vers l'infini, $f_d(x)$ se confond avec $f(x)$. La définition (A.2) de k_n donne :

$$k_n - k_{n+1} = 2\pi/d \quad (\text{A.14})$$

En remplaçant $1/d$ à l'aide de (A.14) dans (A.13), puis en reportant dans (A.12), on obtient :

$$f_d(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_{n+1} - k_n}{2\pi} e^{ik_n x} \int_{-d/2}^{+d/2} f_d(x) e^{-ik_n x} dx \quad (\text{A.15})$$

Dans la limite $d \rightarrow \infty$, $(k_n - k_{n+1}) \rightarrow 0$ de sorte que la somme tend vers une intégrale définie et l'intégrale figurant dans (A.15) devient une fonction de la variable continue k . Si l'on pose :

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{A.16})$$

la relation (A.15) s'écrit dans la limite $d \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad (\text{A.17})$$

Remarque :

Si l'on pose - comme on le fait en mécanique quantique -

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{A.18})$$

la formule inverse s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (\text{A.19})$$

Enfin, signalons également une convention fréquemment utilisée en mathématiques :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \quad (\text{A.20})$$

Cette convention a l'avantage de conduire à des expressions symétriques. En physique, on préfère travailler avec le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la pulsation ω plutôt qu'avec les fréquences spatiales et temporelles. Pour conserver la simplicité de la convention des mathématiciens, on travaillera avec $dk/2\pi$ et $d\omega/2\pi$.

A.2.2. Transformation de Fourier dans l'espace à 3 dimensions

Pour des fonctions de 3 variables d'espace x, y, z on remplace (A.15) et (A.16) par :

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{dk_z}{2\pi} \quad (\text{A.21})$$

qui se note plus simplement :

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.22})$$

et dont la formule d'inversion donne :

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} \quad (\text{A.23})$$

A.2.3. Propriétés simples

Dérivation

$$TF[f'(x)] = ikTF[f(x)]$$

$$TF[f^{(n)}(x)] = (ik)^n TF[f(x)]$$

$$TF[\text{grad}f(\mathbf{r})] = i\mathbf{k}TF[f(\mathbf{r})] = i\mathbf{k}f(\mathbf{k})$$

$$TF[\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})] = i\mathbf{k} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{k})$$

$$TF[\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})] = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})$$

Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Le produit de convolution de f par g est défini par :

$$h(x) = f \otimes g = \int f(x-x')g(x')dx'$$

Il est simple de montrer que l'on a :

$$TF[f \otimes g] = TF[f] \cdot TF[g]$$

$$TF[f \cdot g] = TF[f] \otimes TF[g]$$

remarque : lorsque l'on adopte la convention qui consiste à introduire un facteur $1/\sqrt{2\pi}$ dans la définition de la transformée de Fourier comme cela est généralement fait en mécanique quantique, il n'y a pas de facteur 2π dans le lien entre produit de convolution et produit ce qui donne des relations symétriques plus simples à utiliser.

A.2.4. Quelques exemples

$$f(k) = \frac{2 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{ka} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} f(x) = 1/a \text{ pour } |x| < a/2 \\ f(x) = 0 \text{ pour } |x| > a/2 \end{cases}$$

$$f(k) = \frac{\frac{2}{a}}{k^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} \quad \text{pour} \quad f(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right)$$

$$f(k) = a\sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{k^2 a^2}{4}\right] \quad \text{pour} \quad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

A.2.5. Largeur de deux fonctions, transformées de Fourier l'une de l'autre

Sur les trois exemples qui précèdent, on remarque que l'on a la propriété $\Delta x \Delta k \approx 1$ en ordre de grandeur. *Cette propriété est générale.* Elle correspond à de nombreuses situations en physique :

- relation d'incertitude d'Heisenberg
- produit du temps caractéristique τ d'un circuit par la bande passante $\Delta\omega$
- diffraction : relation liant la largeur angulaire du faisceau diffracté à la largeur de l'ouverture diffractante

B. Formulaire

B.1. Opérateurs d'analyse vectorielle

B.1.1. Composition d'opérateurs

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \end{cases}$$

B.1.2. Opérateurs s'appliquant sur un produit de deux fonctions

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(fg) &= f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \\ \operatorname{div}(f \mathbf{A}) &= f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} f \\ \operatorname{rot}(f \mathbf{A}) &= f \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{A} \\ \operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} \\ \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} \end{aligned}$$

B.2. Transformation d'une intégrale sur une surface fermée en intégrale de volume

$d\mathbf{S}$ est orientée selon la normale sortante à la surface fermée S qui limite le volume V .

Théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, d^3\mathbf{r}$$

Formule du gradient :

$$\oint_S f \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{grad} f \, d^3\mathbf{r}$$

Formule du rotationnel :

$$\oint_S \mathbf{A} \wedge d\mathbf{S} = - \iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d^3\mathbf{r}$$

B.3. Transformation d'une intégrale le long d'un contour fermé en une intégrale de surface

Dans toutes les relations, le contour fermé $\mathcal{C}$ qui limite la surface S est orientée par la normale à la surface.

Formule de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Formule de Kelvin :

$$\oint_{\mathcal{C}} f \, d\mathbf{l} = - \iint_S \mathbf{grad} f \wedge d\mathbf{S}$$

B.4. Opérateurs dans les principaux systèmes de coordonnées

B.4.1. Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z \\ \text{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \mathbf{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{u}_z \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta \mathbf{A} &= (\Delta A_x) \mathbf{u}_x + (\Delta A_y) \mathbf{u}_y + (\Delta A_z) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

B.4.2. Coordonnées cylindro-polaires (cylindriques)

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_z \\ \text{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \mathbf{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_z \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

B.4.3. Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi \\
\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\mathbf{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \mathbf{u}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{u}_\varphi \\
\Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$