



OPTIQUE DE FOURIER

ARNAUD DUBOIS

2019

Bibliographie

1. “Introduction to Fourier Optics”, J.W. Goodman (Stanford University). Second edition, Mc Graw-Hill (1996), ISBN 0-07-024254-2
2. “Fundamentals of Photonics” (Wiley Series in Pure and Applied Optics). Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich. John Wiley & Sons, 1st edition (August 15, 1991)
3. “Principle of Optics”, Born and Wolf (Pergamon Press 6th edition)
4. « Diffraction et structure des images », Marechal et Françon, Masson
5. « Optique géométrique et ondulatoire », José-Philippe Pérez, Masson 1994
6. “Optique cohérente”, Lauterborn Kurz Wiesenfeld Masson 1993
7. “Introduction to Fourier Optics and Coherence”, Jean-Marie Mariotti, Diffraction Limited Imaging with Very Large Telescopes, Alloin & Mariotti ed., Kluwer, 1989
8. « L’intégrale de Fourier et ses applications à l’optique », P. M. Duffieux, (Masson) 1970
9. “Geometrical theory of diffraction”, Keller J.B. : J. Opt. Soc. Am., 52-116 (1962)

INTRODUCTION

La propagation de la lumière et la formation des images peuvent être modélisées, dans le cadre de l'optique ondulatoire scalaire, au moyen d'un formalisme s'appuyant sur l'analyse mathématique de Fourier.

L'objectif du cours est de présenter les concepts fondamentaux de ce modèle et de fournir les outils de calculs utiles dans de nombreux domaines de l'optique : systèmes d'imagerie, holographie, lasers, communications optiques, etc.

Ce cours d'optique de Fourier traite en particulier de la diffraction en régimes de Fresnel et de Fraunhofer. Le filtrage des fréquences spatiales et l'imagerie en éclairages cohérent et incohérent sont abordés. Enfin, les notions de cohérence temporelle et spatiale sont introduites et reliées au phénomène d'interférence.

A côté de l'optique scalaire, dont l'optique de Fourier constitue une modélisation, existent d'autres modèles plus ou moins sophistiqués pour décrire les phénomènes optiques. Ces théories sont présentées brièvement ci-dessous.

Théorie 1 : L'optique quantique (cas particulier de l'électromagnétisme quantique ou électrodynamique quantique). C'est la théorie la plus générale. L'optique quantique décrit les phénomènes optiques dans lesquels la lumière ou l'interaction entre lumière et matière doivent être quantifiées. La lumière est considérée comme constituée de photons. Par exemple :

- Le rayonnement du corps noir (ou rayonnement thermique) : spectre et intensité ne dépendent que de la température ; loi de Planck.
- L'absorption et l'émission de lumière à des fréquences particulières (raies du Sodium)
- L'effet photoélectrique : s'explique par le fait que les niveaux d'énergie des électrons dans un atome sont discrets ; énergie et longueur d'onde d'un photon étant proportionnelles, seules certaines radiations de longueur d'onde bien précise peuvent engendrer l'effet photoélectrique. Cet effet trouve une application dans les panneaux solaires.
- La pression de radiation qui provient du fait que les photons ont une quantité de mouvement malgré leur masse nulle.

Théorie 2 : La théorie électromagnétique. Cette théorie constitue le formalisme le plus général dans le cadre de la physique classique.

Dans la théorie électromagnétique de la lumière, on considère que la lumière est une onde électromagnétique. La lumière peut donc être décrite par les mêmes lois qui gouvernent toute onde électromagnétique. On appelle « lumière » une onde électromagnétique dont la fréquence se situe dans un certain domaine de fréquences (voir figure ci-après). La lumière occupe une région très limitée du spectre complet des ondes électromagnétiques (entre 3×10^{11} Hz et 3×10^{16} Hz).

Le spectre lumineux lui-même est divisé en 3 bandes :

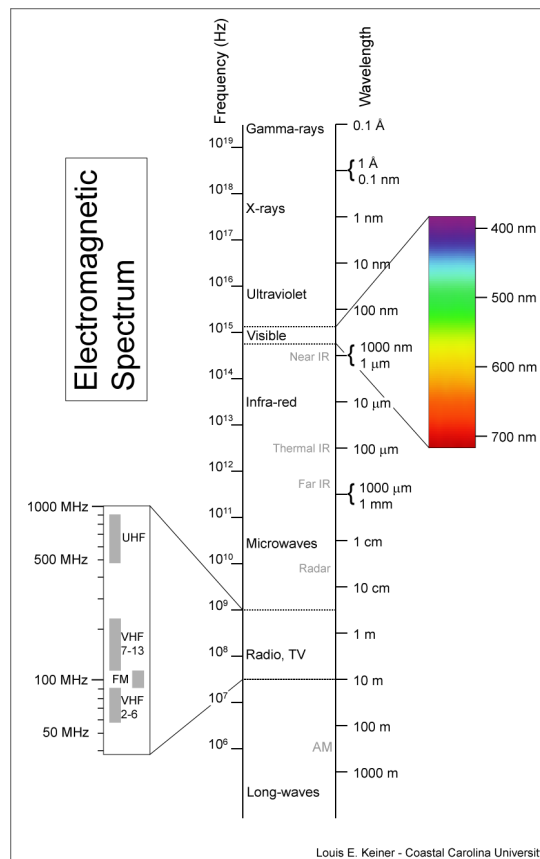
- infrarouge (longueur d'onde : 760 nm à 1 mm)
- ultraviolet (longueur d'onde : 10 nm à 390 nm)
- visible (longueur d'onde : 390 nm à 760 nm)

La lumière visible ne représente qu'une petite partie du spectre lumineux total.

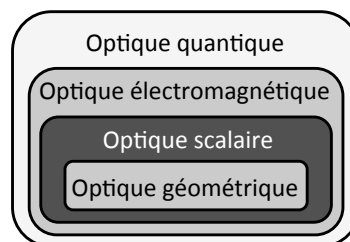
Théorie 3 : L'optique scalaire est une approximation de l'optique électromagnétique. L'approximation consiste à ne pas prendre en compte la nature vectorielle de la lumière. Cette théorie a donc ses limites mais elle est néanmoins très utile, car elle permet de bien décrire certains phénomènes de manière simple

à partir d'une théorie scalaire et non vectorielle, notamment les phénomènes de diffraction et d'interférences. L'optique de Fourier est une manière de traiter l'optique scalaire.

Théorie 4 : L'optique géométrique peut être considérée comme la limite de l'optique scalaire lorsque la longueur d'onde tend vers zéro (en pratique lorsque l'échelle considérée est beaucoup plus grande que la longueur d'onde). Quand la lumière se propage au travers ou autour d'objets dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que la longueur d'onde, alors la nature ondulatoire de la lumière n'est plus discernable. Dans ce cas, le comportement de la lumière peut être décrit par des rayons qui se propagent selon des lois géométriques. De nombreux phénomènes de notre vie quotidienne peuvent être décrits par l'optique géométrique.



Pour récapituler, l'optique quantique inclut l'optique électromagnétique, qui inclut l'optique scalaire qui, à son tour, inclut l'optique géométrique. Historiquement, ces différentes théories ont été développées dans l'ordre suivant : (1) optique géométrique; (2) optique scalaire ; (3) optique électromagnétique; (4) optique quantique.



Chapitre 1

RAPPELS D'ÉLECTROMAGNÉTISME

Ce chapitre a pour objectif de montrer que la théorie scalaire de l'optique est incluse dans la théorie électromagnétique et voir dans quelle mesure l'optique scalaire constitue une approximation de l'optique électromagnétique. On ne fera ici que de très brefs rappels d'électromagnétisme.

Dans la théorie électromagnétique, lumière est décrite par un champ électromagnétique : champ électrique $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ + champ magnétique $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$. Ces 2 vecteurs sont fonctions de la position et du temps. En principe, 6 fonctions scalaires de la position et du temps sont donc requises pour décrire la lumière : $\mathcal{E}_x(x, y, z, t)$, $\mathcal{E}_y(x, y, z, t)$, $\mathcal{E}_z(x, y, z, t)$, $\mathcal{H}_x(x, y, z, t)$, $\mathcal{H}_y(x, y, z, t)$, $\mathcal{H}_z(x, y, z, t)$. Toutefois, ces fonctions sont reliées les unes aux autres. Les champs électrique et magnétique dans le vide vérifient les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathcal{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \end{cases}$$

$\epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9}$: permittivité diélectrique du vide

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (MKS unités) : perméabilité magnétique du vide

$\nabla \cdot$ divergence

$\nabla \times$ rotationnel

L'équation de propagation (dans le vide)

On peut montrer, à partir des équations de Maxwell que toute composante u de $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{H}$, ($\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$, $\mathcal{H}_z$) vérifie :

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où

$$c_0 = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

c_0 est la vitesse de l'onde électromagnétique dans le vide (vitesse de la lumière). La vitesse de la lumière est donc reliée aux constantes électromagnétiques ϵ_0 et μ_0 .

Propagation dans un milieu diélectrique

→ matériaux classiques de l'optique (air, verre, cristaux, eau)

Le champ électrique induit une polarisation du milieu (déformation des nuages électroniques). Dans la théorie électromagnétique, on introduit la densité de polarisation $\mathcal{P}$. La densité de polarisation est la somme macroscopique des moments électriques dipolaires induits par le champ électrique.

On considère le cas d'un milieu linéaire, homogène, et isotrope

Définitions

- linéaire : $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ est relié linéairement à $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$.

- homogène : la relation entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ est indépendante de la position $\mathbf{r}$.

- isotrope : la relation entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ est indépendante de la direction de $\mathcal{E}$. Les vecteurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ sont donc parallèles.

Exemple : air, eau, verre, mais pas le cas de cristaux (non isotrope (et parfois aussi non linéaire (cela dépend de l'intensité du champ électrique))).

Dans ces conditions, les équations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathcal{H} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \end{cases}$$

Les champs $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ vérifient des équations identiques aux équations de Maxwell dans le vide à part que ϵ_0 est remplacé par ϵ (permittivité diélectrique du milieu). Par conséquent, chaque composante de $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$ satisfait l'équation d'onde (équation de propagation) :

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

∇^2 est l'opérateur Laplacien

$$c = 1/(\epsilon\mu_0)^{1/2}.$$

Les différentes composantes du champ électrique et du champ magnétique se propagent sous la forme d'onde à la vitesse

$$c = \frac{c_0}{n}$$

où

$$n = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} = (1 + \chi)^{1/2}$$

χ est une constante scalaire appelée susceptibilité électrique.

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E}$$

et

$$c_0 = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}}$$

est la vitesse de la lumière dans le vide. La constante n est le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide sur la vitesse de la lumière dans le milieu.

n représente l'indice de **réfraction du milieu**.

Chapitre 2

INTRODUCTION À L'OPTIQUE ONDULATOIRE SCALAIRE

L'optique scalaire est une théorie de la lumière dans laquelle on ne tient pas compte de la nature vectorielle de la lumière. L'optique scalaire peut être utilisée pour décrire de nombreux phénomènes optiques qui ne sont pas décrits par l'optique géométrique, notamment les phénomènes d'interférences et de diffraction. L'optique scalaire a toutefois ses limites. Par exemple, elle ne permet pas de décrire correctement les phénomènes de réflexion et réfraction de la lumière (notamment le phénomène de Brewster). L'optique scalaire est incapable d'expliquer les phénomènes qui requièrent une formulation vectorielle, en particulier les effets de polarisation.

La théorie de l'optique scalaire peut être construite en simplifiant la théorie électromagnétique, ou bien directement à partir d'un certain nombre de postulats.

1. POSTULATS DE L'OPTIQUE SCALAIRE

- La lumière se propage sous la forme d'une onde (on ne se préoccupe pas de la nature de cette onde).
- Dans le vide, les ondes lumineuses se propagent à la vitesse c_0 .
- Un milieu homogène transparent est caractérisé par un paramètre, son indice de réfraction n (≥ 1). Dans un milieu caractérisé par un indice de réfraction n , la lumière se propage à une vitesse réduite :

$$c = \frac{c_0}{n}$$

- Une onde optique est décrite par une fonction réelle de la position $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et du temps t , notée $u(\mathbf{r}, t)$ et appelée la fonction d'onde¹. L'interprétation physique de la fonction d'onde n'est pas précisée. Pour faire le lien avec l'électromagnétisme, disons qu'il peut s'agir par exemple d'une des composantes du champ électrique.

- La fonction d'onde satisfait l'équation d'onde

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien, opérateur différentiel scalaire².

Toute fonction qui satisfait l'équation d'onde décrit une possible onde optique.

¹ A ne pas confondre avec la fonction d'onde de la mécanique quantique !

² En coordonnées cartésiennes, le Laplacien est défini comme $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Du fait de la linéarité de l'équation d'onde, le **principe de superposition** s'applique : si $u_1(\mathbf{r}, t)$ et $u_2(\mathbf{r}, t)$ représentent deux ondes optiques, alors $u(\mathbf{r}, t) = u_1(\mathbf{r}, t) + u_2(\mathbf{r}, t)$ représente aussi une onde optique.

L'optique scalaire peut être établie à partir de ces postulats. On peut toutefois constater que ces postulats se justifient à partir de la théorie électromagnétique, ce qui implique que l'optique scalaire est incluse dans la théorie électromagnétique.

On va considérer maintenant quelques ondes optiques particulières. Une famille d'onde très importante est celle des ondes monochromatiques.

2. ONDES MONOCHROMATIQUES

Par définition, une onde monochromatique a une fonction d'onde dont la dépendance temporelle est harmonique (sinusoïdale) :

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})],$$

où

$a(\mathbf{r})$ = amplitude

$\varphi(\mathbf{r})$ = phase

ν = fréquence (Hz)

$\omega = 2\pi\nu$ = fréquence angulaire (radians/s).

De manière générale, l'amplitude et la phase peuvent toutes deux dépendre de la position.

La fréquence ν des ondes optiques est très élevée ; elle varie typiquement entre 3×10^{11} et 3×10^{16} Hz.

Manipuler des fonctions trigonométriques n'étant pas commode, il est usuel, par soucis de commodité, d'utiliser des quantités complexes.

2.1 Fonction d'onde complexe

On écrit

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, t) &= a(\mathbf{r}) \exp[j(2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r}))] \\ &= a(\mathbf{r}) \exp[j\varphi(\mathbf{r})] \exp(j2\pi\nu t) \end{aligned}$$

On a

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}, t)\} = 1/2[U(\mathbf{r}, t) + U^*(\mathbf{r}, t)].$$

La fonction $U(\mathbf{r}, t)$, appelée **fonction d'onde complexe**. Cette fonction décrit totalement l'onde ; la fonction d'onde $u(\mathbf{r}, t)$ en est la partie réelle. La fonction d'onde complexe $U(\mathbf{r}, t)$ doit aussi satisfaire l'équation d'onde :

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

2.2 Amplitude complexe

La fonction d'onde complexe peut s'écrire sous la forme

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t) \quad (\text{on sépare dépendance spatiale et dépendance temporelle})$$

Le terme indépendant du temps $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[j\varphi(\mathbf{r})]$ est appelé **amplitude complexe**.

La fonction d'onde $u(\mathbf{r}, t)$ est donc reliée à l'amplitude complexe par

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r})\exp(j2\pi\nu t)\}$$

où

- $|U(\mathbf{r})| = a(\mathbf{r})$ est l'amplitude de l'onde

- argument $\arg\{U(\mathbf{r})\} = \varphi(\mathbf{r})$ est la phase de l'onde

2.3 Equation de Helmholtz

Une onde monochromatique doit satisfaire l'équation d'onde. En substituant $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t)$ dans l'équation d'onde, on obtient :

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

Cette équation est appelée équation de **Helmholtz**, où

$$k = 2\pi\nu / c = \omega / c$$

k est désigné par : **nombre d'onde**

Toute onde monochromatique satisfait l'équation de Helmholtz.

2.4 Intensité

L'intensité d'une onde monochromatique est définie comme le module carré de l'amplitude complexe :

$$I(r) = |U(\mathbf{r})|^2$$

L'intensité d'une onde monochromatique ne dépend pas du temps.

Attention, on n'utilise pas dans ce cours de grandeurs photométriques. L'intensité est donnée à un coefficient de proportionnalité près (la connaissance de ce coefficient nécessitant le recours à la théorie électromagnétique). On considère l'unité de l'intensité comme étant des W/m^2 selon la définition anglo-saxonne (Intensity or Irradiance). En Français, cette unité serait appelée Irradiance ou Eclairement énergétique.

2.5 Front d'onde

Les fronts d'onde sont des **surfaces de phase constante**, $\varphi(\mathbf{r}) = \text{constant}$.

Les constantes sont généralement des multiples de 2π .

$\varphi(\mathbf{r}) = 2\pi q$, où q est un entier, représente l'ensemble des surfaces d'onde d'une onde.

3. ONDES ELEMENTAIRES

On considère deux ondes monochromatiques particulières : l'onde **plane** et l'onde **sphérique**. Ces deux ondes sont des solutions simples de l'équation de Helmholtz.

3.1 L'onde plane

Une onde plane a une amplitude complexe qui s'écrit :

$$U(\mathbf{r}) = A \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

A est une constante appelée **enveloppe complexe**

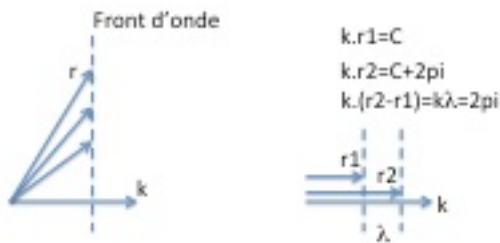
$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ est appelé **vecteur d'onde**.

L'onde plane (comme toute onde monochromatique) satisfait l'équation de Helmholtz. On a donc

$$-A(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)] + k^2 A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)] = 0$$

Cette relation étant vérifiée en tout point de l'espace, cela implique $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$: le module du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est égal au nombre d'onde $k = 2\pi\nu / c = \omega / c$. On a là une relation entre les caractéristiques temporelle et spatiale de l'onde.

La phase est $\arg\{U(\mathbf{r})\} = \arg(A) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$; les fronts d'onde vérifient : $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 2\pi q + \arg\{A\} = \text{const}$ (q = entier). Cette équation décrit une famille de plans parallèles, orthogonaux au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ (d'où le nom "onde plane").



Ces plans sont séparés d'une distance notée $\lambda = 2\pi/k$ (période spatiale). Comme $k = 2\pi\nu / c$, on a :

$$\lambda = c/\nu$$

où λ est appelée **longueur d'onde**. On a là une relation entre la période spatiale et la période temporelle.

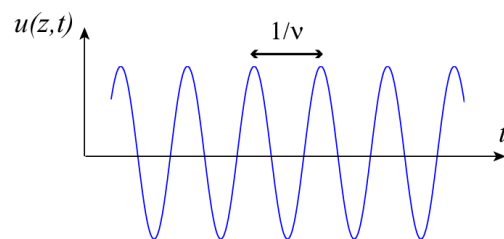
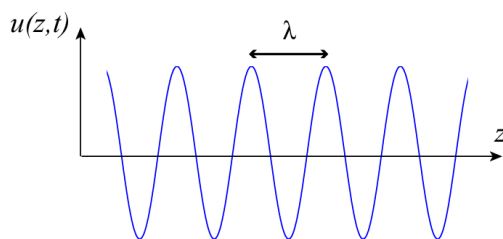
L'intensité d'une onde plane : $I(\mathbf{r}) = |A|^2 = \text{constante}$ (indépendante du point de l'espace). Par conséquent une onde plane transporterait une puissance infinie ! L'onde plane est donc une idéalisation. Une onde plane ne peut être considérée plane que localement.

On considère l'axe z comme la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$; alors $U(\mathbf{r}) = A \exp(-jkz)$ et la fonction d'onde correspondante est

$$u(\mathbf{r}, t) = |A| \cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A\}] = |A| \cos[2\pi\nu(t - z/c) + \arg\{A\}]$$

On voit sur cette expression que la fonction d'onde est :

- périodique dans le temps, de période $1/\nu$,
- périodique dans l'espace, de période $2\pi/k$, égale la longueur d'onde λ .



Comme la phase de la fonction d'onde, $2\pi\nu(t - z/c) + \arg\{A\}$, varie avec le temps et la position en fonction de la variable $t - z/c$, c est appelée la **vitesse de phase de l'onde**.

Dans un milieu d'indice de réfraction n :

- la vitesse de phase est $c = c_0/n$
- la longueur d'onde est $\lambda = c/\nu = c_0/n\nu$, donc $\lambda = \lambda_0/n$ où $\lambda_0 = c_0/\nu$ est la longueur d'onde dans le vide.

Pour une fréquence donnée ν , la longueur d'onde dans un milieu est réduite d'un facteur n par rapport à sa valeur dans le vide. Par conséquent, le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ augmente d'un facteur n par rapport à sa valeur dans le vide ($k_0 = 2\pi/\lambda_0$).

Lorsqu'une onde monochromatique se propage dans des milieux d'indices variables, la fréquence ne change pas ; en revanche vitesse et longueur d'onde sont modifiées.

3.2 L'onde sphérique

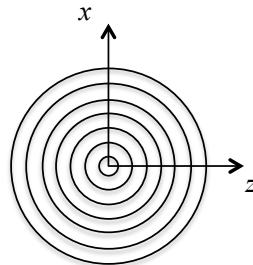
Une autre solution très simple de l'équation de Helmholtz est l'onde sphérique :

$$U(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} \exp(-jkr)$$

où r est la distance à l'origine. La satisfaction de l'équation de Helmholtz implique que $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$ est le nombre d'onde.

L'intensité est $I(\mathbf{r}) = |A|^2/r^2$ est inversement proportionnelle au carré de la distance.

Les fronts d'onde sont les surfaces $kr = 2\pi q$ ou $r = q\lambda$, où q est un entier. Les fronts d'onde sont des sphères concentriques séparées d'une distance radiale $\lambda = 2\pi/k = c/\nu$.



Fronts d'onde d'une onde sphérique dans le plan (Oxz).

Remarques sur le signe du terme de phase (sachant que la fonction d'onde complexe est $U(r)\exp(j2\pi\nu t)$) :

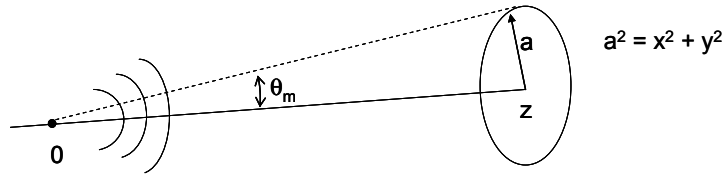
$U(r) = (A/r)\exp(-jkr)$ représente une onde sphérique émise par un point : onde divergente.

$U(r) = (A/r)\exp(+jkr)$ représente une onde sphérique se focalisant vers un point : onde convergente.

3.3 Approximation parabolique de l'onde sphérique

L'expression générale de l'onde sphérique est difficile à manipuler. Souvent, en pratique, on considère une propagation au voisinage d'une direction particulière. On va donc chercher à simplifier l'expression générale de l'onde sphérique lorsqu'on considère une propagation au voisinage d'un axe z .

Soit une onde sphérique au point $\mathbf{r} = (x, y, z)$ émise par le point O.



$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{1/2}$$

On note $\theta^2 = (x^2 + y^2)/z^2$. On peut écrire

$$\begin{aligned} r &= z(1 + \theta^2)^{1/2} \\ &= z \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8} + \dots \right) \approx z \left(1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \end{aligned}$$

En substituant $r = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$ dans la phase, et $r = z$ dans l'expression de $U(\mathbf{r})$, on obtient

$$U(r) \approx \frac{A}{z} \exp(-jkz) \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$$

Une expression plus précise de r est utilisée pour la phase car elle varie plus vite avec r que l'amplitude.

Cette approximation est appelée **approximation de Fresnel**.

Interprétation : Dans l'approximation de Fresnel, l'amplitude complexe d'une onde sphérique peut être considérée comme une onde plane $A \exp(-jkz)$ se propageant selon l'axe z , modulée par le terme

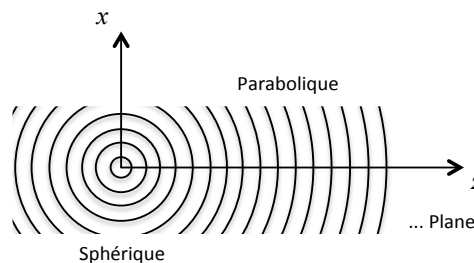
$\left(\frac{1}{z}\right) \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$ qui comporte un terme de phase quadratique avec la distance à l'axe :

$k \left(\frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$. La contribution de ce terme de phase est de courber les fronts d'onde plans de l'onde plane

en des fronts d'onde de forme parabolique. Ainsi, **l'onde sphérique est approximée par une onde parabolique**. Quand z devient très grand, la phase approche kz et l'amplitude varie lentement avec z , de sorte que l'onde sphérique ressemble à l'onde plane $\exp(-jkz)$.

Exemple : Onde émise par une étoile (à grande distance : onde sphérique. Au niveau de la Terre : onde plane). La notion d'onde plane n'est valable que localement.

L'approximation de Fresnel est très importante pour simplifier la théorie de la diffraction comme nous le verrons prochainement.



Condition de validité de l'approximation the Fresnel

$$\text{On a : } \exp(-jkr) = \exp\left[-jkz \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8} + \dots \right)\right]$$

L'approximation de Fresnel est valide quand $kz\theta^4/8$ est un très petit angle. Par convention (cela permet d'établir un critère simple), on considère $kz\theta^4/8 \ll \pi$, c'est à dire $(x^2 + y^2)^2 \ll 4z^3\lambda$. Pour les points (x, y) contenus dans un cercle de rayon a centré sur l'axe z , la condition de validité est $a^4 \ll 4z^3\lambda$, ou

$$\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1$$

où $\theta_m = a/z$ est l'angle maximum et

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$$

est appelé **nombre de Fresnel**

4. TRANSMITTANCE DE COMPOSANTS OPTIQUES

Nous allons examiner la transmittance (ou facteur de transmission) d'ondes optiques au travers de composants optiques transparents, tels que lames et lentilles. Les effets de réflexions à la surface de ces composants seront ignorés. L'effet d'absorption dans le matériau sera également ignoré. L'effet de ces composants sera donc uniquement sur la phase de l'onde. Nous allons voir comment ces composants modifient la phase et en particulier le front d'onde, ce qui a pour conséquence de modifier la propagation de l'onde optique.

4.1 Lame transparente à faces planes et parallèles

On considère tout d'abord la transmission d'une onde plane au travers d'une lame transparente d'indice de réfraction n et d'épaisseur d .

Les surfaces planes de la lame se situent dans les plans $z = 0$ et $z = d$. L'onde incidente se propage dans la direction z . On note $U(x, y, z)$ l'amplitude complexe de l'onde.

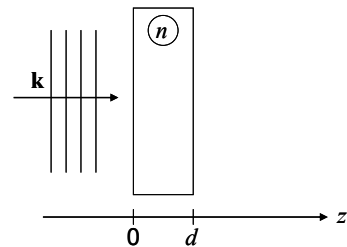
Les réflexions sur les faces étant ignorées, $U(x, y, z)$ est continue aux interfaces. L'onde reste plane.

L'onde continue à se propager dans la lame avec un nombre d'onde modifié : nk_0 , ; dans la lame $U(x, y, z)$ est proportionnelle à $\exp(-jkz) = \exp(-jnk_0z)$. Donc $U(x, y, d)/U(x, y, 0) = \exp(-jn k_0 d)$

Le rapport $t(x, y) = U(x, y, d)/U(x, y, 0)$ représente la **transmittance** (complexe) de la lame.

$$t(x, y) = \exp(-jnk_0 d)$$

La lame introduit un déphasage $nk_0 d = 2\pi(d/\lambda)$.



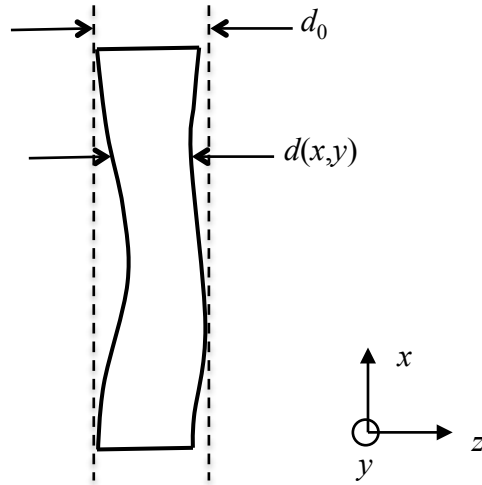
4.2 Lame d'épaisseur variable

On considère maintenant une lame transparente dont l'épaisseur $d(x, y)$ est variable. d est supposé varier lentement en fonction de x et y . L'épaisseur maximale est notée d_0 . L'onde traverse donc une lame d'épaisseur $d(x, y)$ entourée par une épaisseur d'air $d_0 - d(x, y)$. La transmittance locale est le produit de la transmittance d'une couche d'air d'épaisseur $d_0 - d(x, y)$ par la transmittance du matériau d'épaisseur $d(x, y)$: $t(x, y) = \exp[-jnk_0 d(x, y)] \exp\{-jk_0 [d_0 - d(x, y)]\}$, et donc

$$t(x, y) = h_0 \exp[-j(n-1)k_0 d(x, y)]$$

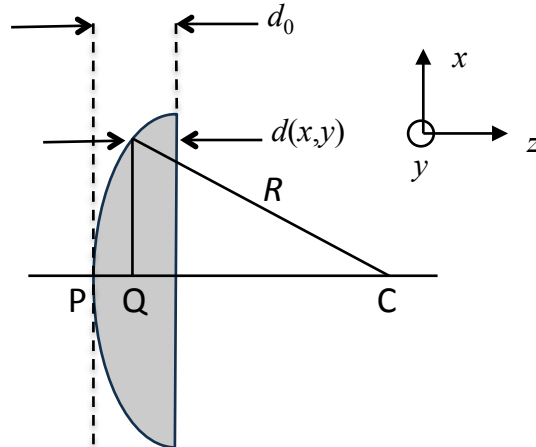
où $h_0 = \exp[-jk_0 d_0]$ est un terme de phase constant (indépendant de x et y).

Cette relation est valable dans l'approximation paraxiale (petits angles) et si l'épaisseur d_0 est petite.



4.3 Lentille mince

On va appliquer l'expression générale de la transmittance d'une lame mince d'épaisseur variable au cas d'une lentille mince. On suppose par exemple la lentille de forme plan-sphérique :



L'épaisseur au point (x, y) est $d(x, y) = d_0 - PQ = d_0 - (R - QC)$, soit

$$d(x, y) = d_0 - \left\{ R - \left[R^2 - (x^2 + y^2) \right]^{1/2} \right\}$$

On va simplifier cette expression. On considère que x et y sont suffisamment petits devant R , de sorte que $x^2 + y^2 \ll R^2$. Dans ce cas :

$$\left[R^2 - (x^2 + y^2) \right]^{1/2} = R \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right)^{1/2} \approx R \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2} \right)$$

et

$$d(x, y) \approx d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2R}$$

On obtient alors

$$t(x, y) \approx h_0 \exp\left(jk_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}\right)$$

où

$$f = \frac{R}{n-1}$$

f s'identifie à la focale de la lentille.

$h_0 = \exp[-jnk_0 d_0]$ est un terme de phase constant sans signification particulière. On considère généralement pour simplifier l'écriture que $h_0 = 1$, de sorte que la transmittance d'une lentille de focale f est :

$$t(x, y) = \exp\left(jk_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}\right)$$

Cette expression ne dépend que de la focale de la lentille. La forme de la lentille n'intervient pas (dans le cadre des approximations qui ont été faites).

On voit que la lentille introduit un déphasage qui dépend de la distance à l'axe optique. Ce déphasage est proportionnel à $x^2 + y^2$; Lorsque l'onde incidente est plane (front d'onde plan), après la lentille le front d'onde devient de forme parabolique (c'est à dire « sphérique »).

Chapitre 3

OPTIQUE DE FOURIER

1. INTRODUCTION

L'optique de Fourier est une description de la propagation de la lumière basée sur **l'analyse de Fourier** et les **systèmes linéaires**. C'est une manière particulièrement commode de traiter l'optique scalaire.

L'analyse de Fourier est basée sur le fait qu'une fonction arbitraire puisse se décomposer en une somme de fonctions « sinusoïdales » (exponentielles complexes) de différentes fréquences et amplitudes :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) \exp(-j2\pi\nu t) d\nu$$

La fonction $\tilde{f}(\nu) \exp(-j2\pi\nu t)$ est une fonction harmonique de fréquence ν et d'amplitude complexe $\tilde{f}(\nu)$. L'amplitude complexe $\tilde{f}(\nu)$, en fonction de la fréquence, est appelée transformée de Fourier de $f(t)$. On peut montrer que :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(j2\pi\nu t) dt$$

Cette approche est particulièrement utile et puissante pour décrire les systèmes linéaires.

Rappel : Un **système linéaire** est un système qui peut être décrit par des équations linéaires, ou encore qui obéit au principe de superposition.

Si la réponse du système à une excitation harmonique quelconque est connue, alors la réponse du système à une excitation quelconque peut alors être déterminée (principe de superposition).

La réponse d'un système linéaire peut donc être déterminée en utilisant l'analyse de Fourier à l'entrée (on décompose l'excitation en somme d'excitations harmoniques) et le principe de superposition en sortie.

Extension à 2 dimensions

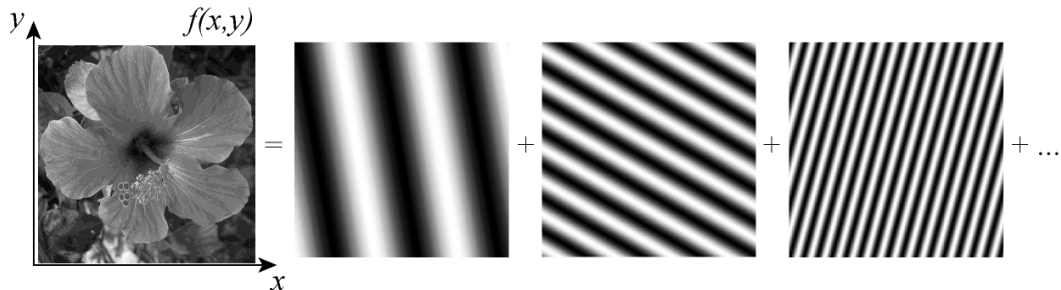
Considérons une fonction de 2 variables $f(x, y)$. On suppose que x et y représentent des coordonnées **spatiales**. La fonction $f(x, y)$ peut aussi être écrite comme somme de fonctions harmoniques (exponentielles complexes) de x et y :

$$f(x, y) = \iint \tilde{f}(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y$$

$\tilde{f}(\nu_x, \nu_y)$ est l'amplitude complexe des fonctions harmoniques, ν_x et ν_y sont les **fréquences spatiales** dans les directions x et y .

La fonction harmonique $\tilde{f}(\nu_x, \nu_y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]$ constitue la brique de la théorie de l'optique de Fourier. Elle permet de générer une fonction arbitraire de 2 variables $f(x, y)$. Le poids $\tilde{f}(\nu_x, \nu_y)$ des différentes fonctions harmoniques est déterminé par la transformée de Fourier à deux dimensions :

$$\tilde{f}(\nu_x, \nu_y) = \iint f(x, y) \exp[j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy$$

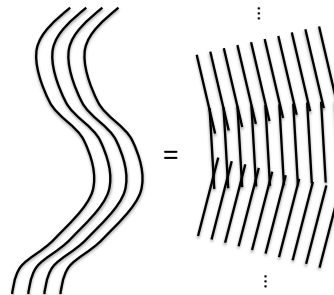


Voyons maintenant comment utiliser ce résultat mathématique en optique, pour modéliser la propagation de la lumière.

Considérons une onde plane. Son amplitude complexe s'écrit $U(x, y, z) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$. Dans un plan quelconque z , $U(x, y, z)$ est une fonction harmonique de x et y .

Dans le plan $z = 0$, par exemple, $U(x, y, 0)$ est la fonction harmonique $A \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]$ où $\nu_x = k_x/2\pi$ and $\nu_y = k_y/2\pi$ sont les fréquences spatiales.

Il résulte du principe de Fourier, qu'une onde optique quelconque **$U(x, y, z)$ peut se décomposer en une somme d'ondes planes** (avec différentes directions de propagation et différentes amplitudes).



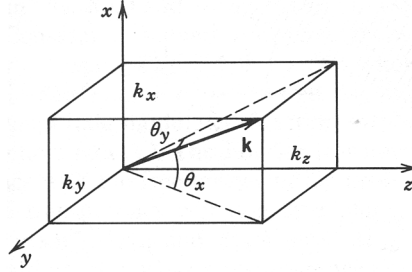
Si l'on sait comment un système linéaire modifie une onde plane, alors en utilisant le principe de superposition, on peut déterminer l'effet de ce système sur une onde optique quelconque. Cette méthode permet de décrire la propagation de la lumière au travers de composants optiques linéaires, ce qui inclut l'espace libre (l'espace libre est un système linéaire, car l'équation d'onde est une équation linéaire). Les amplitudes complexes de l'onde dans 2 plans orthogonaux à l'axe optique z peuvent être considérées comme l'entrée et la sortie du système optique considérée comme un système linéaire.

2. PROPAGATION DANS L'ESPACE LIBRE

On va établir ici une méthode de calcul de la propagation d'une onde optique dans l'espace libre basée sur les résultats énoncés précédemment.

2.1 Décomposition en ondes planes

Considérons une onde plane d'amplitude complexe $U(x, y, z) = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)]$ de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, longueur d'onde λ , nombre d'onde $k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = 2\pi/\lambda$, et enveloppe complexe A . Le vecteur $\mathbf{k}$ fait avec les plans y - z et x - z les angles θ_x and θ_y :



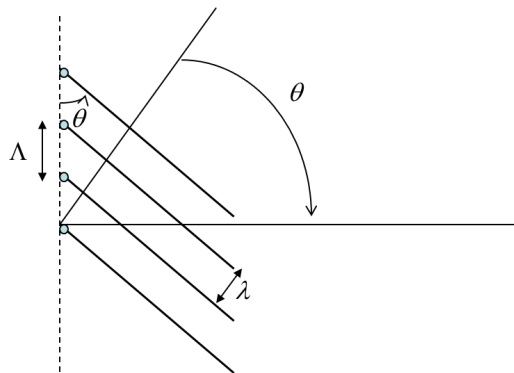
L'amplitude complexe dans le plan $z = 0$, $U(x, y, 0)$, est la fonction harmonique $f(x, y) = A \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$ de fréquences spatiales $v_x = k_x/2\pi$ and $v_y = k_y/2\pi$.

Les **angles** du vecteur d'onde sont par conséquent reliés **aux fréquences spatiales** de la fonction harmonique par :

$$\begin{cases} \sin \theta_x = \frac{k_x}{k} = \frac{2\pi v_x}{2\pi/\lambda} = \lambda v_x \\ \sin \theta_y = \frac{k_y}{k} = \frac{2\pi v_y}{2\pi/\lambda} = \lambda v_y \end{cases}$$

Relation entre les fréquences spatiales et la direction de propagation : Propagation selon l'axe z : $v_x = v_y = 0$. Si $v \neq 0$: la direction de propagation fait un angle avec l'axe z . L'angle augmente quand v augmente.

Les formules précédentes peuvent s'interpréter par le schéma suivant :



On considère une onde se propageant avec un angle θ (θ_x ou θ_y) par rapport à l'axe z . La période des fronts d'onde est λ . On note $\Lambda_x = 1/v_x$ et $\Lambda_y = 1/v_y$ les périodes de la fonction harmonique dans les directions x et y . On voit que les angles $\theta_x = \sin^{-1}(\lambda/\Lambda_x)$ and $\theta_y = \sin^{-1}(\lambda/\Lambda_y)$ sont déterminés par les rapports de la longueur d'onde de la lumière sur la période de la fonction harmonique dans chaque direction.

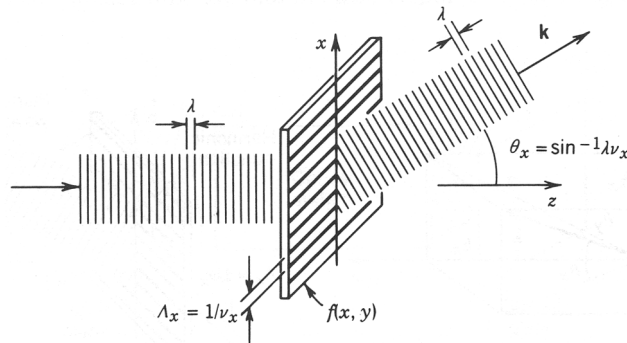
Simplification : Si $k_x \ll k$ and $k_y \ll k$, de sorte que le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est paraxial, les angles θ_x , and θ_y sont petits ; on peut alors écrire :

$$\begin{cases} \theta_x = \lambda \nu_x \\ \theta_y = \lambda \nu_y \end{cases}$$

Les angles d'inclinaison du vecteur d'onde par rapport à l'axe z sont directement proportionnels aux fréquences spatiales.

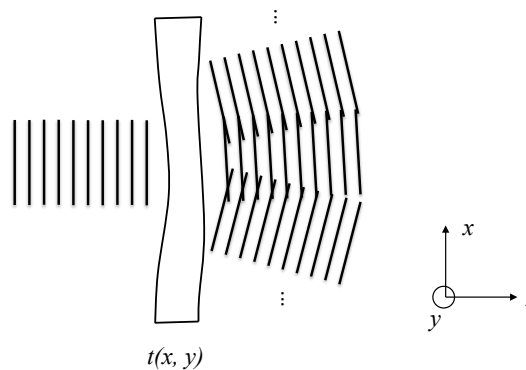
2.2 Transmittance de composants optiques

Considérons un composant optique mince dont la transmittance complexe s'écrit $f(x, y) = \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)]$. Lorsqu'une onde plane d'amplitude unitaire se propageant dans la direction z est transmise par ce composant optique, l'onde est modulée par la fonction harmonique $f(x, y)$, de sorte que $U(x, y, 0) = f(x, y)$. L'onde incidente, plane, est alors convertie en une nouvelle onde plane dont le vecteur d'onde est caractérisé par les angles $\theta_x = \sin^{-1} \lambda \nu_x$, et $\theta_y = \sin^{-1} \lambda \nu_y$.



Référence : “Fundamentals of Photonics” (Wiley Series in Pure and Applied Optics). Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich. John Wiley & Sons, 1st edition (August 15, 1991)

Composant quelconque (transmittance arbitraire) : Une transmittance arbitraire $t(x, y)$ d'un composant optique peut être décomposée en une somme de fonctions harmoniques d'amplitudes et fréquences spatiales différentes. L'onde optique transmise est par conséquent aussi la somme d'ondes planes se propageant selon différentes directions. L'amplitude de chacune de ces ondes planes est proportionnelle à l'amplitude de la composante harmonique correspondant.



Plus généralement, si $t(x, y)$ est une superposition de fonctions harmoniques,

$$t(x, y) = \iint T(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y$$

de fréquences (v_x, v_y) et amplitudes $T(v_x, v_y)$, l'onde transmise $U(x, y, z)$ est la superposition d'ondes planes,

$$U(x, y, z) = \iint T(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] \exp(-jk_z z) dv_x dv_y$$

d'enveloppes complexes $T(v_x, v_y)$, où $k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} = 2\pi(1/\lambda^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}$.

$T(v_x, v_y)$ est la TF de $t(x, y)$.

Condition de validité : $v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$

2.3 Fonction de transfert de l'espace libre

L'amplitude complexe d'une onde plane s'écrit

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)] \\ &= A \exp[-j(k_x x + k_y y)] \exp[-jk_z z] \\ &= A \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] \exp[-jk_z z] \end{aligned}$$

L'amplitude complexe d'une onde plane en $z = d$ se déduit de l'amplitude complexe de cette onde en $z = 0$ (fonction harmonique $A \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)]$) en multipliant par le terme de phase $\exp[-jk_z d]$.

Comme $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ (Helmholtz)

$$k_z = \pm (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} = \pm 2\pi(1/\lambda^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}$$

- Si $v_x^2 + v_y^2 \leq \frac{1}{\lambda^2}$, alors k_z est réel. Le signe de k_z dépend de la direction de propagation.

On considère ici une propagation dans la direction des z croissants (signe +). On peut alors écrire

$$U(x, y, d) = U(x, y, 0) \times H_d(v_x, v_y)$$

où

$$H_d(v_x, v_y) = \exp \left[-j2\pi \left(\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2 \right)^{1/2} d \right]$$

H_d = fonction de transfert de l'espace libre.

L'amplitude de la fonction de transfert de l'espace libre est $|H_d(v_x, v_y)| = 1$. L'intensité d'une onde plane n'est pas modifiée au cours de sa propagation. Elle subit seulement un changement de phase.

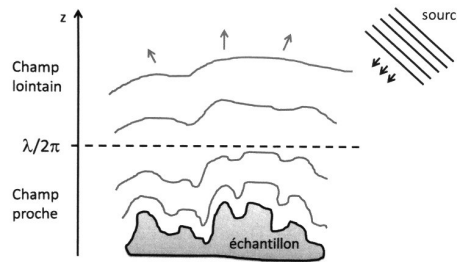
- Si $v_x^2 + v_y^2 > \frac{1}{\lambda^2}$, alors $k_z = \pm j2\pi(v_x^2 + v_y^2 - 1/\lambda^2)^{1/2}$. La fonction de transfert est réelle :

$$H_d(v_x, v_y) = \exp\left[\pm 2\pi\left(v_x^2 + v_y^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} d\right]. \text{ Le signe + donne une fonction exponentielle}$$

croissante, ce qui n'est pas acceptable physiquement. On a donc

$$H_d(v_x, v_y) = \exp\left[-2\pi\left(v_x^2 + v_y^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2} d\right], \text{ qui représente un facteur d'atténuation. L'onde}$$

est alors appelée **onde évanescente**. On voit que la quantité $1/\lambda$ constitue une fréquence de coupure du système. Les informations ayant des fréquences plus grandes que $1/\lambda$ (c'est à dire les informations de taille plus petite que λ) ne peuvent pas être transmises par une onde optique sur des grandes distances. Par conséquent, on comprend que la résolution spatiale d'un système d'imagerie en champ lointain soit limitée par la longueur d'onde. Il est possible de dépasser cette limite, on exploitant le champ proche optique (onde optique qui ne s'est pas propagée). La technique s'appelle la microscopie de champ proche optique. Elle donne accès à une super-résolution (pas limitée par λ), de quelques nanomètres.



*La propagation a un rôle de filtre passe-bas des fréquences spatiales.
La propagation lisse le front d'onde*

Approximation de Fresnel

L'expression de la fonction de transfert de l'espace libre peut se simplifier si les fréquences spatiales sont telles que $v_x^2 + v_y^2 \ll 1/\lambda^2$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\lambda^2} - v_x^2 - v_y^2\right)^{1/2} &= \frac{1}{\lambda} \left[1 - \lambda^2(v_x^2 + v_y^2)\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda^2(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{\lambda^4(v_x^2 + v_y^2)^2}{8} - \dots\right] \end{aligned}$$

On peut ainsi donner une expression simplifiée de la fonction de transfert de l'espace libre :

$$H_d(v_x, v_y) \approx \exp(-jkd) \exp\left[j\pi\lambda d(v_x^2 + v_y^2)\right]$$

Dans cette approximation, la phase est une fonction quadratique des fréquences spatiales. Cette approximation est appelée **approximation de Fresnel** (on va voir que la condition pour faire cette approximation est la même que celle permettant de simplifier une onde sphérique en onde parabolique ; il s'agit donc de la même approximation)

☞ La condition de validité de l'approximation de Fresnel est que $2\pi \left[\frac{\lambda^3}{8} (\nu_x^2 + \nu_y^2)^2 \right] d \ll \pi$. En notant $\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 \approx \lambda^2 (\nu_x^2 + \nu_y^2)$, la condition de validité peut être réécrite comme :

$$\frac{\theta^4 d}{4\lambda} \ll 1$$

Si a est la plus grande distance radiale dans le plan d'arrivée, le plus grand angle est $\theta_m \approx a/d$. La condition de validité de l'approximation de Fresnel peut s'écrire comme :

$$\boxed{\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1}$$

où $N_F = a^2 / \lambda d$ est le nombre de Fresnel.

2.4 Propagation d'une onde monochromatique quelconque

On étudie maintenant la propagation d'une onde monochromatique quelconque dans l'espace libre.

On considère une monochromatique quelconque d'amplitude complexe $U(x, y, z)$ en $z = 0$. On cherche $U(x, y, z)$ en $z = d$, c'est à dire l'amplitude complexe de cette onde après propagation sur une distance $z = d$.

On a vu, d'après le principe de Fourier, que l'onde $U(x, y, 0)$ peut s'écrire comme une somme d'ondes planes :

$$U(x, y, 0) = \iint \tilde{U}(\nu_x, \nu_y, 0) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y$$

$\tilde{U}(\nu_x, \nu_y, 0)$, transformée de Fourier de $U(x, y, 0)$, représente la décomposition en ondes planes de $U(x, y, 0)$.

D'après précédemment, le calcul de la propagation d'une onde plane s'effectue très simplement en multipliant par la fonction de transfert H_d .

On peut donc connaître la distribution d'ondes planes en $z = d$ à partir de la distribution d'onde planes en $z = 0$, en multipliant chacune de ces ondes planes par la fonction H_d .

L'onde $U(x, y, z)$ en $z = d$ est la somme de ces ondes planes propagées :

$$\begin{aligned} U(x, y, d) &= \iint \tilde{U}(\nu_x, \nu_y, 0) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] \times H_d(\nu_x, \nu_y) d\nu_x d\nu_y \\ &= \iint \{ \tilde{U}(\nu_x, \nu_y, 0) \times H_d(\nu_x, \nu_y) \} \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] d\nu_x d\nu_y \end{aligned}$$

L'onde $U(x, y, z)$ en $z = d$ est la transformée de Fourier inverse de $\tilde{U}(\nu_x, \nu_y, 0) \times H_d(\nu_x, \nu_y)$

2.5 Intégrale de Fresnel

En écrivant de manière condensée le résultat obtenu précédemment :

$$U(d) = TF^{-1} \{ TF[U(0)] \times H_d \}$$

$$U(d) = U(0) * FT^{-1}(H_d) \text{ (convolution).}$$

$$= U(0) * h_d$$

On peut calculer aisément³ la fonction h_d , transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert H_d . On obtient :

$$h_d(x, y) = h_0 \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2d}\right) \text{ avec } h_0 = \left(\frac{j}{\lambda d}\right) \exp(-jkd)$$

La fonction h_d est appelée réponse impulsionnelle de l'espace libre. Cette fonction est proportionnelle à l'amplitude complexe en $z = d$ d'une onde parabolique centrée en l'origine (0, 0).

Une autre méthode pour calculer la propagation d'une onde monochromatique quelconque. Pour relier l'amplitude complexe d'une onde monochromatique quelconque entre deux plans situés en $z = 0$ et $z = d$, on peut considérer l'onde dans le plan $z = 0$ comme une superposition de points, qui émettent chacun une onde parabolique. L'onde émise par le point $(x', y', 0)$ a une amplitude $U(x', y', 0)$; son amplitude complexe s'écrit $U(x', y', 0)h_d(x - x', y - y')$. La somme de toutes ces contributions s'écrit :

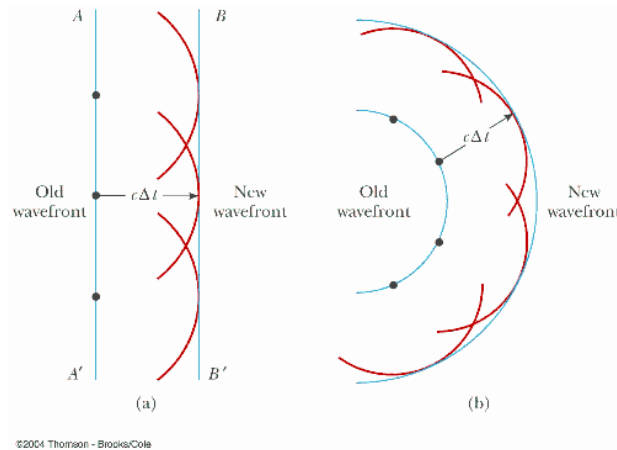
$$U(x, y, d) = \iint U(x', y', 0)h_d(x - x', y - y')dx'dy'$$

On reconnaît une opération de convolution.

$$U(x, y, d) = h_0 \iint U(x', y', 0) \exp\left[-j\pi \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{\lambda d}\right] dx'dy'$$

Cette relation s'appelle « intégrale de Fresnel » ou « transformée de Fresnel »

Remarque : l'intégrale de Fresnel peut être obtenue directement par simplification de l'intégrale de Rayleigh et Sommerfeld (simplification dite de Fresnel). L'intégrale de Rayleigh et Sommerfeld est établie à partir d'une simplification du théorème intégral d'Helmholtz et Kirchhoff, théorème basé sur l'équation de Helmholtz et le théorème de Green (cette approche est décrite en Annexe)



³ : Utiliser la formule de transformation de Fourier : $\exp\left[-\pi a(v_x^2 + v_y^2)\right] \rightarrow \frac{1}{a} \exp\left[-\frac{\pi}{a}(x^2 + y^2)\right]$ et poser $a = -j\lambda d$ et $k = 2\pi/\lambda$

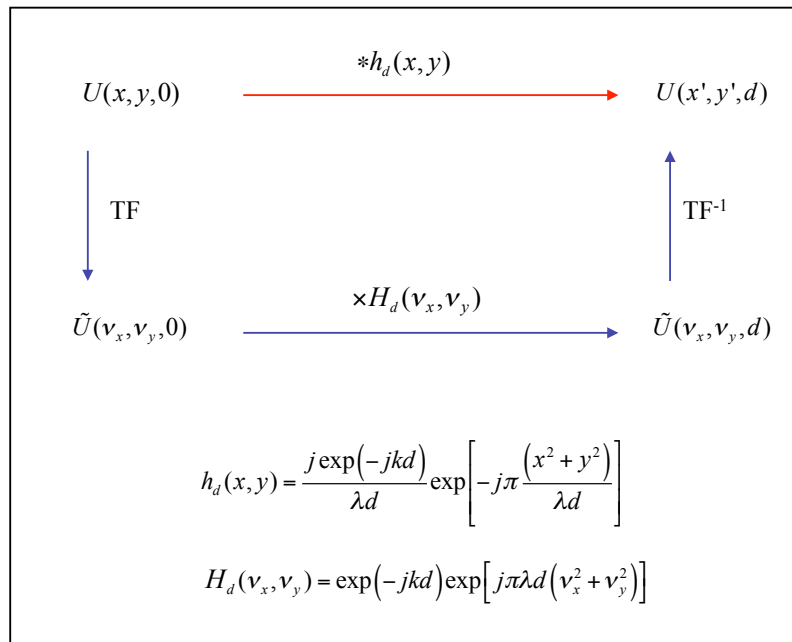
L'intégrale de Fresnel est une expression mathématique d'un principe bien connu en optique : le principe de **Huygens-Fresnel**. En effet, d'après le principe de Huygens-Fresnel, chaque point d'un front d'onde est considéré comme une source de lumière ponctuelle qui émet une onde sphérique élémentaire. L'onde dans un autre plan est constituée de la superposition de ces ondes sphériques qui se sont propagées. Or, dans l'approximation de Fresnel, une onde sphérique centrée en (0,0) est approximée par une onde parabolique d'expression :

$$h(x,y) = \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2d}\right)$$

On retrouve donc ainsi l'intégrale de Fresnel.

Résumé

Dans le cadre de l'approximation de Fresnel, il existe 2 méthodes pour déterminer l'amplitude complexe d'une onde après propagation. La méthode dans l'espace direct où l'onde est considérée comme superposition d'ondes paraboliques élémentaires (ondes sphériques), et la méthode dans l'espace de Fourier où l'onde est décomposée en une somme d'ondes planes. Les procédures de calcul sont résumées dans le tableau ci-dessous :



3. TRANSFORMEE DE FOURIER OPTIQUE

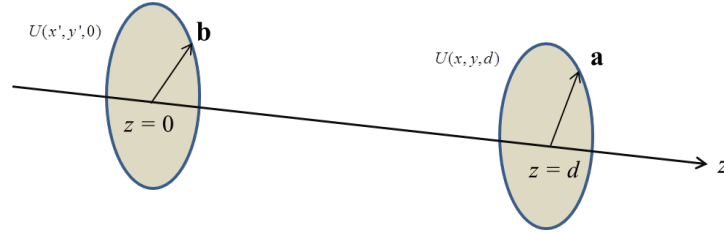
3.1 Approximation de Fraunhofer

On considère la relation entre $U(x,y,d)$ et $U(x',y',0)$ dans l'espace direct. Les amplitudes dans les deux plans distincts, lorsque l'approximation de Fresnel est valable, sont reliées par l'intégrale de Fresnel :

$$U(x, y, d) = h_0 \iint U(x', y', 0) \exp \left[-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d} \right] dx' dy'$$

où

$$h_0 = \left(\frac{j}{\lambda d} \right) \exp(-jkd)$$



On considère l'amplitude complexe $U(x', y', 0)$ dans le plan $z = 0$ en des points situés à l'intérieur d'un cercle, centré sur l'axe optique, de rayon b . On suppose que la distance d est suffisamment grande pour que le nombre de Fresnel $N_F' = b^2 / \lambda d \ll 1$.

On a :

$$\begin{aligned} (\pi / \lambda d) [(x-x')^2 + (y-y')^2] &= (\pi / \lambda d) [(x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - 2(xx' + yy')] \\ &\approx (\pi / \lambda d) (x^2 + y^2) - (2\pi / \lambda d) (xx' + yy') \end{aligned}$$

Et donc

$$U(x, y, d) = h_0 \exp \left[-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d} \right] \iint U(x', y', 0) \exp \left[j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d} \right] dx' dy'$$

On constate que :

$$U(x, y, d) = h_0 \exp \left[-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d} \right] \tilde{U} \left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}, 0 \right)$$

L'amplitude complexe de l'onde en $z = d$ est donc proportionnelle à la transformée de Fourier de l'amplitude complexe de l'onde en $z = 0$, multipliée par un terme correspondant à une onde sphérique divergente issue du point O.

Considérons l'amplitude complexe $U(x, y, d)$ dans le plan $z = d$ en des points situés à l'intérieur d'un cercle, centré sur l'axe optique, de rayon a . Si l'on suppose que la distance d est suffisamment grande pour que le nombre de Fresnel $N_F = a^2 / \lambda d \ll 1$, on a alors : $\exp \left[-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d} \right] \approx 1$

et donc

$$U(x, y, d) \approx h_0 \iint U(x', y', 0) \exp \left[j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d} \right] dx' dy'$$

On constate qu'il y a alors une simple relation de transformée de Fourier entre les amplitudes complexes $U(x, y, d)$ et $U(x', y', 0)$:

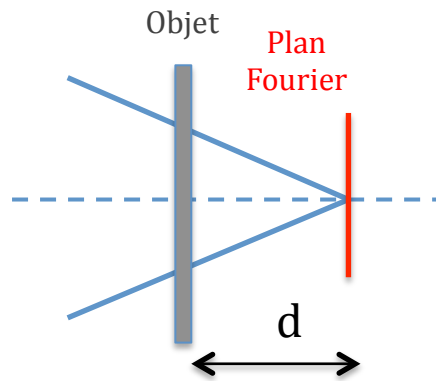
$$U(x, y, d) \propto \tilde{U} \left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}, 0 \right)$$

Dans l'approximation dite de **Fraunhofer**, l'amplitude complexe $U(x, y, d)$ d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ , en $z = d$, est proportionnelle à la **transformée de Fourier** de l'amplitude complexe $U(x, y, 0)$ en $z = 0$, calculée aux fréquences spatiales $\nu_x = x/\lambda d$ et $\nu_y = y/\lambda d$, multipliée un terme de phase sphérique. L'approximation est valide pour l'amplitude si $U(x, y, 0)$ est confinée à un cercle de rayon b tel que $b^2/\lambda d \ll 1$ et si $U(x, y, d)$ est confinée à un cercle de rayon a tel que $a^2/\lambda d \ll 1$.

Remarque : Dans l'approximation de **Fraunhofer**, l'intensité $I(x, y, d)$ d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ , en $z = d$, est proportionnelle au module carré de la **transformée de Fourier** de l'amplitude complexe $U(x, y, 0)$ en $z = 0$, calculée aux fréquences spatiales $\nu_x = x/\lambda d$ et $\nu_y = y/\lambda d$. L'approximation est valide si $U(x, y, 0)$ est confinée à un cercle de rayon b tel que $b^2/\lambda d \ll 1$.

Notons que l'approximation de Fraunhofer est plus difficile à satisfaire que l'approximation de Fresnel

3.2 Le plan de Fourier



Un objet de transmittance $t(x, y)$ est éclairé par une onde sphérique convergent à la distance d . Dans le plan de l'objet, l'amplitude complexe s'écrit :

$$U(x, y, 0) = t(x, y) \exp \left[+j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d} \right]$$

Dans le plan de convergence de l'onde sphérique, l'amplitude est obtenue à partir d'un calcul de propagation dans l'espace libre sur une distance d . L'intégrale de Fresnel s'écrit :

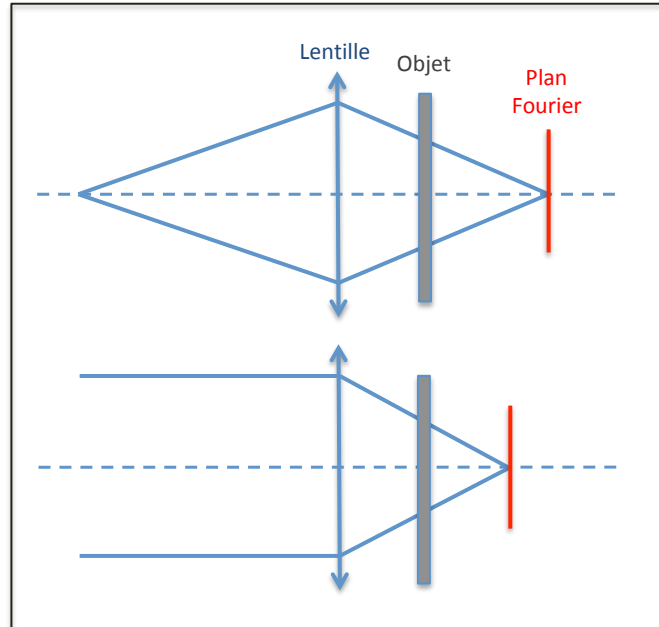
$$\begin{aligned} U(x, y, d) &= h_0 \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{\lambda d} \right] dx' dy' \\ &= h_0 \int_{-\infty}^{\infty} t(x', y') \exp \left[+j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d} \right] \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{\lambda d} \right] dx' dy' \\ &= h_0 \exp \left[-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d} \right] \int_{-\infty}^{\infty} t(x', y') \exp \left[2j\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d} \right] dx' dy' \end{aligned}$$

soit

$$U(x, d) = h_0 \exp \left[-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d} \right] \tilde{t} \left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d} \right)$$

Dans le plan de convergence d'une onde sphérique, l'amplitude complexe est proportionnelle à la transformée de Fourier de la transmittance de l'objet traversé par cette onde, multipliée par un terme de phase (onde sphérique divergente issue du plan de l'objet). Ce plan est appelé **plan de Fourier**.

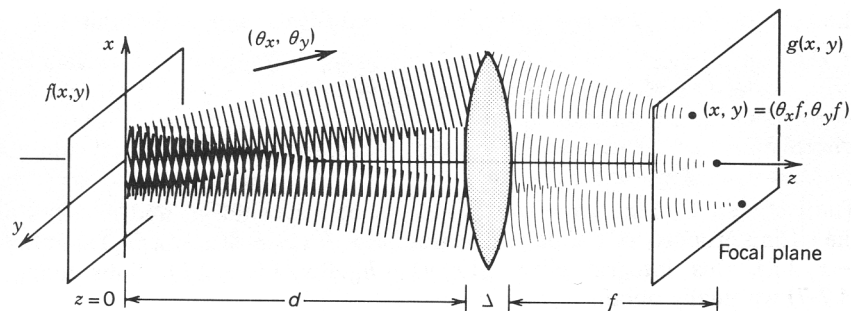
Le plan de Fourier peut être réalisé au moyen d'un système optique convergent (voir figure ci-dessous).



Formation du plan de Fourier au moyen d'une lentille convergente

3.3 Amplitude dans le plan focal d'une lentille

L'objet est placé maintenant à une distance d devant la lentille. Il est éclairé par une onde plane. On va s'intéresser à l'amplitude de l'onde dans le plan focale de la lentille.



Reference : "Fundamentals of Photonics" (Wiley Series in Pure and Applied Optics). Bahaa E. A. Saleh, Malvin Carl Teich. John Wiley & Sons, 1st edition (August 15, 1991)

L'onde transmise par l'objet peut être décomposée en une somme d'ondes planes. Ces différentes ondes planes peuvent être séparées en utilisant une lentille convergente (voir figure ci-dessus). La lentille transforme chacune de ces ondes planes en une onde parabolique (sphérique) focalisée dans le plan focal arrière de la lentille. Considérons une de ces ondes planes caractérisée par les angles d'inclinaison (θ_x, θ_y) ; elle est transformée par la lentille en une onde sphérique centrée au point $(x = \theta_x f, y = \theta_y f)$, où f = focale de la lentille. Ainsi, à chaque direction (θ_x, θ_y) , c'est à dire à chaque fréquence spatiale $(\nu_x = \theta_x / \lambda, \nu_y = \theta_y / \lambda)$ correspond un point (x, y) dans le plan focal de la

lentille. Dans le plan focal, on a donc la distribution des fréquences spatiales de l'onde, c'est à dire sa transformée de Fourier. Le plan focal arrière de la lentille est un plan de Fourier.

Appelons $f(x, y)$ l'amplitude complexe de l'onde optique dans le plan $z = 0$, situé à une distance d de la lentille (voir figure ci-dessus). Dans le plan focal arrière de la lentille l'amplitude s'écrit :

$$g(x, y) \propto \tilde{f}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

On va faire maintenant le calcul complet afin de déterminer le coefficient de proportionnalité dans l'équation précédente.

- Dans le plan $z = 0$, l'onde plane d'angle d'inclinaison (θ_x, θ_y) a une amplitude complexe

$$U(x, y, 0) = \tilde{f}(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)].$$

- Dans le plan $z = d^-$ (juste avant la lentille), l'amplitude de l'onde plane est :

$$U(x, y, d^-) = \tilde{f}(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] \times H_d(v_x, v_y),$$

$$\text{avec } H_d(v_x, v_y) = \exp(-jkd) \exp[j\pi\lambda d(v_x^2 + v_y^2)].$$

- Après traversée de la lentille,

$$U(x, y, d^+) = \tilde{f}(v_x, v_y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] \times H_d(v_x, v_y) \times t(x, y)$$

$$\text{où } t(x, y) = \exp\left(jk_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) = \exp\left(j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f}\right) \text{ est la transmittance de la lentille}$$

On écrit

$$\begin{cases} -2v_x x + x^2 / \lambda f = (x^2 - 2v_x \lambda f x) / \lambda f = [(x - x_0)^2 - x_0^2] / \lambda f \\ -2v_y y + y^2 / \lambda f = (y^2 - 2v_y \lambda f y) / \lambda f = [(y - y_0)^2 - y_0^2] / \lambda f \end{cases}$$

$$\text{où } x_0 = \lambda v_x f \text{ et } y_0 = \lambda v_y f,$$

L'amplitude de l'onde peut être réécrite comme :

$$U(x, y, d^+) = A(v_x, v_y) \exp\left[j\pi \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\lambda f}\right]$$

où

$$A(v_x, v_y) = \exp(-jkd) \exp[j\pi\lambda(d - f)(v_x^2 + v_y^2)] \tilde{f}(v_x, v_y)$$

On reconnait ici l'amplitude complexe d'une onde parabolique (sphérique) qui converge vers le point (x_0, y_0) dans le plan focal image de la lentille.

On calcule maintenant la propagation dans l'espace libre entre la lentille et son plan focal. En écrivant l'intégrale de Fresnel, on a :

$$U(x, y, d + f) = h_0 \iint U(x', y', d^+) \exp\left[-j\pi \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{\lambda f}\right] dx' dy'$$

$$U(x, y, d + f) = h_0 \iint A(v_x, v_y) \exp \left[j\pi \frac{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2}{\lambda f} \right] \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{\lambda f} \right] dx' dy'$$

$$U(x, y, d + f) = h_0 \iint A(v_x, v_y) \exp \left[j\pi \frac{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2}{\lambda f} \right] dx' dy'$$

$$U(x, y, d + f) = h_0 \iint A(v_x, v_y) \exp \left[j\pi \frac{2x'(x - x_0) + 2y'(y - y_0) + (x_0^2 + y_0^2) - (x^2 + y^2)}{\lambda f} \right] dx' dy'$$

$$U(x, y, d + f) = h_0 A(v_x, v_y) \exp \left[j\pi \frac{(x_0^2 + y_0^2) - (x^2 + y^2)}{\lambda f} \right] \iint \exp \left[j2\pi \frac{(x - x_0)x' + (y - y_0)y'}{\lambda f} \right] dx' dy'$$

$$U(x, y, d + f) = h_0 A(v_x, v_y) \exp \left[j\pi \frac{(x_0^2 + y_0^2) - (x^2 + y^2)}{\lambda f} \right] (\lambda f)^2 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

$$U(x, y, d + f) = h_0 (\lambda f)^2 A(v_x, v_y) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

où

$$h_0 = \left(\frac{j}{\lambda f} \right) \exp(-jkf)$$

L'onde plane est donc focalisée au point $x_0 = \lambda v_x f$, $y_0 = \lambda v_y f$.

La dernière étape consiste à intégrer la contribution de toutes les ondes planes élémentaires (toutes les valeurs de v_x et v_y).

$$g(x, y) = h_0 (\lambda f)^2 \iint A(v_x, v_y) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dv_x dv_y$$

Sachant que $\delta(x - x_0) = \delta(x - \lambda f v_x) = \left(\frac{1}{\lambda f} \right) \delta\left(v_x - \frac{x}{\lambda f}\right)$, idem avec y [Rappel : $\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$]

On a finalement:

$$g(x, y) = h_0 A(x / \lambda f, y / \lambda f)$$

c'est à dire

$$\boxed{\begin{aligned} g(x, y) &= h_l \exp \left[j\pi \frac{(x^2 + y^2)(d - f)}{\lambda f^2} \right] \tilde{f} \left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \\ \text{avec} \\ h_l &= \frac{j}{\lambda f} \exp[-jk(d + f)] \end{aligned}}$$

L'amplitude dans le plan focal arrière de la lentille est proportionnelle à la TF de la transmittance de l'objet, multipliée par un terme de phase quadratique.

L'intensité dans le plan focal arrière de la lentille est :

$$I(x,y) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| \tilde{f}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \right|^2$$

L'intensité dans le plan focal arrière de la lentille est proportionnelle au module carré de la TF de l'amplitude de l'onde avant la lentille, quelle que soit la distance d (mais on a intérêt à placer l'objet au plus près de la lentille pour perdre moins de flux).

☞ Si $d = f$ (plan focal avant de la lentille), on a alors

$$g(x,y) = h_i \tilde{f}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

avec

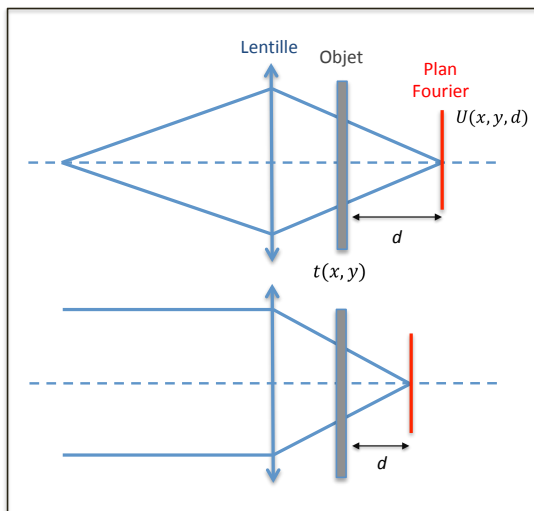
$$h_i = (j / \lambda f) \exp(-j2kf)$$

Dans le plan focal arrière d'une lentille convergente de focale f , l'amplitude est proportionnelle à la **transformée de Fourier** de la transmittance de l'objet placé dans le plan focal avant. La TF est calculée aux fréquences spatiales $\nu_x = x / \lambda f$ et $\nu_y = y / \lambda f$. Cette relation est valide dans l'approximation de Fresnel. Le plan focal arrière de la lentille est appelé **plan de Fourier**.

3.4 Généralisation de la notion de plan de Fourier

Une lentille convergente permet de réaliser un plan de Fourier. Différentes configurations possibles sont récapitulées ci-dessous :

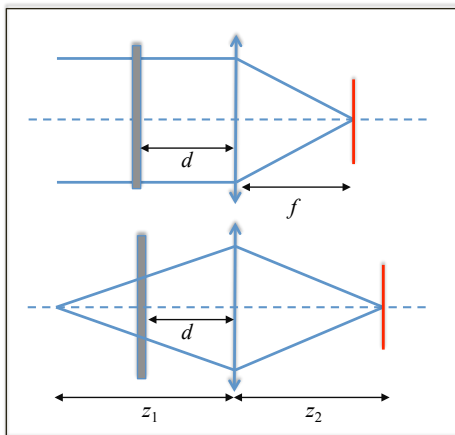
Réalisation d'un plan de Fourier (objet derrière la lentille)



$$U(x,y,d) \propto \tilde{t}\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right)$$

- À un terme de phase quadratique multiplicatif près
- La distance d influe sur l'extension de la TF

Réalisation d'un plan de Fourier (objet devant la lentille)

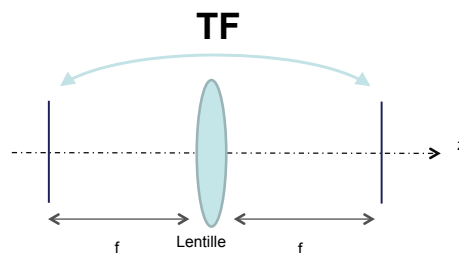


$$U(x, y, d) \propto \tilde{t}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

- À un terme de phase quadratique multiplicatif près (qui disparaît si $d = f$)
- Extension de la TF fixe (dépend de f)

$$U(x, y, d) \propto \tilde{t}\left[\frac{x z_1}{\lambda z_2 (z_1 - d)}, \frac{y z_1}{\lambda z_2 (z_1 - d)}\right]$$

Conclusion : Le plan de Fourier est le plan où l'onde d'éclairage est focalisée. Dans ce plan, l'amplitude est proportionnelle à la transformée de Fourier de la transmittance de l'objet traversé par l'onde, multipliée par un terme de phase quadratique. Ce terme de phase disparaît dans la configuration f/f représentée ci-dessous :



Sans la lentille, la relation de TF subsiste lorsque la distance entre les deux plans est très grande et qu'on est proche de l'axe (approximation de Fraunhofer, les nombres de Fresnel dans les deux plans sont $\ll 1$).

L'intensité dans le plan de Fourier est proportionnelle au module carré de la transformée de Fourier de la transmittance de l'objet traversé par l'onde (le module du terme de phase = 1). C'est généralement ce qu'on peut observer (sur un écran ou avec une caméra).

4. DIFFRACTION

Lorsqu'une onde optique rencontre un obstacle, puis se propage dans l'espace libre, sa distribution d'intensité est appelée figure de diffraction. Dans le cadre de l'optique géométrique, la figure de diffraction serait simplement l'ombre de l'objet rencontré. En réalité, à cause de la nature ondulatoire de la lumière, la figure de diffraction n'est pas l'ombre de l'objet ; elle varie en fonction de la distance entre l'objet diffractant et le plan d'observation, de la longueur d'onde, et des dimensions de l'objet.

L'objet diffractant est caractérisé par une transmittance, ou fonction d'ouverture, ou fonction pupillaire. Souvent, on considère une transmittance binaire :

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{intérieur} \\ 0 & \text{extérieur} \end{cases}$$

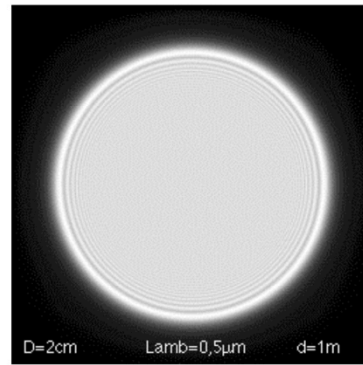
L'amplitude de l'onde incidente est multipliée par la fonction d'ouverture $p(x,y)$, puis se propage dans l'espace libre jusqu'au plan d'observation. La figure de diffraction correspond à la distribution d'intensité de l'onde dans ce plan. On parle de **diffraction de Fresnel** ou de **diffraction de Fraunhofer** selon que la propagation dans l'espace libre peut être décrite avec l'approximation de Fresnel ou l'approximation de Fraunhofer.

4.1 Diffraction de Fresnel

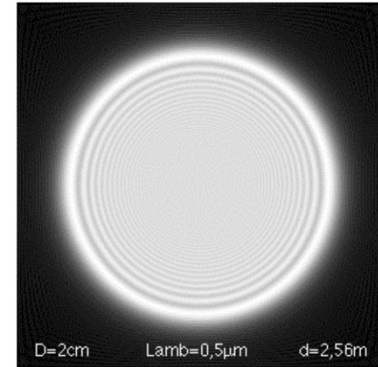
Dans la théorie de la diffraction de Fresnel, on considère que l'onde incidente est multipliée par la fonction pupillaire $p(x, y)$ puis se propage dans l'espace libre en supposant que l'approximation de Fresnel est valide. En général, cette théorie ne fournit pas des expressions analytiques explicites (même avec des pupilles de géométrie simple). Elle est utilisée pour réaliser des simulations numériques (voir exemples ci-dessous)

- Diffraction par un trou circulaire

On considère un disque de diamètre 2cm éclairé par une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 0,5\mu\text{m}$. L'observation de la figure de diffraction est calculée pour deux distances : $d_1 = 1\text{m}$ (fig. 1) et $d_2 = 2,56\text{m}$ (fig. 2)



Simulation n°1 - figure 1



Simulation n°1 - figure 2

- Diffraction par un bord (demi-plan), éclairé par une onde plane en incidence normale

On traite le problème en 2 dimensions (x, z) . L'intégrale de Fresnel s'écrit :

$$U(x, d) = h_0 \int_{-\infty}^{\infty} A p(x') \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2}{\lambda d} \right] dx'$$

soit ici :

$$U(x, d) \propto \int_0^{\infty} \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2}{\lambda d} \right] dx'$$

On pose $u = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} (x' - x)$

$$U(x, d) \propto \int_{u_0}^{\infty} \exp [-ju^2] du \quad \text{avec} \quad u_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} x$$

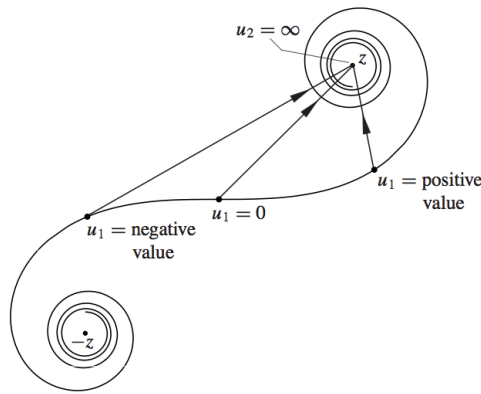
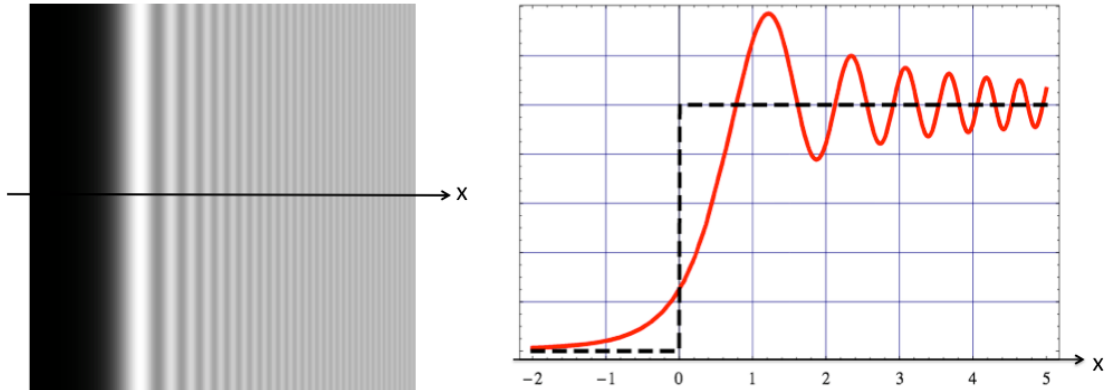
$|U(x, d)|$ peut être déterminé à partir de la spirale de Cornu :

$$x = -\infty \text{ (loin du bord, noir)} : u_1 = +\infty : |U(x, d)| = 0$$

$$x = 0 \text{ (sur le bord)} : u_1 = 0 : |U(x, d)| = |U_0| \neq 0$$

$$x > 0 \text{ (partie claire)} : u_1 = +\infty : |U(x, d)| \text{ tend vers une constante } |U_{\infty}| \text{ en oscillant}$$

$x = +\infty$ (loin du bord, claire) : $u_1 = -\infty$: $|U(x, d)| = |U_\infty|$



Spirale de Cornu.

- Diffraction par une fente

On considère une fente éclairée par une onde plane. On suppose la fente de largeur a selon x et de longueur infinie selon y . On traite le problème en 2 dimensions (x, z) . On utilise l'intégrale de Fresnel :

$$U(x, d) = h_0 \int_{-\infty}^{\infty} A p(x') \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2}{\lambda d} \right] dx'$$

$$U(x, d) \propto \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left[-j\pi \frac{(x - x')^2}{\lambda d} \right] dx'$$

On pose $u = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} (x' - x)$

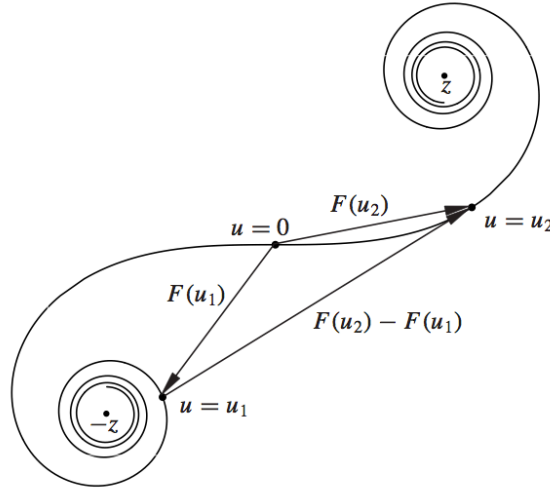
$$U(x, d) \propto \int_0^{u_1} \exp [-ju^2] du - \int_0^{u_2} \exp [-ju^2] du$$

On pose : $u = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} (x' - x)$, $u_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} \left(\frac{a}{2} + x \right)$ et $u_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} \left(\frac{a}{2} - x \right)$

$$U(x, d) \propto \int_{u_1}^{u_2} \exp[-ju^2] du$$

$$U(x, d) \propto \int_0^{u_2} \exp[-ju^2] du - \int_0^{u_1} \exp[-ju^2] du = F(u_2) - F(u_1)$$

Résolution graphique avec la spirale de Cornu. (voir TD 1A Henri Benisty) :



$x = -\infty$ (loin de la fente, noir) : $u_1 = u_2 = +\infty$: $|U(x, d)| = 0$

$x = -a/2$ (bord de la fente) : $u_1 = 0$, $u_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} a$: $|U(x, d)| \neq 0$

$x = 0$ (centre de la fente) : $u_1 = -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} a/2$, $u_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} a/2$, $|U(x, d)| \neq 0$

idem pour $x > 0$

Pour des valeurs quelconques de x , on constate que $|U(x, d)|$ varie de manière oscillante avec x . Une simulation est présentée ci-dessous :

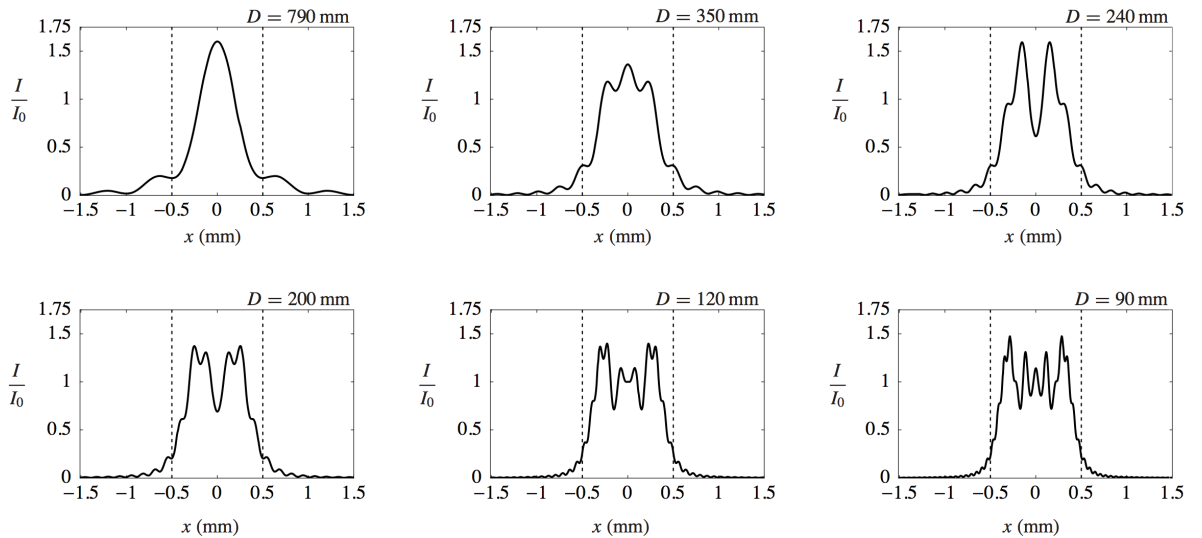
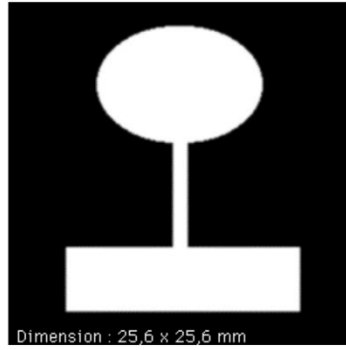


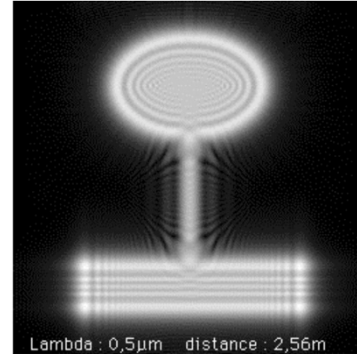
Figure de diffraction de Fresnel donnée par une fente, observée à différentes distances de la fente.

- Diffraction par une ouverture "quelconque"

L'ouverture diffractante est incluse dans un carré de côté 25,6 mm (fig. 1) éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5\mu\text{m}$. La figure de diffraction est calculée pour observation à une distance d de 2,56m (fig. 2)



Simulation n°2 - figure 1



Simulation n°2 - figure 2

4.2 Diffraction de Fraunhofer

Dans la théorie de la diffraction de Fraunhofer, on considère que l'onde incidente est multipliée par la fonction pupillaire $p(x, y)$ puis se propage dans l'espace libre en supposant l'approximation de Fraunhofer valide (situation plus restrictive que la diffraction de Fresnel). La diffraction de Fresnel est plus générale que la diffraction de Fraunhofer qui est incluse dans la diffraction de Fresnel).

Soit I_0 l'intensité incidente supposée uniforme ; l'amplitude complexe dans le plan de la pupille située en $z = 0$ est $\sqrt{I_0}p(x, y)$. Comme vu précédemment, l'amplitude complexe après propagation sur une distance $z = d$ telle que l'approximation de Fraunhofer soit valide s'écrit :

$$U(x, y, d) = \sqrt{I_0} h_0 \tilde{p}\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \quad \text{avec} \quad h_0 = \left(-\frac{j}{\lambda d}\right) \exp(-jkd).$$

La figure de diffraction est donc :

$$I(x, y) \propto I_0 \left| \tilde{p}\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \right|^2$$

La figure de diffraction de Fraunhofer est proportionnelle au module carré de la transformée de la fonction pupillaire $p(x, y)$ évaluée aux fréquences spatiales $\nu_x = x/\lambda d$ et $\nu_y = y/\lambda d$.

L'approximation de Fraunhofer est valable si les nombres de Fresnel dans ces deux plans sont petits, i.e. on néglige dans les calculs les termes quadratiques en x et y représentant une onde sphérique.

En utilisant une lentille de focale f , on peut observer dans le plan de Fourier la figure de diffraction de Fraunhofer (cela revient à observer à une distance infinie). La figure de diffraction est alors proportionnelle au module carré de la transformée de Fourier de $p(x, y)$. Lorsque l'onde incidente est plane, le plan de Fourier se situe dans le plan focal arrière de la lentille. On a alors dans ce plan :

$$I(x, y) \propto I_0 \left| \tilde{p}\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \right|^2$$

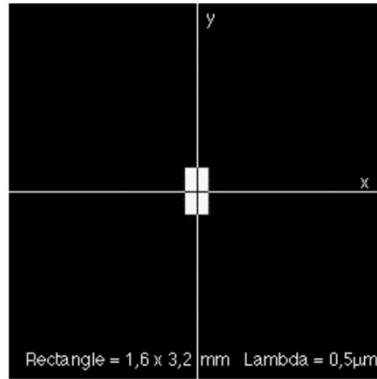
Cette formule est valable dans l'approximation de Fresnel

- Diffraction par une ouverture rectangulaire

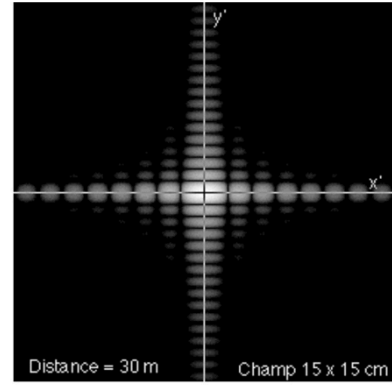
Le calcul de la figure de diffraction de Fraunhofer donnée par une pupille rectangulaire, de hauteur et largeur D_x et D_y , observée à une distance d , donne⁴

$$I(x,y) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi D_x x}{\lambda d}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi D_y y}{\lambda d}\right)$$

L'ouverture diffractante est un rectangle de côté $1,6 \times 3,2$ mm (fig. 1) éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5\mu\text{m}$. La figure de diffraction est calculée pour une observation à une distance d de 30m soit un champ d'observation de 150×150 mm (fig. 2). Dynamique de visualisation : 40dB.



Simulation n°3 - figure 1



Simulation n°3 - figure 2

- Diffraction par une ouverture circulaire

Le calcul de la figure de diffraction de Fraunhofer donnée par une pupille circulaire de diamètre $a = 2r_0$ donne⁵

$$I(x,y) = I_0 \left[\frac{2J_1(\pi a r / \lambda d)}{\pi a r / \lambda d} \right]^2 \quad \text{avec} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

La figure de diffraction est un disque entouré d'anneaux. Elle est appelée tache d'Airy. Le rayon de la tache d'Airy (premier zéro) est

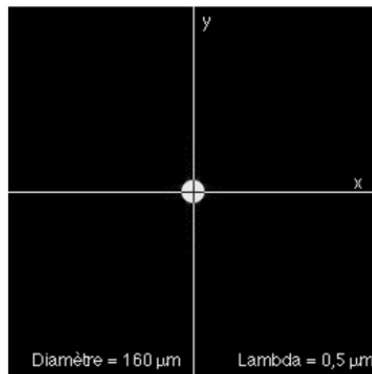
$$r_0 = 1.22 \lambda d / a$$

$$\theta_0 = 1.22 \lambda / a$$

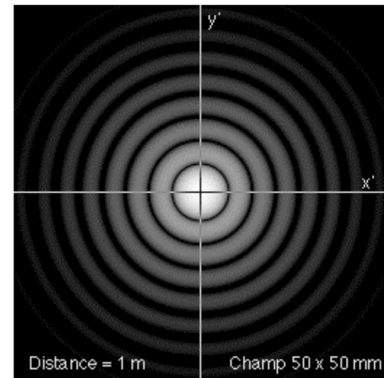
⁴ On utilisera la formule de transformée de Fourier : $\text{rec}(x/l) \Leftrightarrow l \frac{\sin(l\pi v)}{l\pi v} = l \text{sinc}(l\pi v)$

⁵ On utilisera la formule de transformée de Fourier : $\text{Dis}\left(\frac{r}{r_0}\right) \Leftrightarrow \pi r_0^2 \left[\frac{2J_1(2\pi r_0 v)}{2\pi r_0 v} \right]$ with $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

L'ouverture diffractante est un disque de $160\text{ }\mu\text{m}$ de diamètre (fig. 1) éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,5\text{ }\mu\text{m}$. La figure de diffraction est calculée pour une observation à une distance d de 1m soit un champ d'observation de $50 \times 50\text{ mm}$ (fig. 2). Dynamique de visualisation : 40dB.

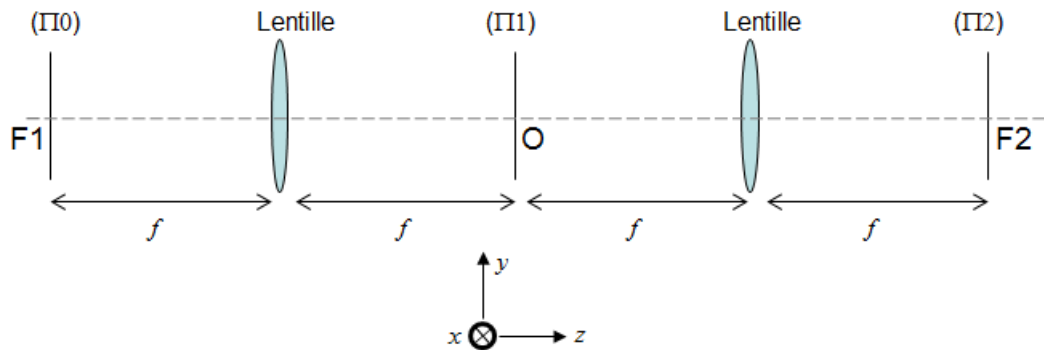


Simulation n°4 - figure 1



Simulation n°4 - figure 2

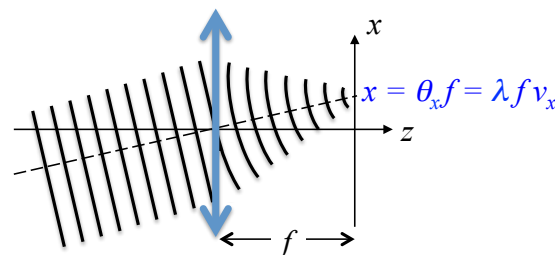
5. FILTRAGE DES FREQUENCES SPATIALES



On considère le montage d'imagerie ci-dessus, appelé système $4-f$. Des considérations simples d'optique géométrique montrent que le grandissement du système $4-f$ est égal à -1 .

Ce système peut être décomposé en deux sous-systèmes opérant chacun une opération de transformée de Fourier. Ainsi, l'amplitude de l'onde dans le plan image ($\Pi 2$) est reliée à celle dans le plan objet ($P0$) par un double opération de transformée de Fourier. Comme $TF(TF(f(x,y))) = f(-x,-y)$, on retrouve le résultat de l'optique géométrique : en l'absence de pupille limitant l'extension spatiale de l'onde, l'image est identique à l'objet mais retournée (grandissement $= -1$).

La première lentille permet de former le plan de Fourier (plan $\Pi 1$). A chaque point (x, y) dans le plan de Fourier correspondent les fréquences spatiales (v_x, v_y) selon la relation $x = \theta_x f = \lambda f v_x$, $y = \theta_y f = \lambda f v_y$ (voir schéma ci-dessous).

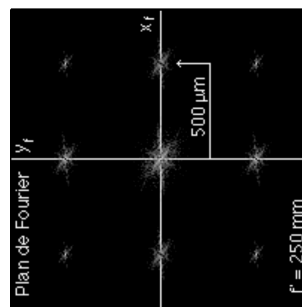


Les composantes de Fourier sont ensuite recombinaées par la deuxième lentille, ce qui conduit à une reconstruction parfaite de l'objet dans le plan image (plan $\Pi 2$).

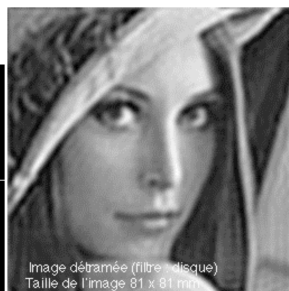
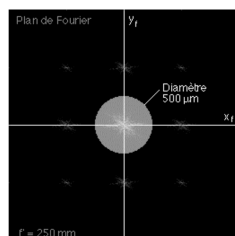
Le système d'imagerie $4-f$ peut être utilisé pour filtrer les fréquences spatiales. En plaçant un masque dans le plan de Fourier (plan Π_1), on peut couper, atténuer ou modifier certaines fréquences spatiales. L'image est alors modifiée. Elle est une réplique filtrée de l'objet.

Exemples de filtrage spatial

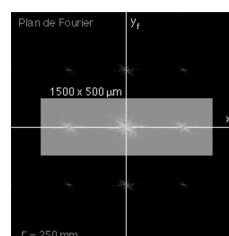
- Filtre passe-bas : un trou centré sur l'axe de rayon r_0 élimine les fréquences spatiales supérieures à $\nu_c = r_0/\lambda f$.
- Filtre passe-haut : ce sera par exemple le complémentaire d'un trou (disque opaque centré sur l'axe). Ce type de filtre permet de renforcer les contours dans une image.
- Une fente (voir schéma ci-dessous)



- Le filtre est un disque de 1 mm de diamètre.



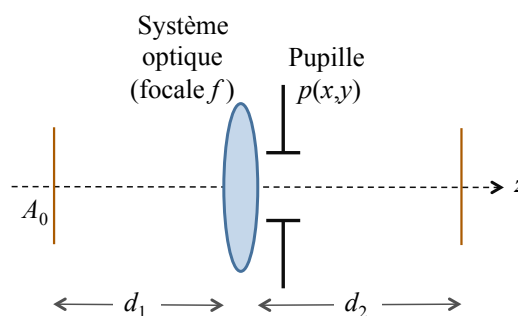
- Le filtre est un rectangle de 1,5 mm X 0,5 mm de côté.



Exemples de filtrage des fréquences spatiales d'une image

6. FORMATION DES IMAGES

On considère le système optique ci-dessous. On tient compte de la présence d'une pupille limitant l'extension des ondes. La pupille (caractérisée par sa fonction pupillaire p) est supposée être dans le plan de la lentille de focale f .



6.1 Réponse percutuelle d'un système optique sans aberration

On va calculer l'image du point A_0 situé sur l'axe optique à une distance d_1 du système optique. Ce point émet une onde sphérique. L'amplitude complexe dans le plan de la pupille (juste avant la lentille) est

$$U(x, y) = h_1 \exp\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2d_1}\right) \quad \text{où} \quad h_1 = \left(\frac{j}{\lambda d_1}\right) \exp(-jkd_1)$$

Après traversée de la pupille et de la lentille, l'amplitude complexe devient

$$U_1(x, y) = U(x, y) \exp\left(jk \frac{x^2 + y^2}{2f}\right) p(x, y)$$

L'onde se propage ensuite dans l'espace libre sur une distance d_2 . L'amplitude complexe est alors obtenue par convolution (intégrale de Fresnel), selon :

$$U_2(x', y') = h_2 \iint U_1(x, y) \exp\left(-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d_2}\right) dx dy \quad \text{où} \quad h_2 = \left(\frac{j}{\lambda d_2}\right) \exp(-jkd_2)$$

$$\begin{aligned} U_2(x', y') &= h_1 h_2 \iint p(x, y) \exp\left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d_1}\right) \exp\left(j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f}\right) \exp\left(-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d_2}\right) dx dy \\ &= h_1 h_2 \iint p(x, y) \exp\left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d_1}\right) \exp\left(j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f}\right) \exp\left(-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d_2}\right) dx dy \end{aligned}$$

On développe

$$\begin{aligned} \exp\left[-j\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda d_2}\right] &= \exp\left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d_2}\right) \exp\left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2}\right) \exp\left(j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d_2}\right) \\ U_2(x', y') &= h_1 h_2 \exp\left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2}\right) \iint p(x, y) \exp\left[-j\pi \frac{(x^2 + y^2)}{\lambda} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f}\right)\right] \exp\left(j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d_2}\right) dx dy \end{aligned}$$

que l'on peut noter

$$U_2(x', y') = h_1 h_2 \exp\left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2}\right) \iint p_1(x, y) \exp\left(j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d_2}\right) dx dy$$

où

$$p_1(x, y) = p(x, y) \exp\left[-j\pi \varepsilon \frac{x^2 + y^2}{\lambda}\right] \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f}.$$

Finalement:

$$U_2(x', y') = h_1 h_2 \exp\left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2}\right) \tilde{p}_1\left(\frac{x'}{\lambda d_2}, \frac{y'}{\lambda d_2}\right)$$

où $\tilde{p}_1$ est la transformée de Fourier de la fonction p_1

* Si $\varepsilon = 0$ (cela correspond à la position de l'image géométrique d'après la formule de conjugaison de Descartes), $p_1 = p$. On a alors :

$$U_2(x', y') = h_0 \exp\left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2}\right) \tilde{p}\left(\frac{x'}{\lambda d_2}, \frac{y'}{\lambda d_2}\right) \quad \text{où} \quad h_0 = h_1 h_2$$

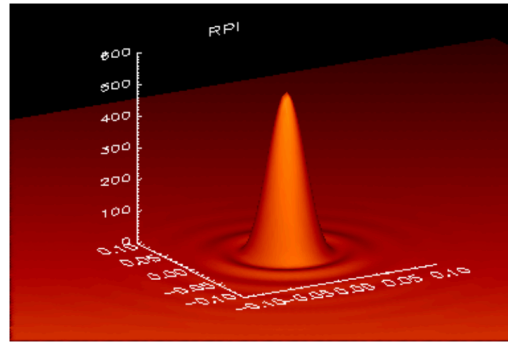
☞ Dans le plan image, l'amplitude complexe de l'onde est proportionnelle à la TF de la fonction pupillaire, multipliée par un terme de phase quadratique. Ce résultat est en accord avec les discussions précédentes sur le plan de Fourier : cas particulier du cas général, où l'objet (ici la pupille) est placé contre la lentille (avant ou après).

L'intensité, dans le plan image est par définition la réponse percussionnelle (incohérente) du système optique :

$$RPI(x', y') \propto \left| \tilde{p} \left(\frac{x'}{\lambda d_2}, \frac{y'}{\lambda d_2} \right) \right|^2$$

La réponse percussionnelle (incohérente) d'un système optique parfait est proportionnelle au module carré de la transformée de Fourier de la fonction pupillaire p . On dit alors que la RPI est limitée par la diffraction. La RPI est alors la figure diffraction, de type Fraunhofer, donnée par la pupille

Exemple : la RPI d'un système à pupille circulaire limité par diffraction (pas d'aberration) est une tache d'Airy.



6.2 Réponse percussionnelle d'un système optique avec aberrations

$U_1(x, y)$ représente l'amplitude complexe de l'onde après traversée du système optique. On peut l'écrire, à cause de la présence d'aberrations comme :

$$U_1(x, y) = p(x, y) \exp \left(-j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda d_1} \right) \exp \left(j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda f} \right) \exp \left(j2\pi \frac{\Delta(x, y)}{\lambda} \right)$$

$\Delta(x, y)$ représente l'écart par rapport au front d'onde sphérique de l'onde parfaite qui émergerait de la lentille. $\Delta(x, y)$ est appelé écart normal.

Après propagation dans l'espace libre sur une distance d_2 , l'amplitude complexe est alors obtenue par convolution (intégrale de Fresnel), selon :

$$U_2(x', y') = h_1 h_2 \exp \left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2} \right) \iint p_2(x, y) \exp \left(j2\pi \frac{xx' + yy'}{\lambda d_2} \right) dx dy$$

où

$$p_2(x, y) = p(x, y) \exp \left[-j\pi \varepsilon \frac{x^2 + y^2}{\lambda} \right] \exp \left[j2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \right] \text{ et } \varepsilon = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f}.$$

Finalement:

$$U_2(x', y') = h_1 h_2 \exp \left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2} \right) \tilde{p}_2 \left(\frac{x'}{\lambda d_2}, \frac{y'}{\lambda d_2} \right)$$

On se place à la distance d_2 telle que $\varepsilon = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = 0$

On a alors,

$$U_2(x', y') = h_0 \exp\left(-j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda d_2}\right) TF\left[p(x, y) \exp\left(j2\pi \frac{\Delta(x, y)}{\lambda}\right)\right]_{\left(\frac{x'}{\lambda d_2}, \frac{y'}{\lambda d_2}\right)}$$

Dans le plan de l'image géométrique ($\varepsilon = 0$), l'amplitude complexe de l'onde est celle d'une onde sphérique convergente multipliée par la TF de la fonction pupillaire multipliée par un terme de phase décrivant les aberrations.

L'intensité dans le plan image est par définition la réponse percussionnelle (incohérente) du système optique :

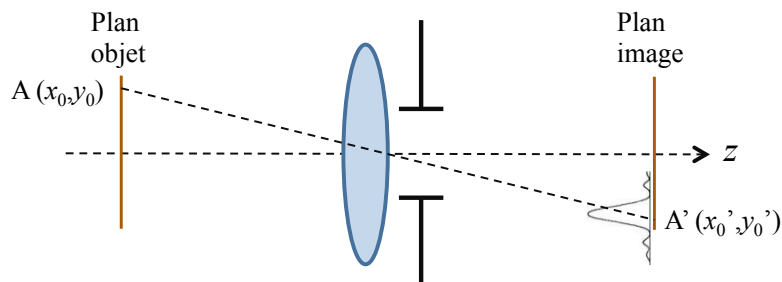
$$RPI(x', y') \propto \left| TF\left[p(x, y) \exp\left(j2\pi \frac{\Delta(x, y)}{\lambda}\right)\right] \right|^2_{\left(\frac{x'}{\lambda d_2}, \frac{y'}{\lambda d_2}\right)}$$

La réponse percussionnelle (incohérente) d'un système optique avec aberration est proportionnelle au module carré de la transformée de Fourier de la fonction pupillaire p multipliée par un terme de phase lié aux aberrations

La RPI dépend des aberrations. Il faut exprimer l'écart normal en fonction des aberrations (voir cours "aberrations optiques") pour calculer (numériquement) la RPI.

On définit le rapport de Strehl comme le rapport des amplitudes de la RPI avec et sans aberrations. Cela traduit l'écart par rapport à la limite de diffraction.

6.3 Formation des images (en éclairage incohérent)



En optique géométrique, chaque point A de l'objet, repéré par (x_0, y_0) , a une image qui est le point A' situé en (x'_0, y'_0) . Dans la théorie ondulatoire de la lumière, l'image du point A est proportionnelle à la réponse percussionnelle centrée en A' : $RPI(x' - x'_0, y' - y'_0)$. On pourrait refaire le calcul précédent en considérant un point objet qui ne serait plus sur l'axe (comme fait dans le TD 2). Le coefficient de proportionnalité est lié à l'intensité de l'image idéale en ce point (image en l'absence de diffraction, c'est à dire sans pupille). On peut donc écrire :

$$I'(x', y') = \iint I'_{ideale}(x'_0, y'_0) RPI(x' - x'_0, y' - y'_0) dx'_0 dy'_0$$

Cette écriture implique qu'on somme les intensités et non les amplitudes. On ne tient donc pas compte d'interférences entre deux points distincts. C'est valable si l'éclairage est spatialement incohérent (voir prochain chapitre sur la cohérence). Cela correspond au cas classique en imagerie plein champ (intérêt

d'un éclairage incohérent pour éviter le speckle. En revanche un laser permettra de faire de l'imagerie point/point par balayage).

L'image idéale est identique à l'objet au grandissement près du système optique, noté γ :

$$I'_{ideale}(x'_0, y'_0) = I\left(x_0 = \frac{x'_0}{\gamma}, y_0 = \frac{y'_0}{\gamma}\right)$$

$$I'(x', y') = \iint I\left(x_0 = \frac{x'_0}{\gamma}, y_0 = \frac{y'_0}{\gamma}\right) RPI(x' - x'_0, y' - y'_0) dx'_0 dy'_0$$

On a donc l'intensité dans le plan image qui s'écrit comme une convolution de l'intensité dans le plan objet avec la RPI :

$$I'(x', y') = I\left(\frac{x'}{\gamma}, \frac{y'}{\gamma}\right) * RPI(x', y')$$

En passant dans l'espace de Fourier :

$$\tilde{I}'(v'_x, v'_y) = \gamma^2 \tilde{I}(\gamma v'_x, \gamma v'_y) \times FTO(v'_x, v'_y)$$

où

$$FTO = \widetilde{RPI}$$

FTO est la transformée de Fourier de la réponse percussionnelle.

FTO est appelée fonction de transfert optique du système optique.

Le système optique se comporte comme un filtre des fréquences spatiales de l'image idéale. Il est caractérisé par sa Fonction de Transfert Optique (FTO), ou par sa fonction de transfert de modulation (FTM), définie comme :

$$FTM = |FTO|$$

Plan objet		Plan image
$I(x, y)$	$* RPI(x', y')$ $\rightarrow$ $(x' = \gamma x, y' = \gamma y)$	$I'(x', y') = I\left(\frac{x'}{\gamma}, \frac{y'}{\gamma}\right) * RPI(x', y')$
TF $\downarrow$		$TF^{-1} \uparrow$
$\tilde{I}(v_x, v_y)$	$\times FTO(v'_x, v'_y)$ $\rightarrow$ $(v_x = \gamma v'_x, v_y = \gamma v'_y)$	$\tilde{I}'(v'_x, v'_y) = \gamma^2 \tilde{I}(\gamma v'_x, \gamma v'_y) \times FTO(v'_x, v'_y)$

Formation de l'image en éclairage incohérent : récapitulatif

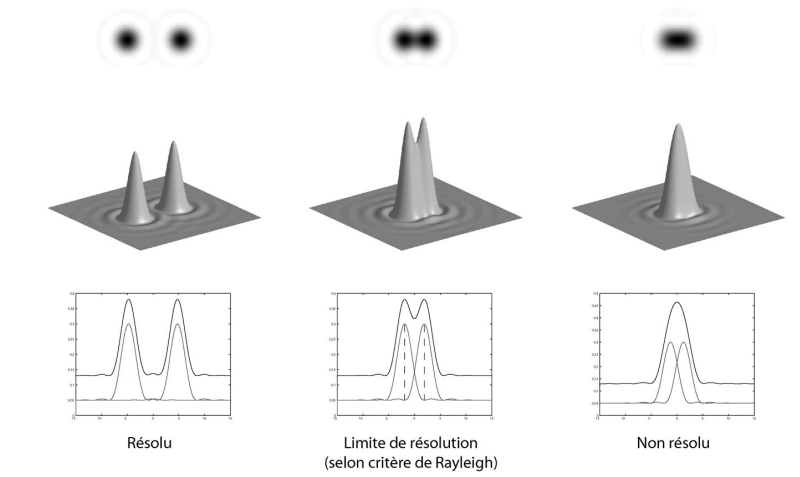
Exemple : Système d'imagerie sans aberration à pupille circulaire

La pupille est un cercle de diamètre a . La fonction pupillaire est décrite par $p(x, y) = \text{dis}\left(\frac{r}{a/2}\right)$ où

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$. La réponse percussionnelle (incohérente) est $\propto \left[\frac{J_1(\pi ar / ld)}{\pi ar / ld} \right]^2$ (tache d'Airy)

Le premier zéro de la RPI est situé à $r_s = 1,22 \frac{\lambda d}{a}$.

En éclairage incohérent, chaque point du plan objet plane a une image qui est proportionnelle à la RPI. Lorsque 2 points du plan objet sont suffisamment proches de sorte que leurs images sont distantes de la quantité r_s , alors il est impossible de les résoudre (de les séparer). La quantité $r_s = 1,22 \frac{\lambda d}{a}$ est une mesure de la résolution du système d'imagerie (selon le critère de Rayleigh) :

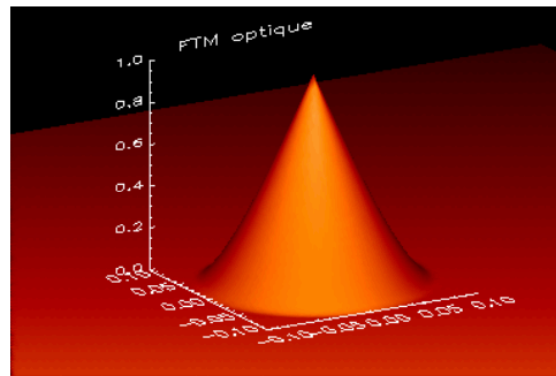
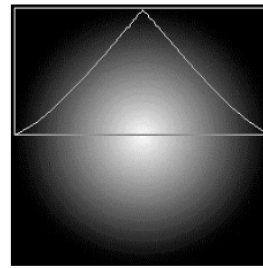
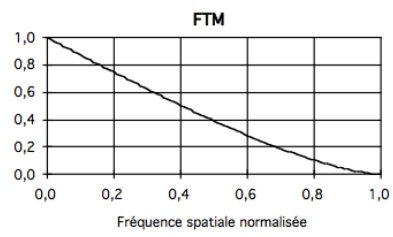


La fonction de transfert optique, transformée de formée de Fourier de la RPI (tache d'Airy), peut se calculer :

$$FTO(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{v}{v_c} - \frac{v}{v_c} \left[1 - \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} & \text{si } v < v_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fréquence de coupure étant $v_c = \frac{a}{\lambda d}$

Cette fréquence de coupure est une autre définition de la limite de résolution, à comparer à $r_s = 1,22/v_c$.



FT_{optique} d'une pupille circulaire.

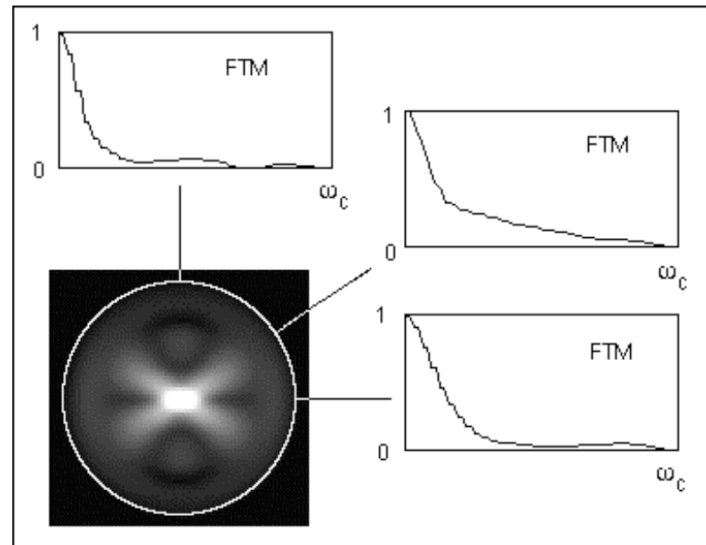


Figure FTM selon trois directions pour une pupille circulaire en présence d'aberration de type coma.

Chapitre 4

COHERENCE

Jusqu'à présent, les propriétés de la lumière étaient supposées être déterministes. La fonction d'onde décrivant la lumière était parfaitement prédictible. En réalité, les ondes optiques présentent des fluctuations aléatoires. Par exemple, la lumière émise par un corps chauffé (lumière thermique) est aléatoire parce qu'elle est constituée d'une superposition d'émissions par un grand nombre d'atomes qui rayonnent indépendamment avec des fréquences, des phases et des amplitudes différentes. Le caractère aléatoire de la lumière peut aussi résulter de la diffusion par une surface rugueuse, un verre dépoli, ou encore lorsqu'elle se propage dans des milieux troubles ou turbulents.

La théorie des fluctuations aléatoires de la lumière porte le nom d'optique statistique ou encore de cohérence optique. Cette théorie est basée sur des moyennes statistiques pour définir un certain nombre de grandeurs déterministes.

Une manifestation directe de la cohérence est la possibilité d'observer des interférences stables. La réalisation de phénomènes d'interférences permet de mettre en évidence et de mesurer le degré de cohérence de la lumière.

Une onde optique arbitraire est définie par une fonction d'onde $u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}, t)\}$, où $U(\mathbf{r}, t)$ est la fonction d'onde complexe. Dans le cas de lumière aléatoire, $U(\mathbf{r}, t)$ est une fonction aléatoire qui peut être caractérisée par un certain nombre de moyennes statistiques.

1. Intensité

L'intensité est définie, de manière générale, comme

$$I(\mathbf{r}, t) = |U(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (\text{module carré de la fonction d'onde complexe})$$

- Lorsque la lumière est monochromatique, l'intensité est $I(\mathbf{r}, t) = |U(\mathbf{r})|^2$: indépendante du temps

(module carré de l'amplitude complexe)

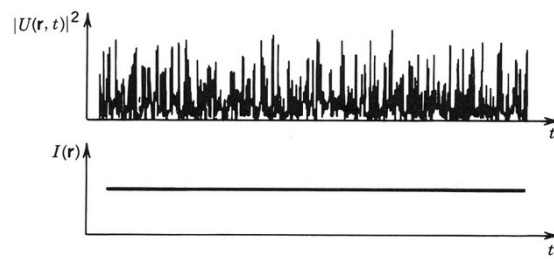
- Dans le cas de lumière aléatoire, l'intensité $|U(\mathbf{r}, t)|^2$ est aussi une fonction aléatoire de la position et du temps. On parle alors d'intensité instantanée.

L'intensité moyenne est définie comme

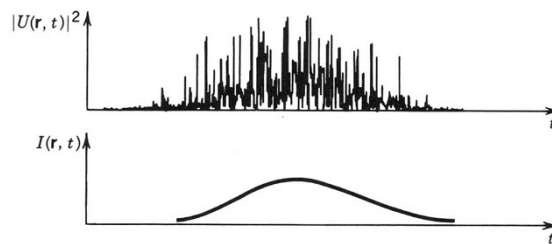
$$I(\mathbf{r}, t) = \langle |U(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$$

Le symbole $\langle \rangle$ représente une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations : c'est l'espérance mathématique de la fonction aléatoire. L'intensité moyenne peut être indépendante ou bien dépendante du temps. Si l'onde optique est statistiquement stationnaire, sa moyenne statistique ne

dépend pas du temps. Stationnarité ne signifie pas constance ; cela signifie constance des propriétés moyennes. Des exemples d'ondes stationnaire et non-stationnaire sont considérés ci-dessous.



(a)



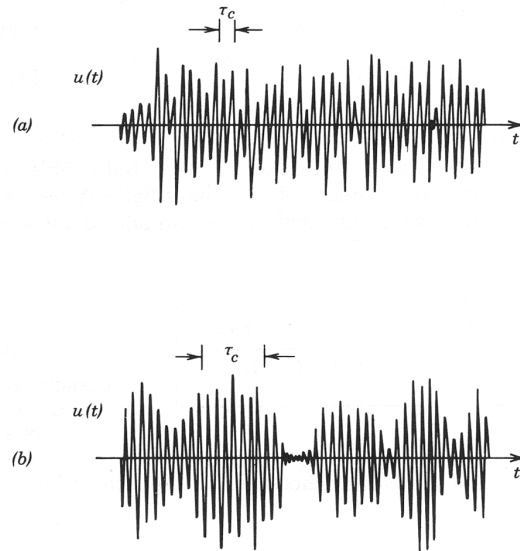
(b)

- (a) Onde statistiquement stationnaire. L'intensité moyenne ne varie pas dans le temps (moyennage sur un grand nombre de réalisations).
- (b) Une onde statistiquement non-stationnaire a une intensité qui varie dans le temps (moyennage sur un grand nombre de réalisations).

Quand le processus est ergodique, la moyenne statistique peut être déterminée à partir d'une moyenne dans le temps sur une seule réalisation en considérant un temps suffisamment long, au lieu d'un moyennage sur plusieurs réalisations (moyenne temporelle = moyenne d'ensemble). Voir cours Statistiques François Goudail (1^{ère} année IOGS)

2. Cohérence temporelle et spectre

On considère ici les fluctuations d'une lumière stationnaire en fonction du temps, à une position fixe (voir 2 exemples ci-dessus). Les fluctuations aléatoires de $U(t)$ peuvent être caractérisées par un "temps de mémoire" τ_c : les fluctuations séparées par un temps plus long que le temps de mémoire sont indépendantes, de sorte que le processus n'a plus « souvenir » de lui-même. La fonction $U(t)$ a des variations douces sur une échelle de temps plus petite que le temps de mémoire τ_c , mais brutales et chaotiques lorsqu'elle est observée sur des échelles de temps plus grandes. Une mesure quantitative de ce comportement temporel peut être établie à partir de la fonction d'autocorrélation de l'amplitude de l'onde.



Fonction de cohérence temporelle

La fonction d'autocorrélation d'une fonction aléatoire complexe stationnaire $U(t)$ est

$$G(\tau) = \langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle$$

Dans la théorie de la cohérence optique, la fonction d'autocorrélation $G(\tau)$ est appelée la **fonction de cohérence temporelle**.

On note que l'intensité est égale à $G(\tau)$ lorsque $\tau = 0$: $G(0) = I$

Degré de cohérence temporelle

La fonction de cohérence temporelle $G(\tau)$ porte une information sur le degré de corrélation (de cohérence) de la lumière stationnaire et aussi sur son intensité ($G(0) = I$). Une mesure de la cohérence, indépendante de l'intensité, est donnée par la fonction d'autocorrélation normalisée, appelée degré de cohérence temporelle :

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{\langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle}{\langle U^*(t)U(t) \rangle} = \frac{\langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle}{I}$$

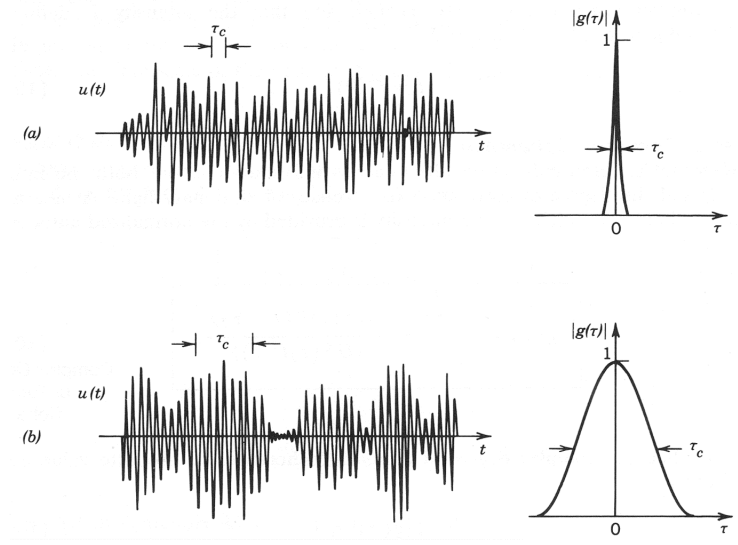
On peut montrer (inégalité de Cauchy-Schwarz) que $0 \leq |g(\tau)| \leq 1$

La valeur de $g(\tau)$ représente le degré de corrélation entre $U(t)$ et $U(t+\tau)$.

Dans le cas d'une lumière déterministe et monochromatique : $U(t) = A \exp(j2\pi\nu_0 t)$, $|g(\tau)| = 1$: $U(t)$ and $U(t+\tau)$ sont totalement corrélés quel que soit le délai τ .

En général, quand l'onde n'est pas monochromatique, $|g(\tau)|$ décroît de 1 pour $\tau = 0$ jusqu'à 0 lorsque τ tends vers l'infini (mais peut présenter des oscillations).

Temps de cohérence / longueur de cohérence



La largeur de la fonction $|g(\tau)|$, notée τ_c , est une mesure du temps de mémoire des fluctuations ; on appelle cette quantité le **temps de cohérence**. Pour $\tau \ll \tau_c$, les fluctuations sont fortement corrélées, tandis que pour $\tau \gg \tau_c$ elles sont faiblement corrélées. La définition de la largeur d'une fonction est conventionnelle ; une définition possible du temps de cohérence est

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau$$

Le temps de cohérence de la lumière monochromatique est infini.

La **longueur de cohérence** est définie par :

$$l_c = c\tau_c$$

Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance (le « spectre ») d'une onde est définie comme $S(\nu) = |\tilde{U}(\nu)|^2$ (module carré de la TF de l'amplitude) où $\nu = 1/t$ (fréquence temporelle).

Le théorème de Wiener-Khintchin stipule que :

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau) \exp(j2\pi\nu\tau) d\tau$$

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de l'amplitude de l'onde (supposée stationnaire et ergodique).

Largeur spectrale

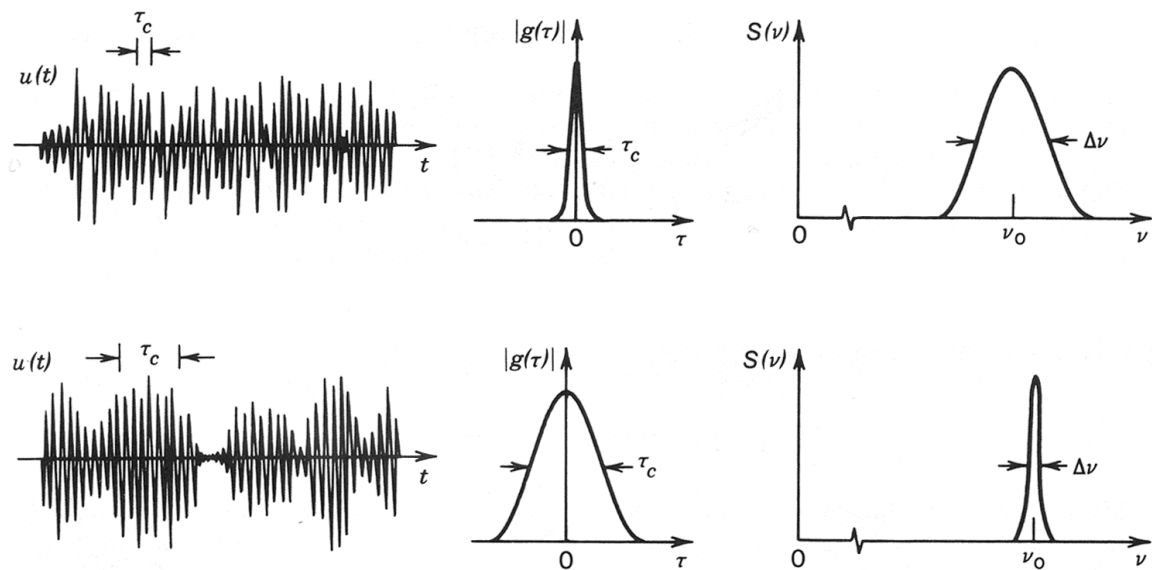
La largeur spectrale $\Delta\nu_c$ est définie comme la largeur de la densité spectrale de puissance $S(\nu)$. A cause de la relation de transformée de Fourier entre $S(\nu)$ et $G(\tau)$, les largeurs des fonctions $S(\nu)$ et $G(\tau)$ sont inversement proportionnelles :

$$\Delta\nu_c \propto \frac{1}{\tau_c} = \frac{c}{l_c}$$

La largeur spectrale est inversement proportionnelle au temps de cohérence (ou longueur de cohérence). Le coefficient exact dépend de la définition de la largeur des fonctions S et G et de leur forme.

Une lumière de spectre large a donc un temps de cohérence court (une longueur de cohérence courte).

La cohérence temporelle est liée au « degré de monochromaticité » de l'onde. Quelques exemples sont présentés ci-dessous :



Source	τ_c	l_c
Soleil (filtré) ($\lambda_0 = 0.4 - 0.8 \mu\text{m}$)	2.67 fs	800 nm
LED ($\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$, $\Delta\lambda = 50 \text{ nm}$)	67 fs	20 μm
Lampe à vapeur de Sodium basse pression	2 ps	600 μm

Laser He-Ne multimode ($\lambda_0 = 633$ nm)	0.67 ns	20 cm
Laser He-Ne monomode stabilisé ($\lambda_0 = 633$ nm)	1 μ s	3 m

Cohérence temporelle de diverses sources de lumière

3. Cohérence spatiale

Degré de cohérence spatiale

L'autocorrélation de l'onde, à temps fixé, entre deux points repérés par $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ est :

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, t) U(\mathbf{r}_2, t) \rangle$$

Son expression normalisée est :

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{[I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}}$$

On a (inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$0 \leq |g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \leq 1$$

$|g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|$ représente le degré de cohérence spatiale.

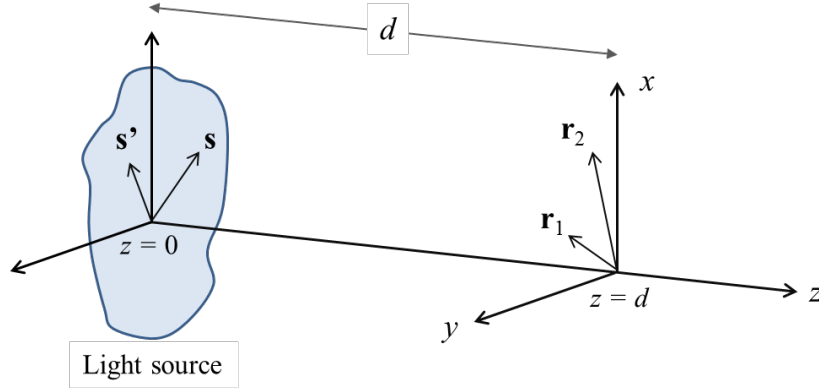
Aire / longueur de cohérence

La fonction $|g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|$ est égale à 1 pour $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ et décroît généralement quand $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ augmente. Dans un plan transverse, pour un point $\mathbf{r}_2$ donné, la surface balayée par le point $\mathbf{r}_1$ tel que $|g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \geq 1/2$ (par exemple) est appelée aire de cohérence (on se place dans un plan transverse à la direction de propagation principale de l'onde).

Influence de la cohérence spatiale de l'éclairage dans un système d'imagerie : Eclairage incohérent ne veut pas dire nécessairement cohérence nulle. Si l'aire de cohérence au niveau de l'objet imagé est plus petite que la résolution du système d'imagerie, alors la lumière éclairant l'objet peut être considérée comme incohérente spatialement. En pratique, on a toujours un certain degré de cohérence spatiale (réglable dans l'éclairage Köhler en microscopie, voir TD d'Optique de Fourier).

Théorème de Zernike et Van Cittert

On considère une source de lumière spatialement incohérente située dans le plan $z = 0$. On se propose de calculer le degré de cohérence spatiale dans un plan arbitraire après propagation sur une distance d (voir figure ci-dessous) :



$\mathbf{s}, \mathbf{s}'$ représentent deux points arbitraires dans le plan de la source ($z = 0$)

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ représentent deux points arbitraires dans le plan $z = d$.

Dans l'approximation de Fresnel, l'amplitude complexe de l'onde dans le plan $z = d$ peut être obtenue en évaluant l'intégrale de Fresnel. On a donc :

$$U^*(\mathbf{r}_1) = \frac{-j}{\lambda d} \exp(jkd) \iint U^*(\mathbf{s}') \exp \left[j\pi \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}')^2}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s}'$$

$$U(\mathbf{r}_2) = \frac{j}{\lambda d} \exp(-jkd) \iint U(\mathbf{s}) \exp \left[-j\pi \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s})^2}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s}$$

La fonction de cohérence mutuelle (spatiale) dans le plan $z = d$ est :

$$G_{z=d}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle U^*(\mathbf{r}_1) U(\mathbf{r}_2) \rangle$$

$$= \frac{1}{(\lambda d)^2} \left\langle \iint \iint U(\mathbf{s}) U^*(\mathbf{s}') \exp \left[j\pi \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}')^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{s})^2}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s} d^2 \mathbf{s}' \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(\lambda d)^2} \iint \iint \langle U(\mathbf{s}) U^*(\mathbf{s}') \rangle \exp \left[j\pi \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}')^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{s})^2}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s} d^2 \mathbf{s}'$$

La source de lumière étant supposée totalement incohérente spatialement, la fonction de cohérence mutuelle dans le plan de la source est :

$$G_{z=0}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \langle U(\mathbf{s}) U^*(\mathbf{s}') \rangle$$

$$= \sqrt{I(\mathbf{s}) I(\mathbf{s}')} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}'), \quad \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \text{ étant la distribution de Dirac } (= 0 \text{ for } \mathbf{s} \neq \mathbf{s}').$$

La fonction de cohérence mutuelle après propagation sur une distance d devient :

$$G_{z=d}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(\lambda d)^2} \iint I(\mathbf{s}) \exp \left[j\pi \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s})^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{s})^2}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s}$$

$$= \frac{1}{(\lambda d)^2} \iint I(\mathbf{s}) \exp \left[j\pi \frac{\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2}{\lambda d} \right] \exp \left[2j\pi \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{s}}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s}$$

$$= \frac{1}{(\lambda d)^2} \exp \left[j\pi \frac{\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2}{\lambda d} \right] \iint I(\mathbf{s}) \exp \left[2j\pi \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{s}}{\lambda d} \right] d^2 \mathbf{s}$$

$$G_{z=d}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(\lambda d)^2} \exp \left[j\pi \frac{\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2}{\lambda d} \right] \tilde{I} \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\lambda d} \right)$$

Sa forme normalisée est :

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp \left[j\pi \frac{\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2}{\lambda d} \right] \frac{\tilde{I} \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\lambda d} \right)}{\tilde{I}(0)}$$

En module :

$$|g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = \left| \frac{\tilde{I} \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\lambda d} \right)}{\tilde{I}(0)} \right|$$

On constate que le degré de cohérence spatiale, après propagation sur une distance d , est proportionnel à la TF de la répartition spatiale de l'intensité de la source calculée à la fréquence $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\lambda d}$.

La source ayant une taille finie, le degré de cohérence après propagation n'est pas une distribution de Dirac (elle l'était dans le plan de la source). La lumière a donc « gagné » de la cohérence spatiale à cause de sa propagation. Ce résultat n'est pas surprenant : bien que les ondes émises par différents points du plan de la source soient totalement décorréliées, les ondes émises par ces points se superposent lors de la propagation. Dans le plan d'arrivée, deux points distincts peuvent recevoir de la lumière provenant du même point de la source, créant ainsi de la cohérence spatiale.

Exemple : Soit une source de forme carrée de largeur a ; quelle est la cohérence spatiale dans un plan situé à une distance d ? On raisonnera à 1 dimension transverse pour simplifier

$$I(s) = \text{Rect} \left(\frac{s}{a} \right)$$

$$|g(x)| = |\text{sinc}(\pi a v)| \quad \text{où} \quad v = \frac{x}{\lambda d}$$

Longueur de cohérence spatiale = largeur de la fonction $|g(x)|$

Si l'on prend comme largeur la position du premier zéro de $\text{sinc}(\pi a v)$

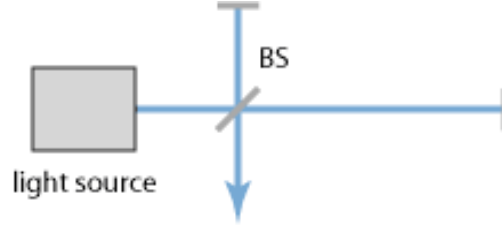
$$\pi a \left(\frac{l_c}{\lambda d} \right) = \pi \quad \text{soit} \quad l_c = \frac{\lambda d}{a} = \frac{\lambda}{\theta} \quad \theta = \text{angle sous lequel est "vue" la source.}$$

Si la source est de petite taille angulaire, l'aire de cohérence après propagation peut devenir très grande. Même si la source est très étendue, la cohérence spatiale peut devenir grande si la distance d est grande. Ce qui compte, c'est la taille angulaire de la source vue depuis le plan considéré : ($l_c = \frac{\lambda d}{a}$). Une étoile (vue depuis la terre) est une source de lumière spatialement cohérente ! (taille angulaire quasi nulle). *Illustration dans le TD 5*

4. Interférences en lumière partiellement cohérente

Interférence et cohérence temporelle

Soit un interféromètre de type Michelson (interféromètre à séparation d'amplitude).



Les deux ondes qui interfèrent sont 2 ondes identiques décalées dans le temps (l'une parcourant un chemin optique plus long que l'autre). Ce système permet donc de superposer l'onde avec une réplique d'elle-même décalée d'un temps τ ajustable. L'intensité résultante mesurée est en moyenne

$$\begin{aligned} I &= \langle |U(t) + U(t+\tau)|^2 \rangle = \langle |U(t)|^2 \rangle + \langle |U(t+\tau)|^2 \rangle + \langle U^*(t)U(t+\tau) \rangle + \langle U(t)U^*(t+\tau) \rangle \\ &= I_0 + I_0 + G(\tau) + G^*(\tau) \end{aligned}$$

Or $G(\tau) = G(0)g(\tau) = I_0g(\tau)$, g étant le degré de cohérence temporelle, donc

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 + I_0[g(\tau) + g^*(\tau)] \\ &= 2I_0[1 + \text{Re}\{g(\tau)\}] \\ &= 2I_0[1 + |g(\tau)|\cos\varphi(\tau)] \end{aligned}$$

φ = argument de g = déphasage entre les 2 ondes.

La partie variable de $I(\tau)$ est appelée **interférogramme** ; l'interférogramme est proportionnel à la partie réelle de l'autocorrélation temporelle de l'onde (fonction de cohérence temporelle). Un interféromètre de type Michelson s'appelle aussi autocorrélateur optique. La largeur temporelle de l'interférogramme s'identifie au temps de cohérence τ_c (en pratique l'interférogramme est enregistré en fonction de la différence de marche ; donc sa largeur est la longueur de cohérence $l_c = c\tau_c$). A partir de la mesure de l'interférogramme, on peut en déduire la longueur de cohérence, donc la largeur spectrale et aussi le spectre (densité spectrale de puissance) par TF de l'interférogramme mesuré (technique de spectroscopie par TF, mise en oeuvre au moyen d'un interféromètre de Michelson).

Sachant que $G(\tau) = I_0g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\exp(-j2\pi\nu\tau)d\nu$ (théorème de Wiener-Khintchin)

et que $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)d\nu$

on a

$$I = 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)d\nu + \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\exp(-j2\pi\nu\tau)d\nu \right\} \right]$$

soit

$$I(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) [1 + \cos(2\pi\nu\tau)] d\nu$$

ou encore

$$I(\delta) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] d\sigma$$

L'interférogramme (la partie variable de $I(\delta)$) est donc :

$$I_{\text{mod}}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma$$

Si l'on considère des spectres physiques (pas de fréquences négatives) :

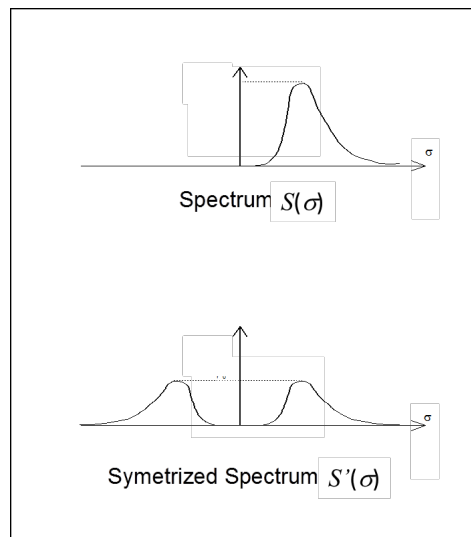
$$I_{\text{mod}}(\delta) = \int_0^{\infty} S(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma$$

$$I_{\text{mod}}(\delta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(\sigma) \exp(j2\pi\sigma\delta) d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(\sigma) \exp(-j2\pi\sigma\delta) d\sigma$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 S(-\sigma) \exp(j2\pi\sigma\delta) d\sigma$$

On introduit le spectre symétrisé $S'(\sigma)$ (voir ci-dessous) :



$$\begin{aligned} I_{\text{mod}}(\delta) &= \int_0^{\infty} S'(\sigma) \exp(j2\pi\sigma\delta) d\sigma + \int_{-\infty}^0 S'(\sigma) \exp(j2\pi\sigma\delta) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S'(\sigma) \exp(j2\pi\sigma\delta) d\sigma \end{aligned}$$

L'interférogramme $I_{\text{mod}}(\delta)$ est la transformée de Fourier du spectre symétrisé $S'(\sigma)$.

➤ Exemple d'une source de spectre Gaussien (centré en σ_0 , largeur totale à $1/e = \Delta\sigma$):

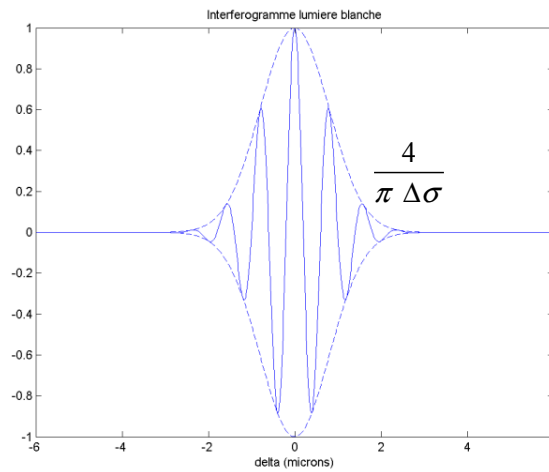
$$S(\sigma) = \exp\left[-\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{(\Delta\sigma/2)^2}\right]$$

$$S'(\sigma) = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{(\sigma)^2}{(\Delta\sigma/2)^2}\right] * [\text{dirac}(\sigma - \sigma_0) + \text{dirac}(\sigma + \sigma_0)]$$

On a : $\exp\left[-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right] \xrightarrow{TF} \tau \exp[-\pi\tau^2\nu^2]$

donc :

$$I_{\text{mod}}(\delta) \propto \exp\left[-\pi^2(\Delta\sigma/2)^2\delta^2\right] \times \cos(2\pi\sigma_0\delta)$$



On peut écrire :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad \Delta\sigma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \quad l_c = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

La cohérence temporelle est mise en évidence (et mesurable) facilement au moyen d'un interféromètre de Michelson.

Interférence et cohérence spatiale

L'effet de la cohérence spatiale peut être mis en évidence dans l'expérience des trous d'Young (voir TD d'Optique de Fourier).

