



Techniques numériques pour l'optique : Cours Magistral 3

Victor COLAS

Master PAIP-POM

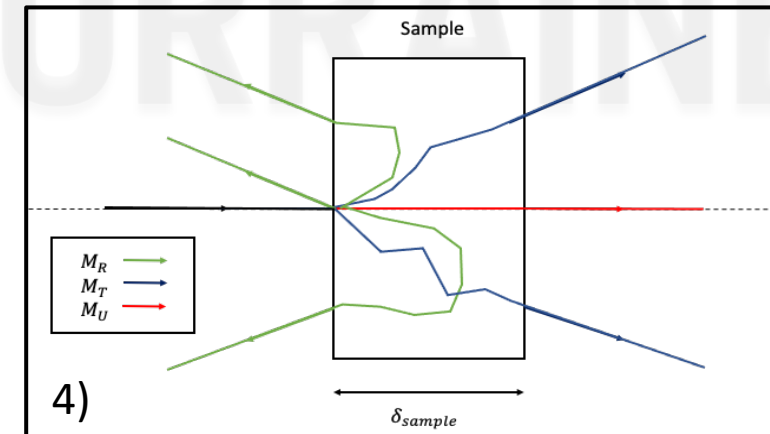
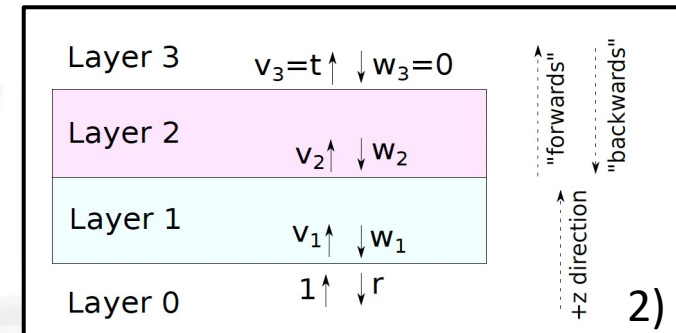
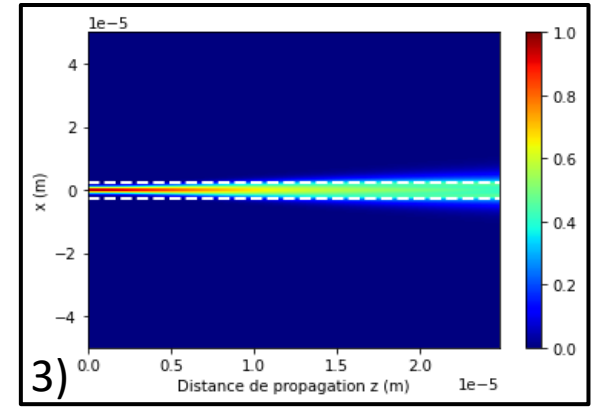
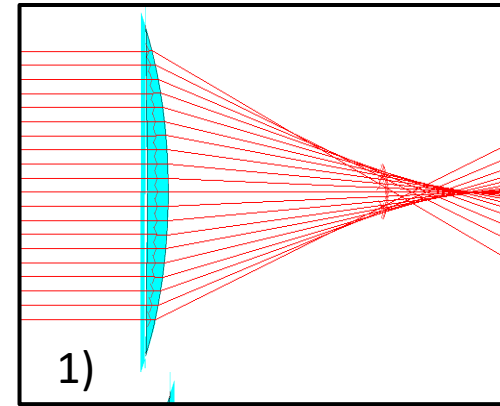


Présentation de l'UE

- **Descriptif :**

Utilisation de l'outil numérique pour étudier la propagation de la lumière au travers 4 exemples :

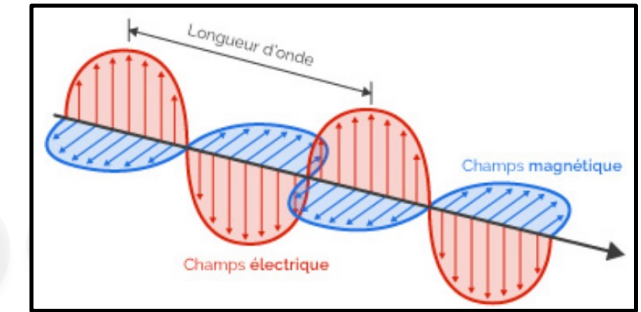
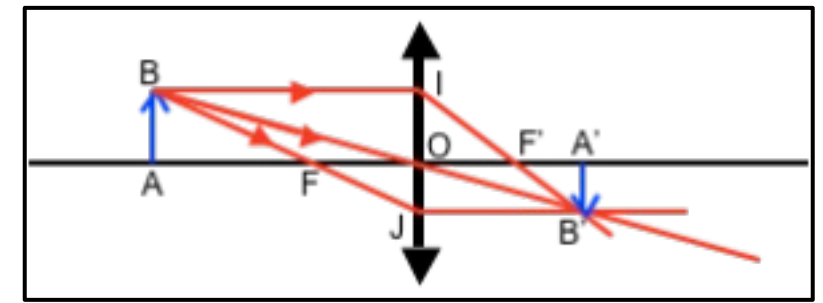
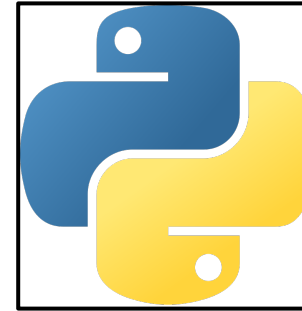
1. le lancer de rayons
2. la propagation de lumière dans des milieux multicouches
3. la propagation de faisceau dans l'espace de Fourier
4. les approches Monte Carlo pour la propagation en milieux diffusants



Présentation de l'UE

- **Prérequis :**

- Algorithmie (Python)
- Optique géométrique
- Optique physique (électromagnétisme)

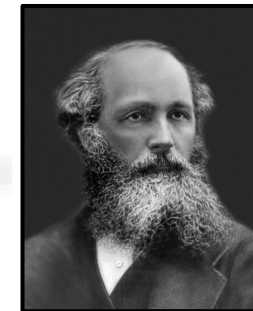


- **Acquis d'apprentissage :**

- Utiliser l'outil numérique pour la propagation de la lumière

- **Compétence visée :**

- « Passage » de la théorie au numérique
- Démarche de recherche (autonomie + article scientifique)



$$\overrightarrow{rot}(E) = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

Maxwell - Faraday

Composition de l'UE

- **14 h de CM :**

1. CM1 (4h) : Ray-Tracing pour le design de systèmes optiques
2. CM2 (4h) : Propagation d'onde optique dans les milieux multicouches
3. CM3 (4h) : Propagation libre ou guidée de faisceau laser
4. CM4 (2h) : Approche de Monte Carlo pour les milieux diffusants

- **16 h de TP (3x4 h de projet + 4h de soutenance) qui constituent l'évaluation de l'UE :**

1. Définir un projet à traiter (livrable descriptif à rendre ~2 pages) (~15% note)
2. Faire les travaux nécessaires puis rédiger un article scientifique en guise de rapport (~50% note)
3. Faire une présentation orale (15 min) au reste de la promo (~35% note)

CM3 (4h) : Propagation libre et guidée de faisceau laser – The Beam Propagation Method

1. Théorie électromagnétique : De Maxwell à la propagation par TF
 2. Pratique : Mon code de propagation par TF
3. Théorie : la physique derrière la « Beam Propagation Method »
 4. Pratique : Exploration libre de la BMP

Présentation des sources :

Electromagnétisme

Prof. François Marquier, LCF IOGS

→ Dispo sur Arche

Optique de Fourier

Prof. Arnaud Dubois, LCF IOGS

→ Dispo sur Arche

UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

Positionnement du problème

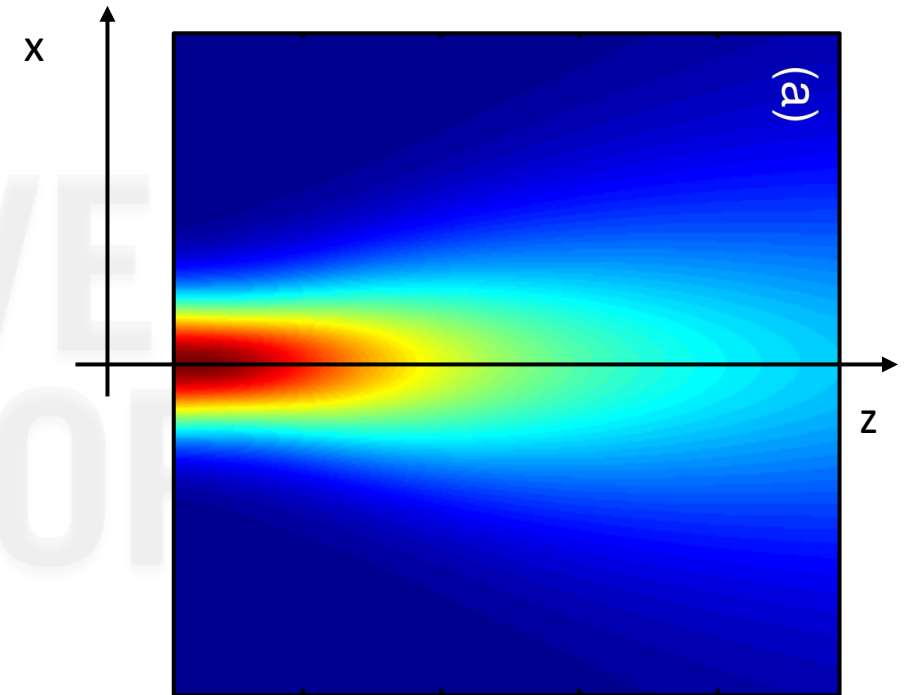
Propagation du champ électrique dans le vide

Onde monochromatique de pulsation

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

On connaît expression du champ électrique en $z = 0$

→ On veut connaître en tout point de l'espace tq $z > 0$



Présentation de la démarche

De Maxwell à la propagation par TF

- Equation de Maxwell dans le vide
- Equation de propagation (d'Alembert)
- Equation d'Helmholtz
- Développement en ondes planes
- Propagation par TF



De Maxwell à d'Alembert

Equation de Maxwell dans le vide

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Avec : } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Utilisation de l'identité :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) ; \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Vers l'équation de propagation de d'Alembert :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 E(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{\nabla}^2 B(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

→ Valable pour toute onde même polychromatique, avec E et B des fonctions scalaires représentant une des composantes vectorielles

De d'Alembert à Helmholtz

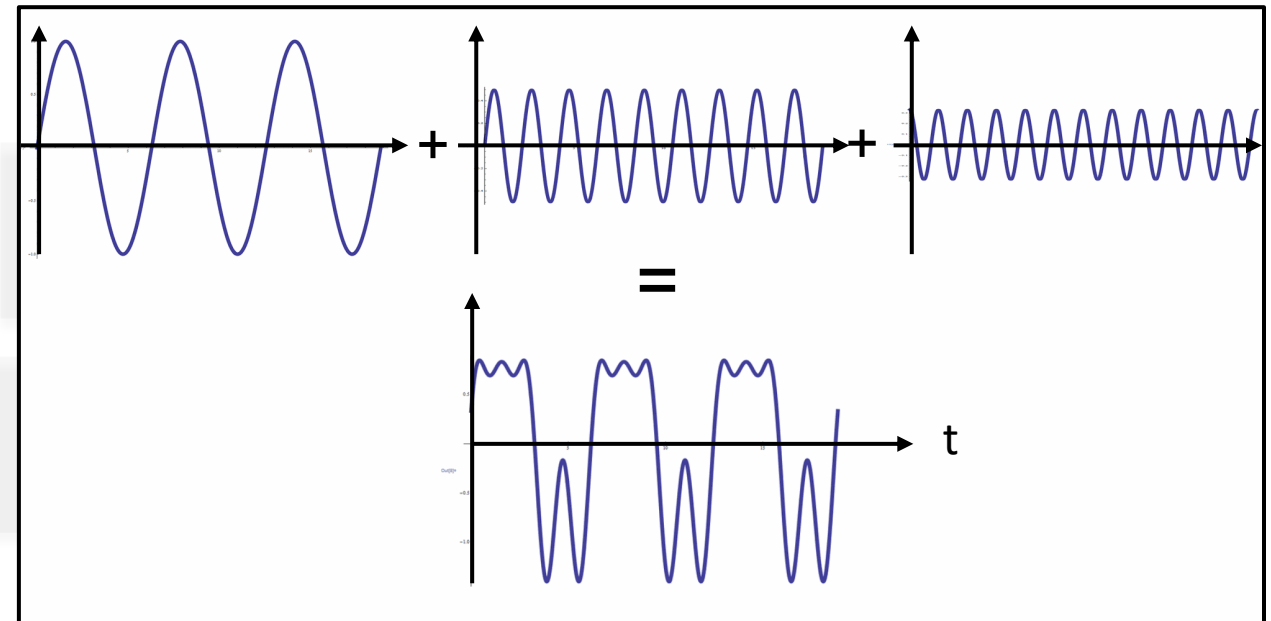
Transformée de Fourier de E ,
variable temporelle t :

Expression TF :

$$\tilde{E}(\vec{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r}, t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Expression TF-1 :

$$E(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$



$\omega = 2\pi\nu \rightarrow$ pulsation (temporelle) [rad/s]

De d'Alembert à Helmholtz

Transformée de Fourier de E ,
variable temporelle t :

Expression TF :

$$\tilde{E}(\vec{r}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r}, t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Expression TF-1 :

$$E(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\vec{r}, \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad (1)$$

$\omega = 2\pi\nu \rightarrow$ pulsation (temporelle) [rad/s]

TF-1 dans d'Alembert :

$$\vec{\nabla}^2 E(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} \left[\vec{\nabla}^2 \tilde{E}(\vec{r}, \nu) + \frac{(2\pi\nu)^2}{c^2} \tilde{E}(\vec{r}, \nu) \right] d\nu = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \tilde{E}(\vec{r}, \nu) + k^2 \tilde{E}(\vec{r}, \nu) = 0}$$

↓

Equation de Helmholtz

$$\text{Où } k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

De Helmholtz au développement en ondes planes

Helmholtz :

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{E}(\vec{r}, \nu) + \frac{(2\pi\nu)^2}{c^2} \tilde{E}(\vec{r}, \nu) = 0$$

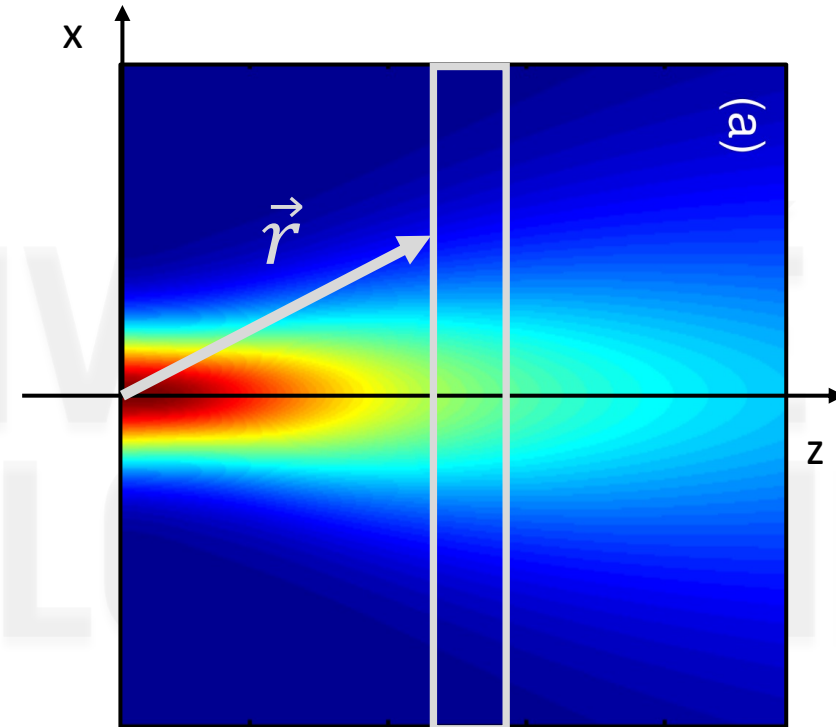
$$\tilde{E}(\vec{r}, \nu) \text{ avec } \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \tilde{E}(\vec{r}, \nu) = E(x, y, z, \nu)$$

$\rightarrow \nu$ simplifier la notation

$$E(x, y, z) = E(x, y, z = \text{constante})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 E(x, y, z) + \frac{(2\pi\nu)^2}{c^2} E(x, y, z) = 0$$



$z = \text{constante}$

De Helmholtz au développement en ondes planes

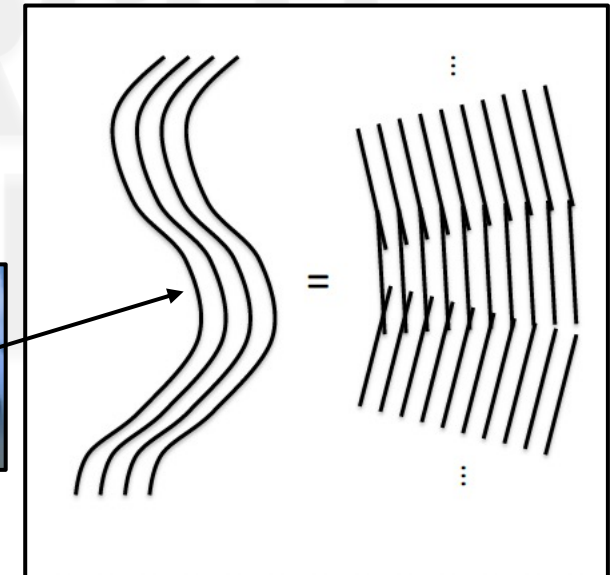
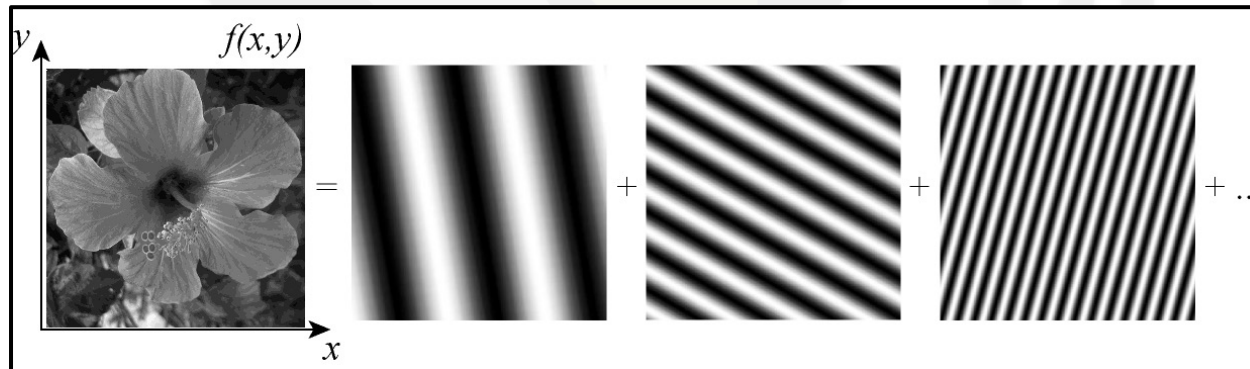
Transformée de Fourier de $\vec{E}$, variable d'espace x et y :

Expression TF :

$$\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \rightarrow \text{pulsation (spatiale) [rad/m]}$$

Expression TF-1:

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$



→ Somme d'ondes planes

De Helmholtz au développement en ondes planes

TF-1 dans Helmholtz

(1) Expression TF-1 $E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(v_x, v_y, z) e^{i2\pi(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y$

(2) Helmholtz

$$\vec{\nabla}^2 E(x, y, z) + \frac{(2\pi v)^2}{c^2} E(x, y, z) = 0$$

(1)>(2) $\iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \tilde{E}(v_x, v_y, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{(2\pi v)^2}{c^2} - \frac{(2\pi v_x)^2}{c^2} - \frac{(2\pi v_y)^2}{c^2} \right) \tilde{E}(v_x, v_y, z) \right] e^{i2\pi(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{E}(v_x, v_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E}(v_x, v_y, z) = 0$$

→ Equation différentielle second degré sans dérivée première

De Helmholtz au développement en ondes planes

Solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}(v_x, v_y, z)}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E}(v_x, v_y, z) = 0$$

En introduisant :

$$\begin{cases} k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} & \text{si } k^2 > k_x^2 + k_y^2 \\ k_z = i \sqrt{-k^2 + k_x^2 + k_y^2} & \text{si } k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{E}(v_x, v_y, z) &= A(v_x, v_y) e^{i2\pi v_z z} + B(v_x, v_y) e^{-i2\pi v_z z} \\ \tilde{E}(v_x, v_y, z) &= A(v_x, v_y) e^{i2\pi v_z z} \\ &\rightarrow \text{propagation } z \text{ croissant} \end{aligned}$$

$$\text{Puis : } v_z = \frac{k_z}{2\pi}$$

De Helmholtz au développement en ondes planes

Détermination de $A(\nu_x, \nu_y)$

Connaissance du champ en $z=0$ i.e. $E(x, y, 0)$

(1) Solution équation diff $\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) = A(\nu_x, \nu_y)e^{i2\pi\nu_z z}$

(2) Expression TF-1 $E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z)e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$

-> (2) en $z=0$ $E(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(\nu_x, \nu_y)e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$

$\Rightarrow A(\nu_x, \nu_y)$ est simplement la TF du champ E en $z=0$

(3) $A(\nu_x, \nu_y) = \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, 0)$

(3) -> (1) $\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z) = \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, 0)e^{i2\pi\nu_z z}$ Solution complète

De Helmholtz au développement en ondes planes

TF-1 pour expression du champ $E(x, y, z)$

(1) Solution complète $\tilde{E}(v_x, v_y, z) = \tilde{E}(v_x, v_y, 0)e^{i2\pi v_z z}$

(2) Expression TF-1 $E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(v_x, v_y, z) e^{i2\pi(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y$

(1) $\rightarrow$ (2) $E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(v_x, v_y, 0) e^{i2\pi v_z z} e^{i2\pi(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y$

$$\Rightarrow E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(v_x, v_y, 0) e^{i2\pi(v_x x + v_y y + v_z z)} dv_x dv_y$$

$E(x, y, z) \rightarrow$ Somme d'ondes planes de vecteurs d'onde $\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$

Vérifiant la relation de dispersion $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

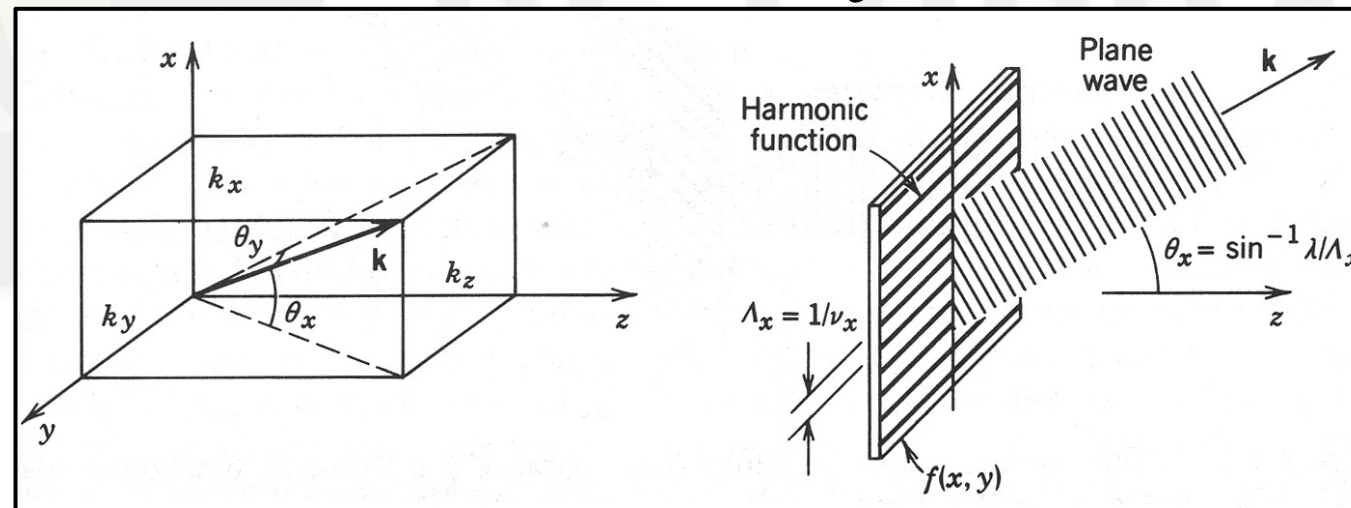
Développement en ondes planes

Interprétation graphique

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(v_x, v_y, 0) e^{i2\pi(v_x x + v_y y + v_z z)} dv_x dv_y$$

→ Somme d'ondes planes de vecteur d'onde $\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$

Vérifiant la relation de dispersion $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$



Propagation par TF : résumé

Navette entre l'espace de Fourier

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\nu_x, \nu_y, 0) e^{i2\pi\nu_z z} e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

Espace « spatial »

$E(x, y, z = 0)$
connu

$E(x, y, z)$
?

Espace de Fourier

$\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, 0)$
 $\times e^{i2\pi\nu_z z}$

$\tilde{E}(\nu_x, \nu_y, z)$

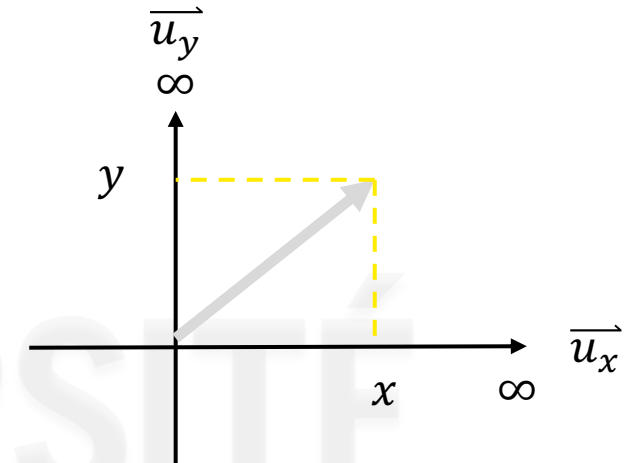


Transformée de Fourier Discrète

Définition continue

Expression TF :

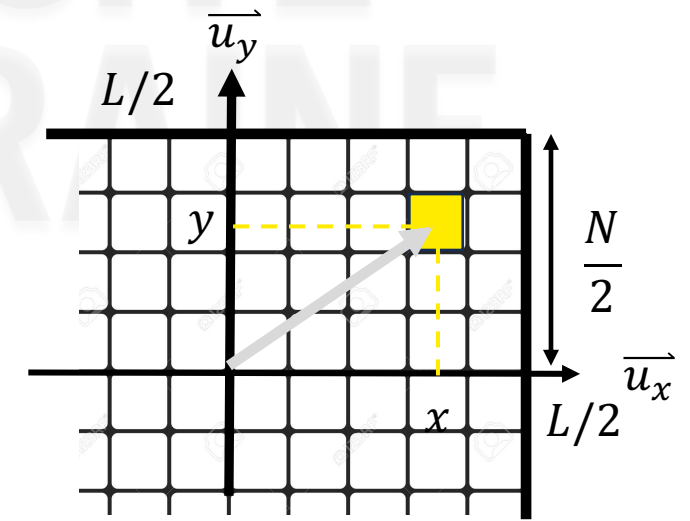
$$\tilde{E}(v_x, v_y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z) e^{-i2\pi(v_x x + v_y y)} dx dy$$



Définition discrète

Expression TF :

$$\tilde{E}(v_x, v_y, z) = \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[\sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} E(x, y, z) e^{-\frac{i2\pi(mx+ny)}{L}} \right]$$



→ Importance choix N et L

Propagation de Fourier et Simulation

Utilisation de la Fast Fourier Transform de Numpy

FFT = méthode de calcul de la TF discrète

Espace « spatial »

$$E(x, y, z = 0)$$

connu

$$E(x, y, z)$$

?

Espace de Fourier

$$\tilde{E}(v_x, v_y, 0)$$

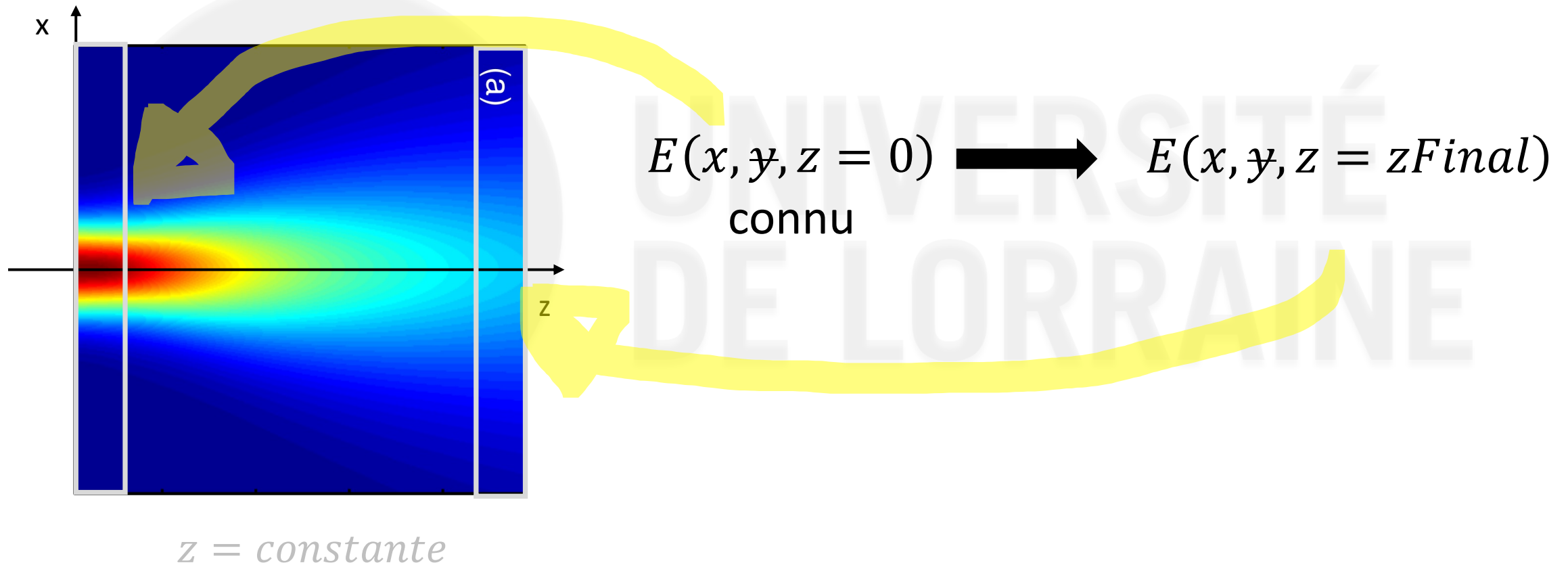
$$\times e^{i2\pi v_z z}$$

$$\tilde{E}(v_x, v_y, z)$$



But : propager un faisceau gaussien par TF

Approche 1+1D

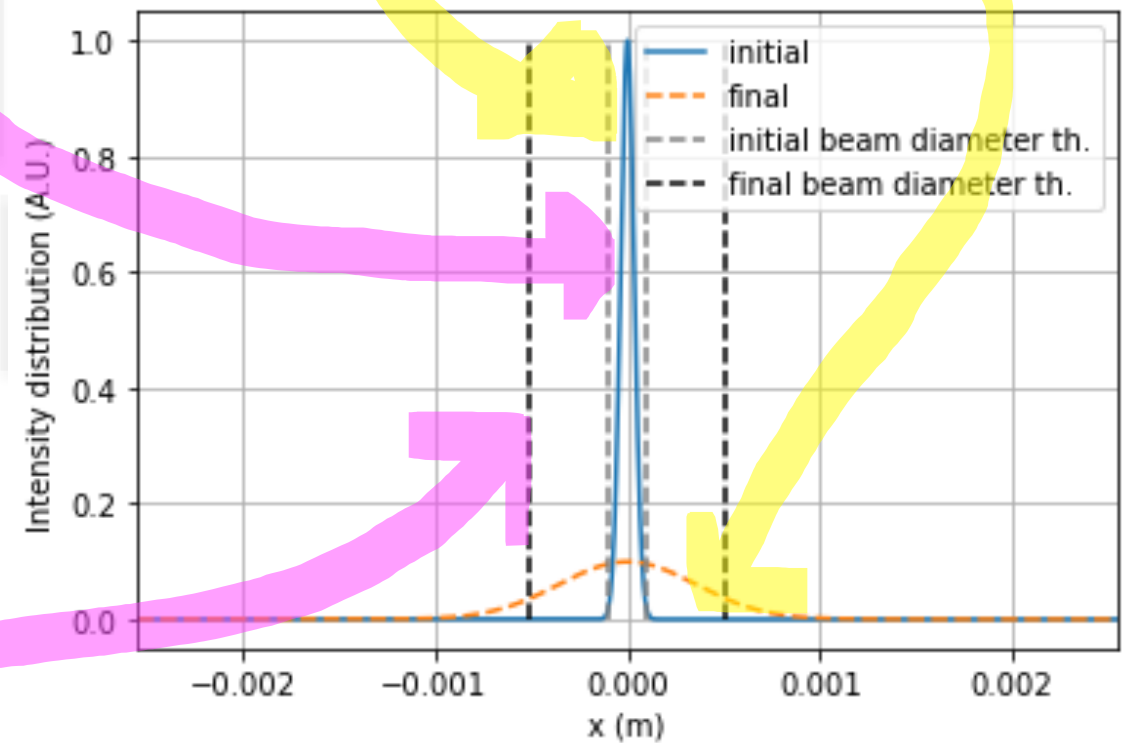
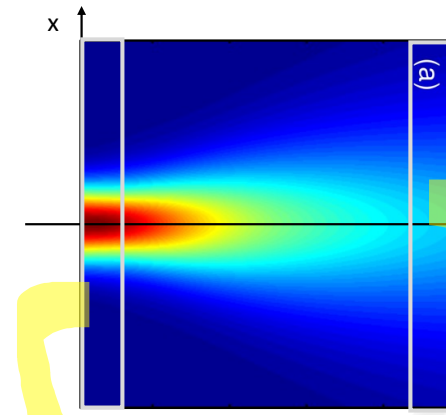


Pistes pour démarrer

- Définir la géométrie de la simulation, L , N , vecteur de propagation Z , ...
- Définir $E(x, y, z = 0)$ comme une gaussienne à partir de son waist w_0
- Définir un z final puis calculer $E(x, y, z = z_{Final})$
- Passer à l'intensité $I = \text{abs}(A)^2$
- Conservation intensité ?
- Vérifier la largeur avec :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

→ z_R longueur Rayleigh

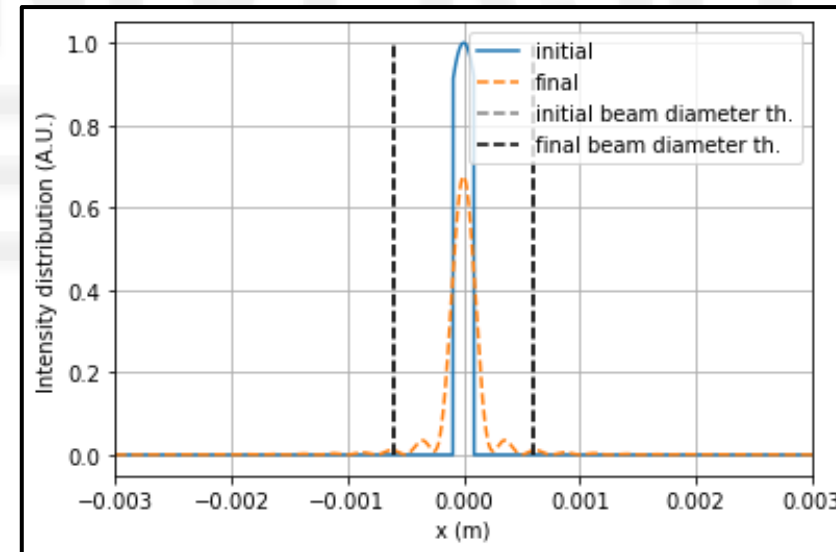
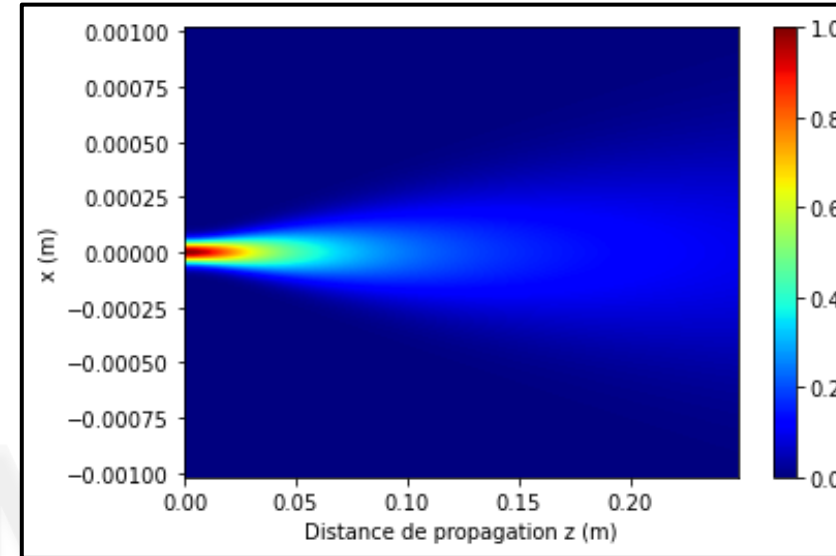


Éléments de correction

```

8
9
10
11 import numpy as np
12 from math import pi
13 import matplotlib.pyplot as plt
14
15
16 def CalculEnergie(x,y):
17     npt=len(x)
18     pas=x[1]-x[0]
19     Energie=0
20     for k in range(npt-1):
21         Energie=Energie+y[k+1]*pas
22     return Energie
23
24 def TF(x,y):
25     dx=x[1]-x[0]
26     N=len(y)
27     TFy=np.fft.fftshift(np.fft.fft(y))
28     freq=np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(N,dx))
29     return freq,TFy
30
31 def iTF(TFy):
32     y=np.fft.ifft(TFy)
33     return y
34
35 def propagationFourier(freq,TFy,k,z):
36     alpha=2*np.pi*freq
37     argument = (k**2 - alpha**2)
38     tmp = np.sqrt(np.abs(argument))
39     gamma = np.where(argument >= 0, tmp, 1j*tmp)
40     TFy_en_z=TFy*np.exp(-1j*gamma*z)
41     return TFy_en_z
42
43
44

```

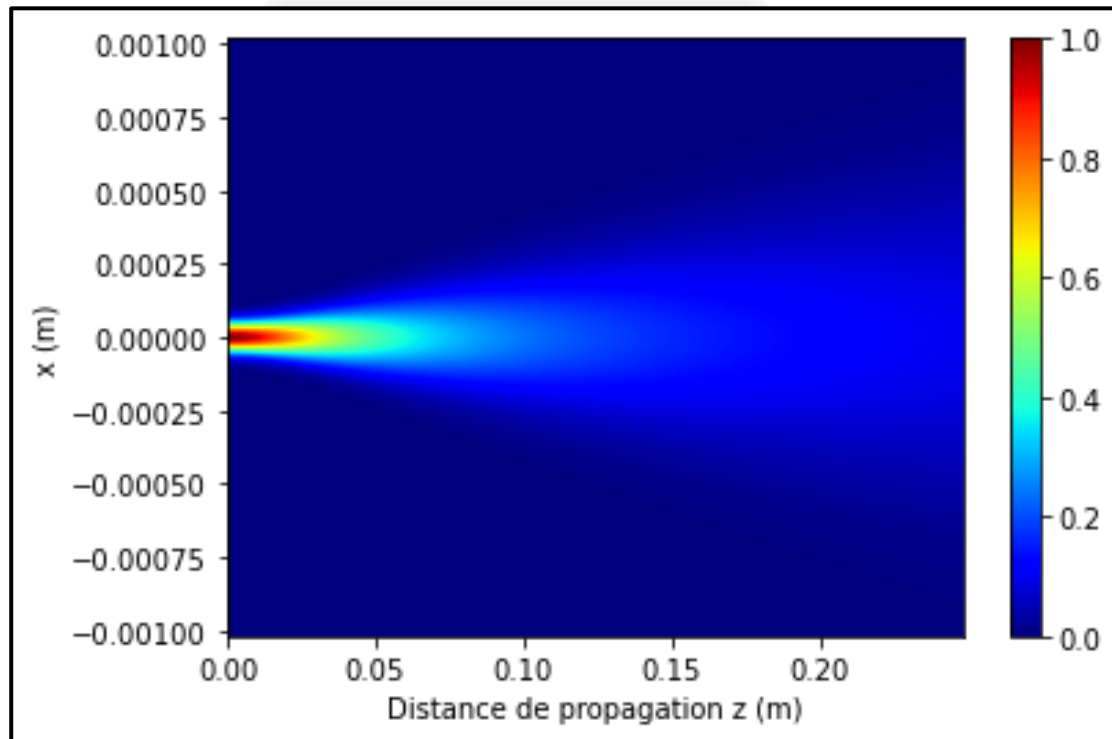


→ Obstacle en $z=0$ pour diffraction

Et la propagation guidée ?

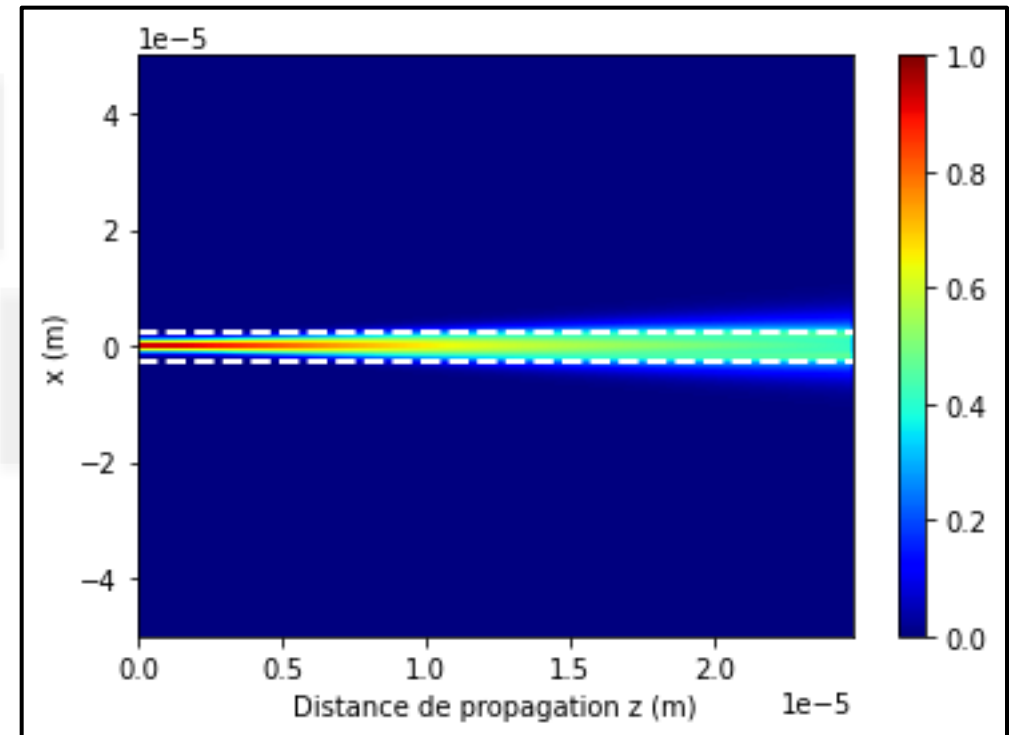
Positionnement du problème

→ Dans le vide $n(x, y, z) = 1$



n indice optique

→ Dans un guide onde $n(x, y, z) = n(x, y)$
une fibre optique par exemple



Présentation des sources

The Beam Propagation Method - Slides

par Prof. Nicolas Fressengeas, LMOPS

→ Dispo sur Arche

Annexe BPM

par Prof. Nicolas Fressengeas, LMOPS

→ Dispo sur Arche

Code BPM

par Lucas Oliviero, LMOPS

→ Dispo sur Arche

UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

Et la propagation guidée ?

Equation de Helmholtz dans la matière

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{E}(\vec{r}, \nu) + k^2 \tilde{E}(\vec{r}, \nu) = 0$$

$$\text{Où } k = \frac{2\pi\nu n}{c} = \frac{\omega n}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

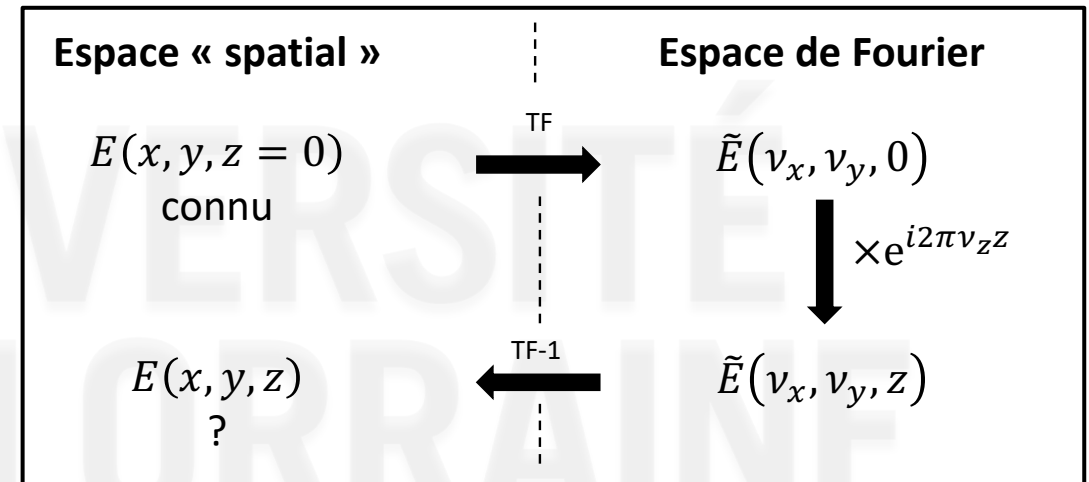
Pour une onde monochromatique

→ Impossible avec $n(x, y, z) = n(x, y)$

→ Propagation de proche en proche :

$$E(x, y, z + dz) = \text{Propagateur}(dz)E(x, y, z)$$

Même raisonnement que précédemment avec la propagation par TF :



Description du propagateur

Sous réserve de quelques hypothèses

$$E(x, y, z + dz) = \text{Propagateur}(dz)E(x, y, z)$$

$$\text{Propagateur}(dz) = e^{-i dz \left(\frac{\Delta_{\perp}}{k + \sqrt{\Delta_{\perp} + k^2}} + k \left(\frac{n(x, y)}{n_0} - 1 \right) \right)}$$

Somme de 2 termes :

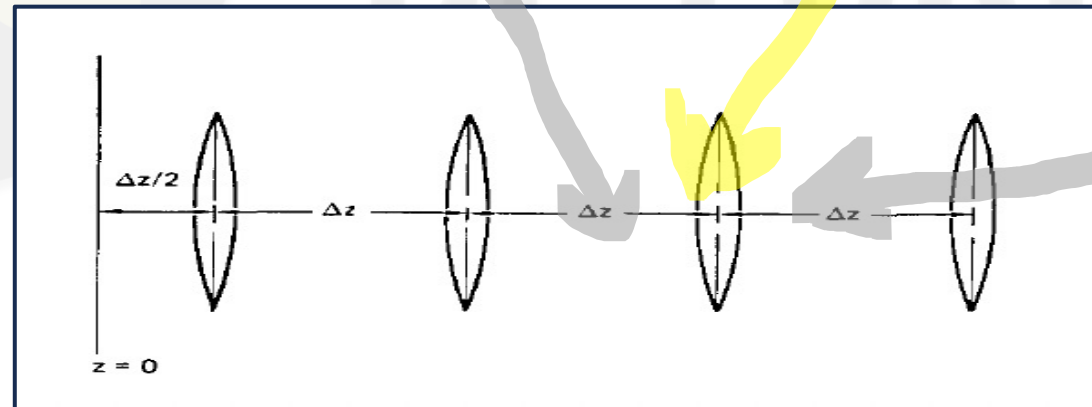
- Propagation
- Variation d'indice spatiale

Description du propagateur

Séparation des exponentielles + décomposition en $dz/2$

$$E(x, y, z + dz) = \text{Propagateur}(dz) E(x, y, z)$$

$$\text{Propagateur}(dz) = e^{-i dz/2 \left(\frac{\Delta_{\perp}}{k + \sqrt{\Delta_{\perp}^2 + k^2}} \right)} e^{-i dz k \left(\frac{n(x,y)}{n_0} - 1 \right)} e^{-i dz/2 \left(\frac{\Delta_{\perp}}{k + \sqrt{\Delta_{\perp}^2 + k^2}} \right)}$$

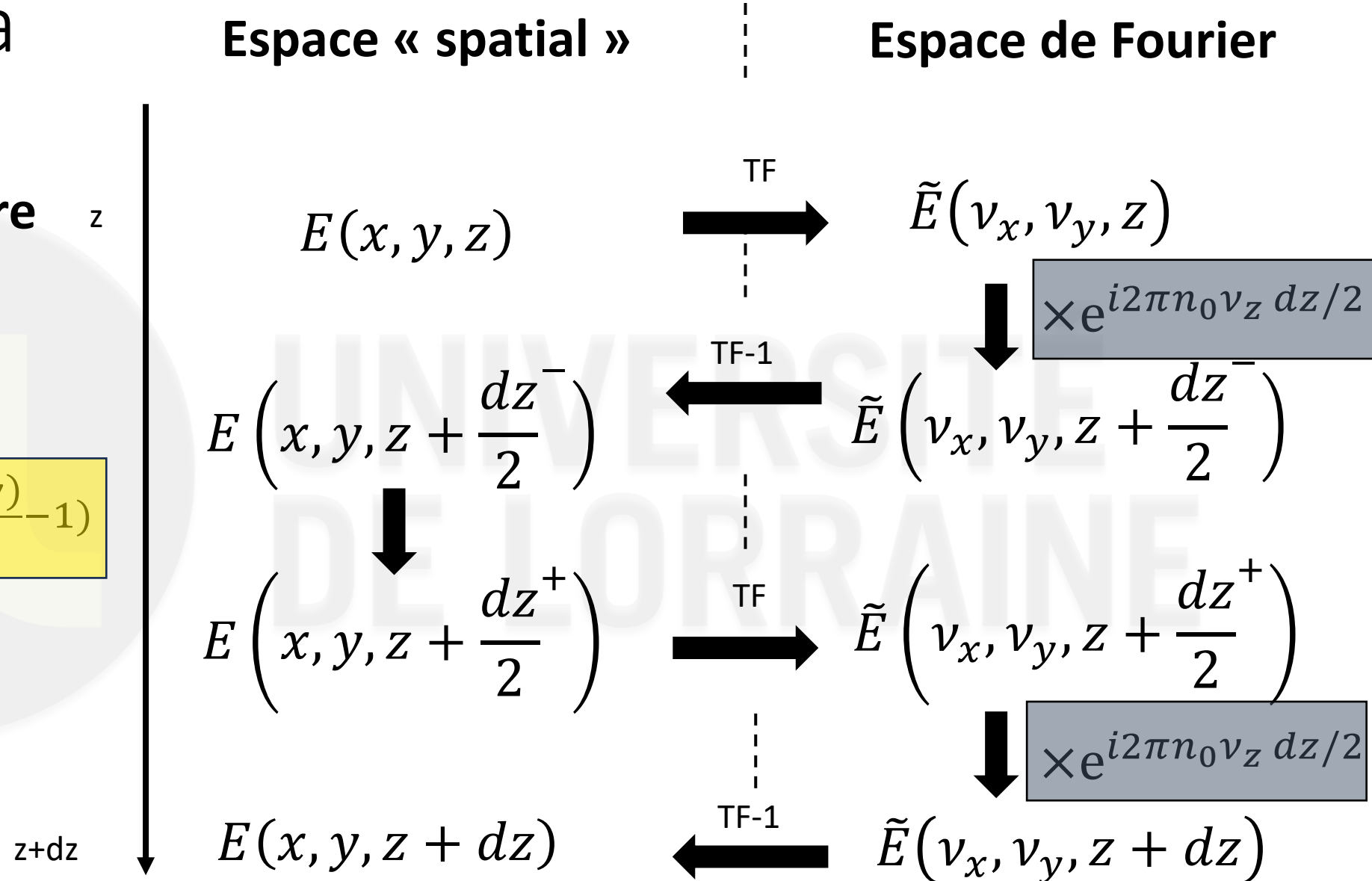


→ Opérateur sur E et non pas $\tilde{E}$
Plus facile de passer par les TF pour propagation

Synthèse de la démarche

Des aller-retours entre
domaine spatial et
fréquentiel

$$\times e^{-i dz k(\frac{n(x,y)}{n_0}-1)}$$



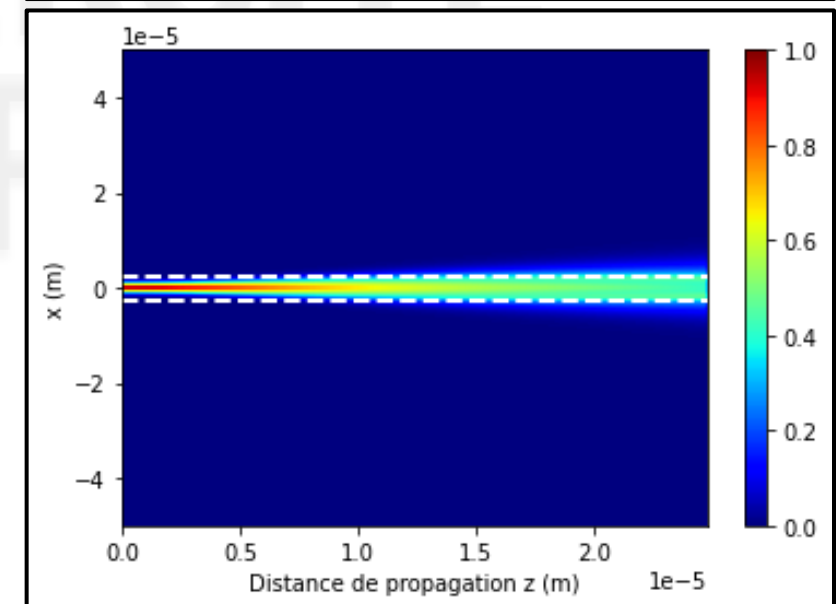
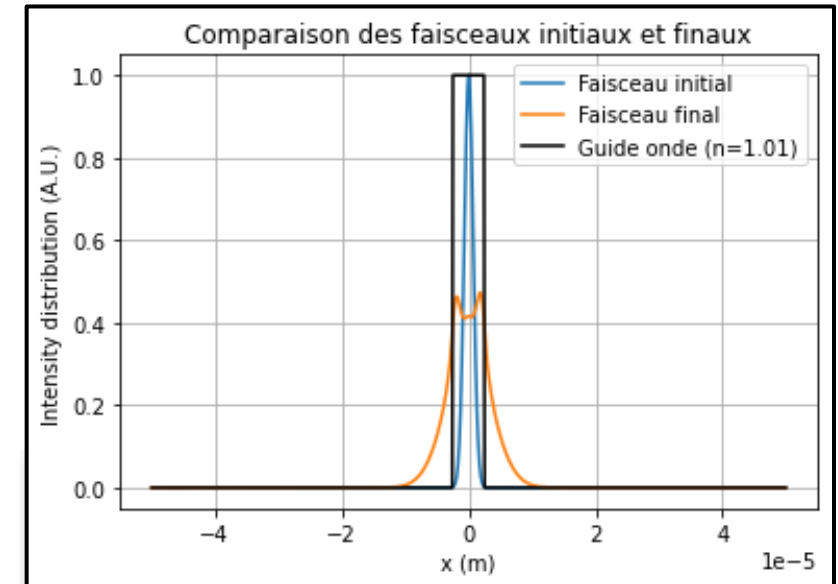
Exploration libre de BPM

Récupération du code sur Arche – CodeBPM

```

1  #- coding:utf-8 -*-
2
3  #   BPM - Simulation 1+1d Faisceau Gaussien en espace libre avec une lentille
4  #   -----()-----()-----()-----()-----
5  #   dz/2 (n1) dz (n1) ..... (n1) dz/2
6
7  # n1 ne doit pas dépasser 1% en plus de n0
8
9  from IPython import get_ipython
10 ipython = get_ipython()
11 if ipython is not None:
12     ipython.run_line_magic('matplotlib', 'qt5') # pour affichage dans une fenêtre externe
13     ipython.run_line_magic('matplotlib', 'inline') # pour affichage dans une fenêtre interne
14
15
16 import numpy as np
17 from math import pi
18 import matplotlib.pyplot as plt
19 import sys
20
21 ##### Constantes SI #####
22 largeur = 100.e-6 # Largeur de l'axe des abscisses
23 w0 = 1.e-6 # Largeur du faisceau Gaussien
24 lambd = 633.e-9 # Longueur d'onde
25 Lr = (pi*w0**2) / lambd # Longueur de Rayleigh
26 k = 2*pi/(lambd) # Vecteur d'onde
27 N = 1001 # Nombre de points de la fenêtre de calcul
28 i = complex(0,1) # Nombre complexe
29 facteur = 0.001 # Pour le théorème de Shannon
30 dz = facteur*Lr # Distance de propagation
31 LargeurGuide = 5.e-6 # Largeur guide (lentille) en m
32 LargeurGuidePt = int(N*LargeurGuide/largeur) # Largeur guide (lentille) en nombre de points
33 milieu = int(((N-1)/2))
34
35 n0 = 1 # Indice de réfraction milieu
36 n1 = 1.01 # Indice de réfraction du guide. S'il n'y a pas de guide mettre n1=n0
37
38 ##### Paramètres BPM #####
39 a = -(N-1)/2 # Centrage du nombre de points sur 0
40 b = (N-1)/2 # idem
41 NbRayleigh = 5 # Distance de propagation totale en nombre de longueur de Rayleigh
42 x = np.linspace(a, b, N)*largeur/N # Création de l'axe des abscisses
43 distance = NbRayleigh*Lr # Distance de propagation mètres
44 Nb_cellules = int(NbRayleigh/facteur) # Nombre de cellules pour la BPM
45 z = np.linspace(0, distance, Nb_cellules) # vecteur z de propagation mètres
46
47 ##### Faisceau de départ #####
48 y = np.exp((-x**2)/(w0**2)) # Faisceau gaussien de départ
49 porte = np.zeros(N, dtype = int)
50 porte[milieu-LargeurGuidePt//2:milieu+LargeurGuidePt//2] = 1
51

```



Quelques pistes

- Analyse et compréhension du code
- Voir l'impact des changements de paramètres (largeur du guide, w_0 , λ , indice ...)
- 1+1D vers 2D ?
- Quantification de la perte d'énergie hors du guide le long de z
- Effet Kerr Optique
- Librairie LightPipes de Python (nécessite Pip)

Projets sur cette thématique

- BPM ou propagation par TF : passage au 2D
- Propagation de faisceaux autres que Gaussien
- Etude de diffraction
- Propagation au travers une lentille : masques de phase
- Coupler Y ?
- Sujet de votre choix