

L1 PC – Soutien mathématique. Fonctions dérivables; nombres complexes

EXERCICE 1:

Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, et la dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $x \mapsto \cos(3x - 4) - e^{-x}$ | 2. $x \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-2x}$ | 3. $f : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ |
| 4. $x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}$ | 5. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ | 6. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$ |
| 7. $x \mapsto \frac{1}{x^7}$ | 8. $g : x \mapsto \frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$ | 9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{e^x}}$ |
| 10. $h : x \mapsto \cos(\sqrt{2x + 1})$ | 11. $x \mapsto (\ln(2x^3) + 1)^3$ | 12. $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ |

EXERCICE 2:

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x \mapsto x $ | 2. $x \mapsto \frac{x}{1 + x }$ |
| 3. $x \mapsto x \sin(x)$ | 4. $x \mapsto x \sin(x) \sin(1/x)$ |
| 5. $x \mapsto \sin(x) \sin(1/x)$. | |

EXERCICE 3:

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$:

$$\frac{3 + 6i}{3 - 4i} ; \quad \left(\frac{1 + i}{2 - i} \right)^2 ; \quad \frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}.$$

EXERCICE 4:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z + i = \bar{z} + 1$
2. $2z + \bar{z} = 2 + 3i$
3. $2z + 2\bar{z} = 2 + 3i$.

EXERCICE 5:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 + 6z + 5 = 0$
2. $z^2 - 6z + 13 = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $\frac{3z + 2}{z + 1} = z + 3$

EXERCICE 6:

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : i ; -1 ; $8 - 6i$; $15 - 8i$.

EXERCICE 7:

Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$.