

Exercices Corrigés

MSS

1A NRJ & ISN

Exercice 1.1

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Soit le système suivant
Remplir le tableau suivant



Systèmes	Dynamique ou statique	Causal ou Anticausal	Linéaire ou non Linéaire	Variant ou Invariant
$y(t) = 3u(t)$				
$y(t) = 3 \frac{du(t)}{dt}$				
$y(t) = 3u(-t)$				
$y(t) = 3u(t)+5$				
$y(t) = t \cdot u(t)$				
$y(t) = 3$				

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 1.1 Corrections

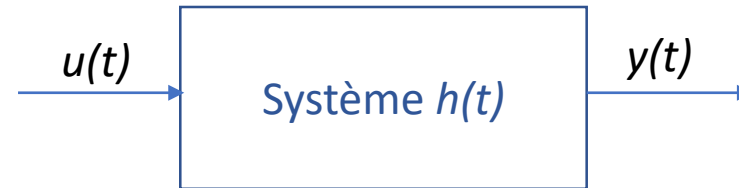
Soit le système suivant



Systèmes	Dynamique ou statique	Causal ou Anticausal	Linéaire ou non Linéaire	Variant ou Invariant
$y(t) = 3u(t)$	Dynamique	Causal	Linéaire	Invariant
$y(t) = 3 \frac{du(t)}{dt}$	Dynamique	causal	Linéaire	invariant
$y(t) = 3u(-t)$	Dynamique	Anticausal	Linéaire	Variant
$y(t) = 3u(t)+5$	Dynamique	Causal	Non Linéaire	Invariant
$y(t) = t.u(t)$	Dynamique	Causal	Linéaire	Variant
$y(t) = 3$	Statique	Indépendant de l'entrée Acausal	Non linéaire	Invariant

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 2 Soit le système H
 linéaire et invariant suivant:

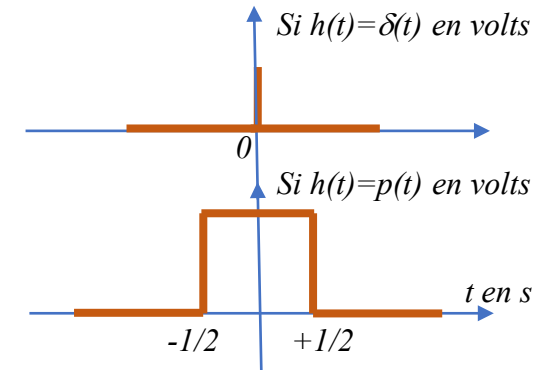


$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, $u(t)$ et $y(t)$ représente respectivement l'entrée et la sortie du système H

1. Exprimer $y(t)$ en fonction de $u(t)$ si $h(t) = \delta(t)$

2. Exprimer $y(t)$ si $h(t) = p(t)$ et que $u(t) = \delta(t)$

avec $h(t) = p(t) = 1$ pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq +\frac{1}{2}$ et 0 ailleurs



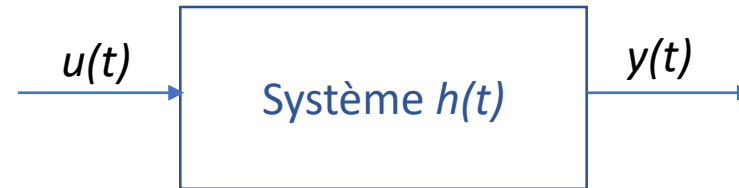
3. Exprimer la fonction de transfert du système si $h(t) = p(t)$ en régime harmonique établi

4. Exprimer $Y(jf)$ si $u(t) = A \sin(2\pi F_0 t)$ et $h(t) = p(t)$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 2 Corrections

Soit le système H linéaire et invariant suivant:



$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, $u(t)$ et $y(t)$ représente respectivement l'entrée et la sortie du système H

1. Exprimer $y(t)$ en fonction de $u(t)$ si $h(t) = \delta(t)$

$$y(t) = u(t) * h(t) = u(t) * \delta(t) = u(t)$$

Mathématiquement L'impulsion de Dirac est l'élément neutre de la convolution

Physiquement Si le système possède une réponse impulsionnelle égale à une impulsion de Dirac alors il ne modifie pas l'entrée

En réalité , il n'existe pas de système physique réel qui possède une réponse impulsionnelle égale à une impulsion de Dirac

2. Exprimer $y(t)$ si $h(t) = p(t)$ et que $u(t) = \delta(t)$

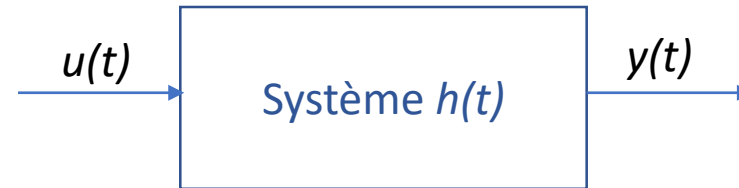
avec $h(t) = p(t) = 1$ pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq +\frac{1}{2}$ et 0 ailleurs $y(t) = u(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t) = p(t)$

Mathématiquement C'est ici la définition même de la réponse impulsionnelle des systèmes

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 2 Corrections

Soit le système H
linéaire et invariant suivant:



$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, $u(t)$ et $y(t)$ représente respectivement l'entrée et la sortie du système H

1. Exprimer $y(t)$ en fonction de $u(t)$ si $h(t) = \delta(t)$ $y(t) = u(t) * h(t) = u(t)$

2. Exprimer $y(t)$ si $h(t) = p(t)$ et que $u(t) = \delta(t)$

avec $h(t) = p(t) = 1$ pour $-\frac{1}{2} \leq t \leq +\frac{1}{2}$ et 0 ailleurs $y(t) = u(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$

3. Exprimer la fonction de transfert du système en fonction de $h(t) = p(t)$ en régime harmonique établi

$$H(j\omega) = TF(h(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{-j\omega t} dt = \text{sinc}(\pi f)$$

4. Exprimer $Y(jf)$ si $u(t) = A \sin(2\pi F_0 t)$ et $h(t) = p(t)$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) = \frac{A}{2j} (\delta(f - F_0) - \delta(f + F_0)) \cdot H(j\omega) =$$

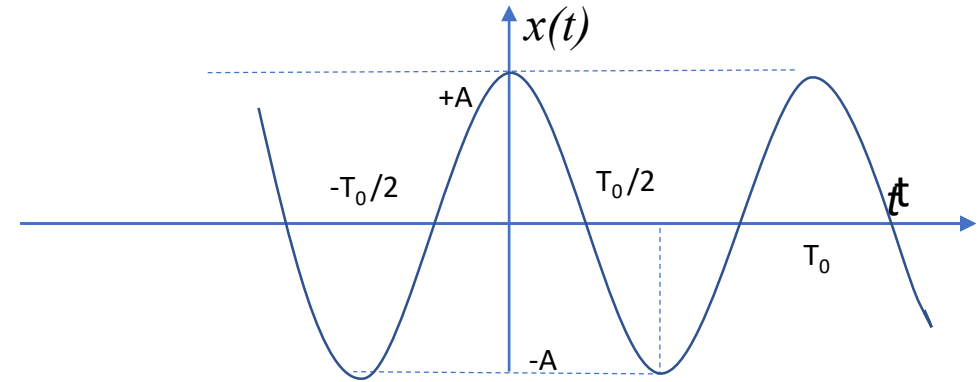
$$Y(j\omega) = \frac{A}{2j} (\delta(f - F_0) \text{sinc}(\pi F_0) - \delta(f + F_0) \text{sinc}(-\pi F_0))$$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 3

1. Exprimer la série de Fourier exponentielle complexe de la fonction $x(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$ de période T_0 et de fréquence F_0
2. Exprimer le spectre bilatéral $X(f)$ et représenter $|X(f)|$
3. Exprimer la puissance moyenne P sur une période de $x(t)$

$$F_0 = 1/T_0$$



Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 3 Corrections

Exercice 3

- Exprimer la série de Fourier exponentielle complexe de la fonction $x(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$ de période T_0 et de fréquence F_0

La décomposition en série de $x(t)$ s'exprime telle que

$$x(t) = \frac{e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t}}{2}$$

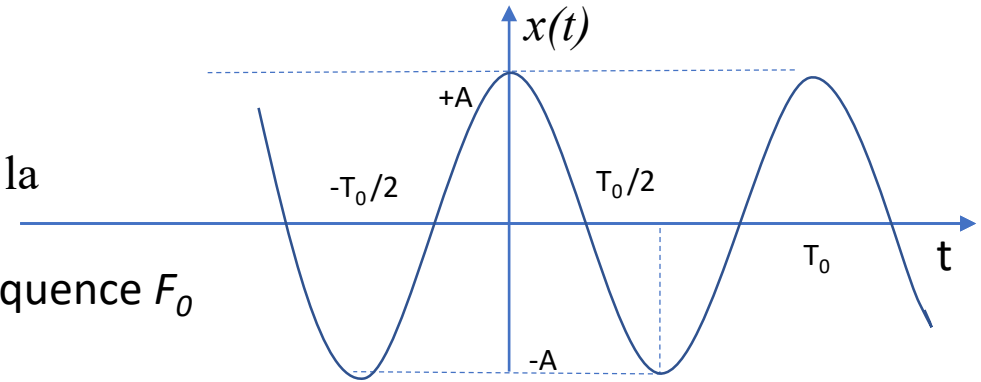
- Exprimer son spectre $X(f)$ On rappelle que

$$X(f) = |X(f)| = \frac{A}{2} \delta(f - F_0) + \frac{A}{2} \delta(f + F_0)$$

- Exprimer la puissance moyenne P sur une période de $x(t)$

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = A^2/2$$

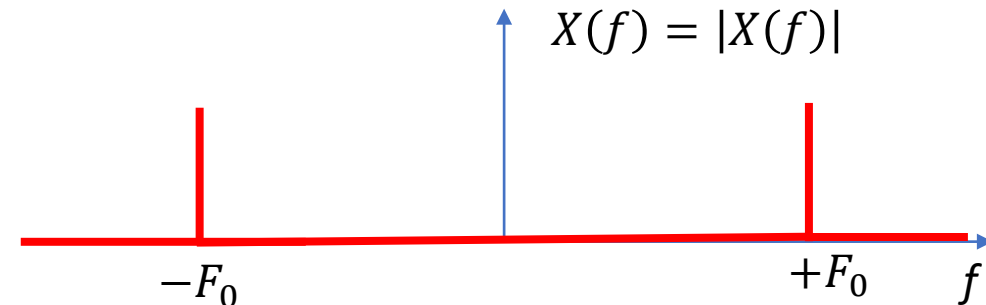
$$F_0 = 1/T_0$$



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n F_0 t}$$

$$\text{avec } X_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi n F_0 t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} dt = \delta(f) \quad \text{donc} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (f - F_0) t} dt = \delta(f - F_0)$$

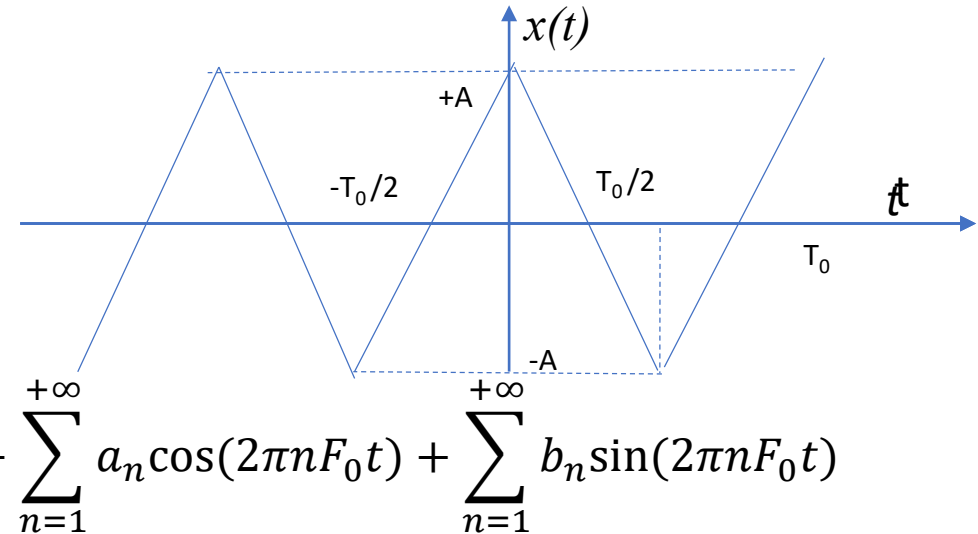


Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

$$F_0 = 1/T_0$$

Exercice 4

1. Exprimer la série de Fourier de la fonction dents de scies $f(t)$ suivante de période T_0 et de fréquence F_0
2. Exprimer son spectre bilatéral
3. Exprimer sa puissance moyenne P
4. Représenter son spectre



$$1. \text{ La décomposition en série de } x(t) \text{ s'exprime telle que } x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n F_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n F_0 t)$$

La fonction $x(t)$ est à valeur moyenne nulle donc $a_0 = 0$

La fonction $x(t)$ est paire donc $b_n = 0$

Elle possède une symétrie demi-onde $\forall t \quad x\left(t + \frac{T_0}{2}\right) = -x(t)$ donc $a_n = 0$ pour les valeurs paires de n

Pour les valeurs impaires de n : en raison de la symétrie quart d'onde on se contente d'intégrer sur l'intervalle $0 \leq t \leq T_0/4$

Dans l'intervalle $0 \leq t \leq T_0/4$:

$$x(t) = +\frac{4A}{T_0} (T_0/4 - t)$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/4} \frac{4A}{T_0} (T_0/4 - t) \cos(2n\pi F_0 t) dt = 0 \text{ si } n \text{ paire et } \frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ si } n \text{ impaire}$$

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)2\pi F_0 t)$$

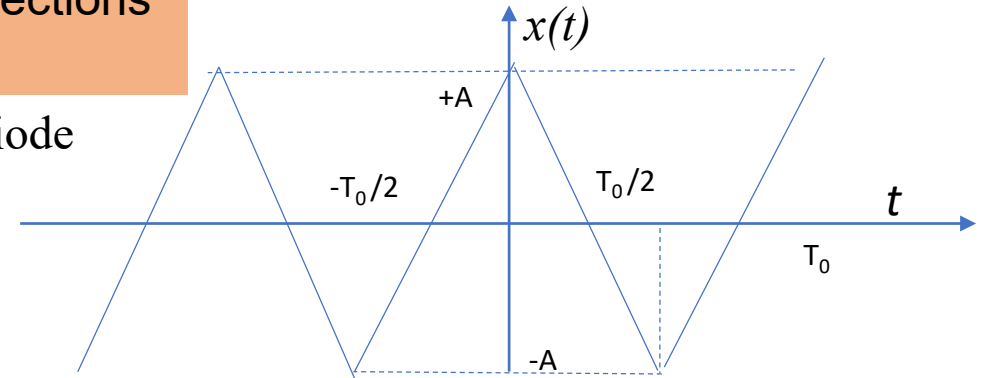
Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 3 Corrections

$$F_0 = 1/T_0$$

Exercice 4

1. Calculer la série de Fourier de la fonction $x(t)$ suivante de période T_0 et de fréquence F_0
2. Exprimer son spectre
3. Exprimer sa puissance moyenne
4. Représenter son spectre



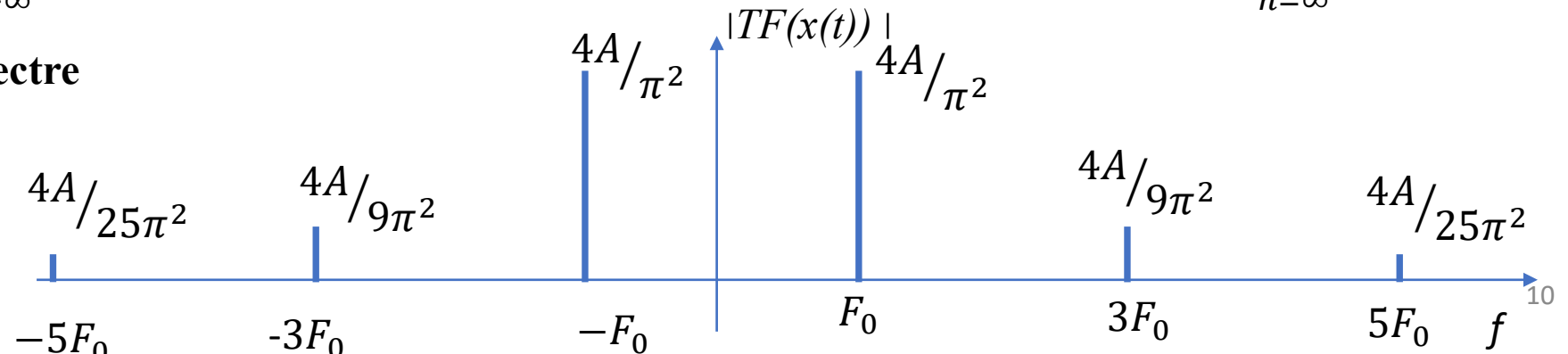
$$TF(\cos(2\pi Ft)) = \frac{1}{2}\delta(f - F) + \frac{1}{2}\delta(f + F)$$

Donc

$$TF(x(t)) = \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} (\delta(f - (2n+1)F_0) + \delta(f + (2n+1)F_0))$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4A}{\pi^2(2n+1)^2} \right)^2$$

4. Représenter son spectre



Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

$F_0 = 1/T_0$

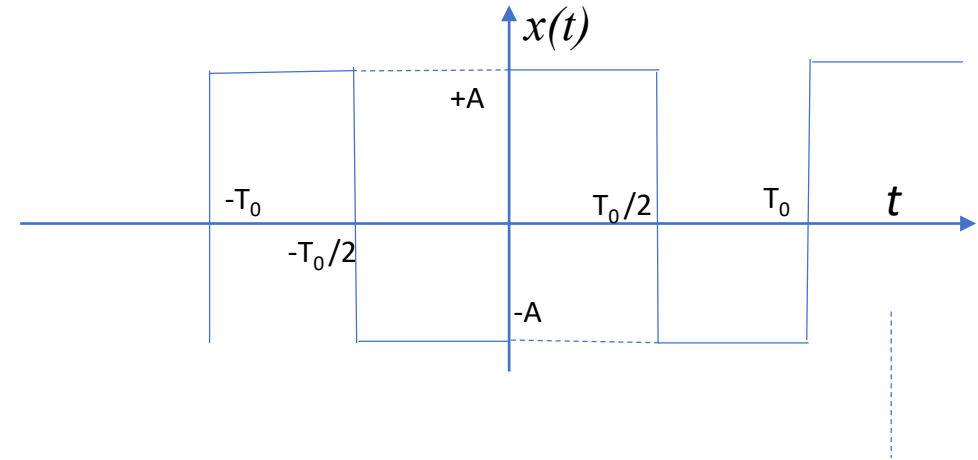
Exercice 5

Analyse spectrale de signaux périodiques

Soit un signal **carré** d'amplitude A , de fréquence f_0 et de valeur moyenne nulle

AN: $F_0 = 4\text{kHz}$ et $A = 3\text{Volts}$

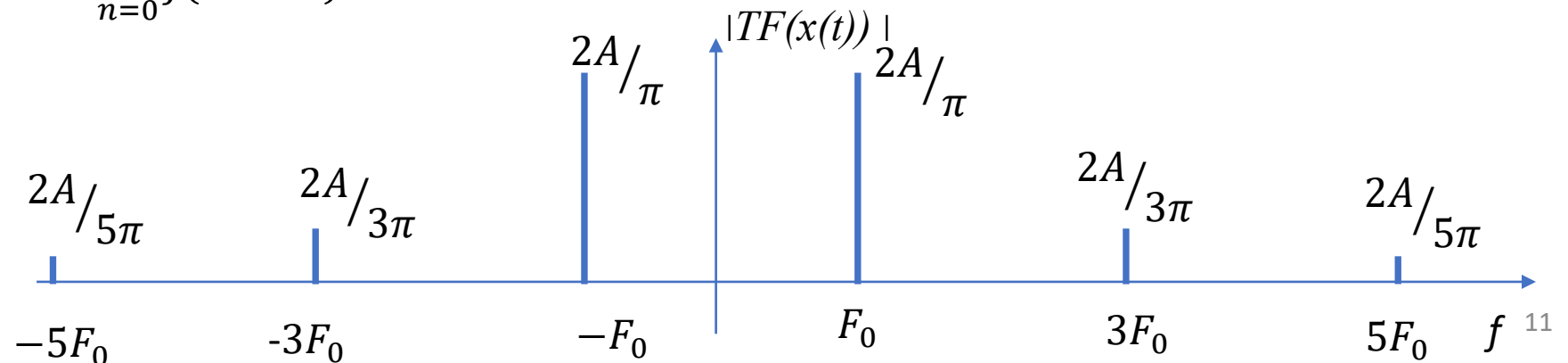
1. Définir l'amplitude et la fréquence du fondamentale
2. Définir l'amplitude et la fréquence du 1^{er} Harmonique



La décomposition en série de Fourier de $x(t)$ s'exprime telle que
$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t)$$

Donc
$$TF(x(t)) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{j(2n+1)} (\delta(f - (2n+1)F_0) - \delta(f + (2n+1)F_0))$$

son spectre



Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

$$F_0 = 1/T_0$$

Exercice 4 Corrections

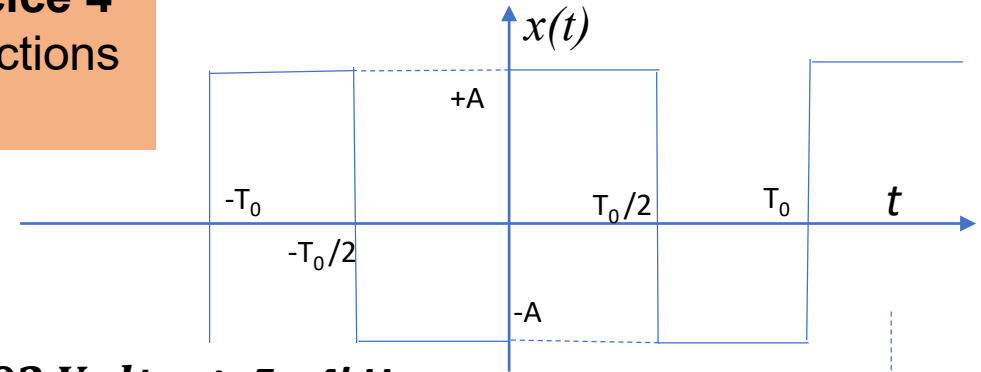
Exercice 5

Analyse spectrale de signaux périodiques

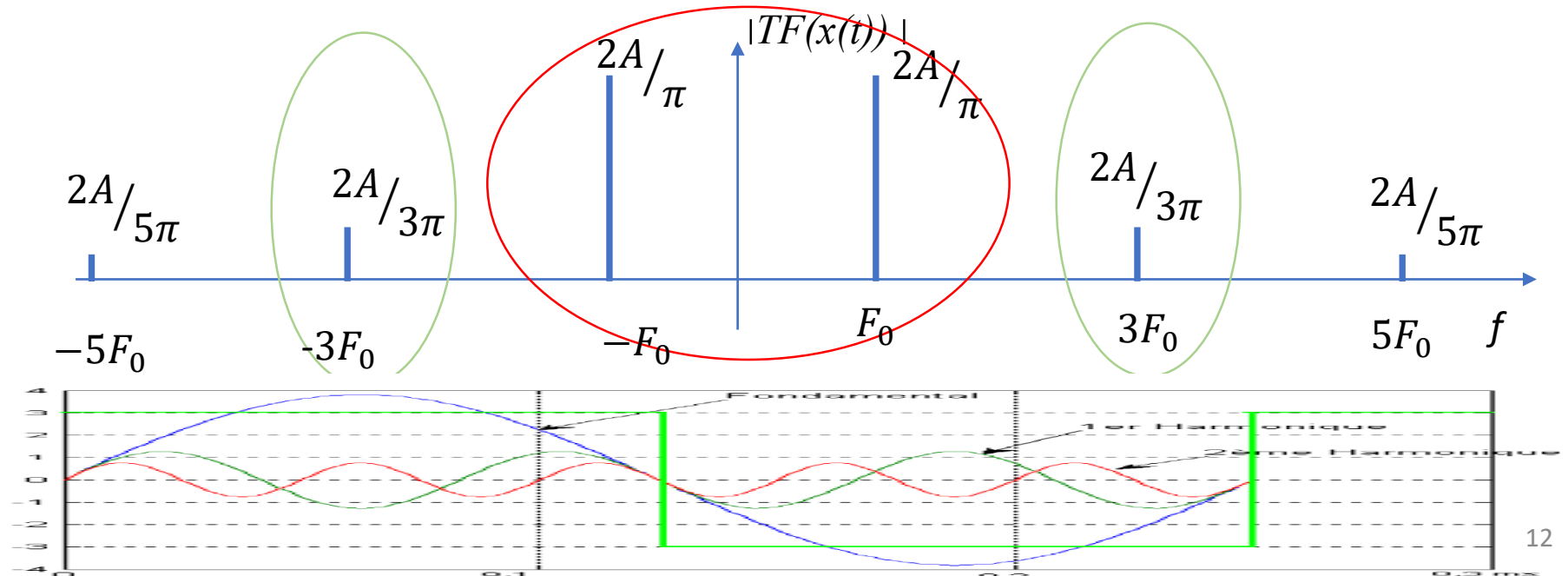
Soit un signal carré d'amplitude A , de fréquence F_0 et de valeur moyenne nulle

AN: $F_0 = 4\text{kHz}$ et $A = 3\text{Volts}$

1. Définir l'amplitude et la fréquence du fondamentale: $2A/\pi \approx 1,92\text{ Volts}$ et $F_0 = 4\text{kHz}$
2. Définir l'amplitude et la fréquence du 1^{er} Harmonique: $2A/3\pi \approx 0,64\text{ Volts}$ et $3F_0 = 12\text{kHz}$



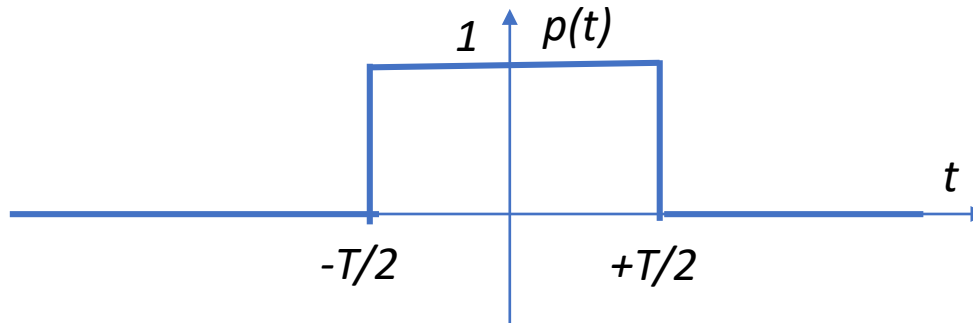
son spectre



Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 6

Soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que



$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

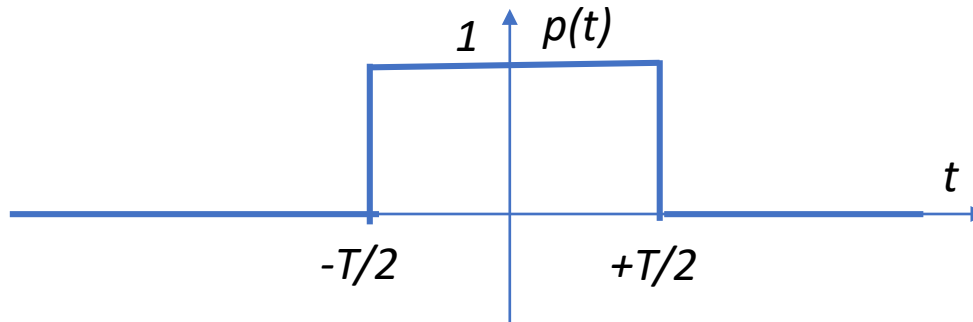
1. Calculer l'énergie E_p de la fonction $p(t)$ sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$
2. Calculer la transformée de Fourier $P(f)$ de $p(t)$
3. Représenter $|P(f)|$
4. Exprimer l'énergie E_{TFP} de $P(f)$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 6 Corrections

Exercice 6 soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



1. Calculer l'énergie E_p de la fonction $p(t)$

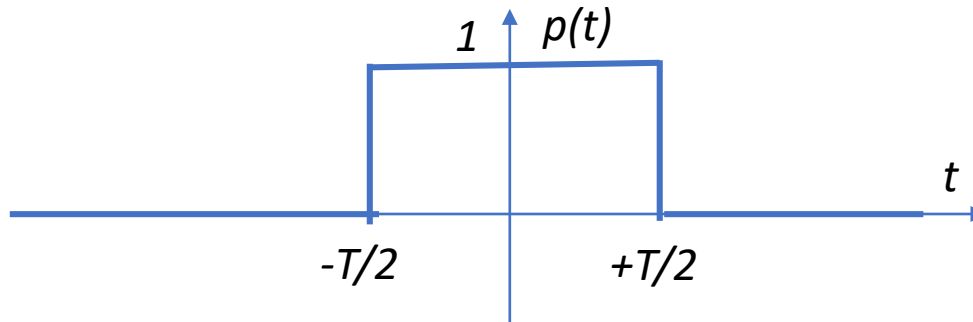
$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} dt = T$$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 6 Corrections

Exercice 6 soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



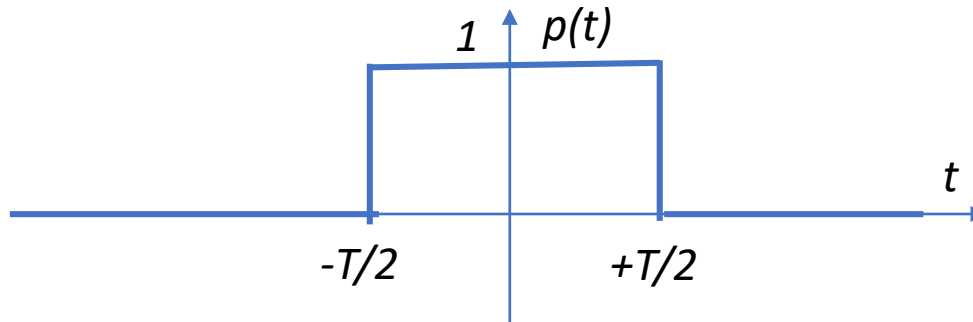
2. Calculer la transformée de Fourier $P(f)$ de $p(t)$

$$P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi f t} dt = \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T)$$

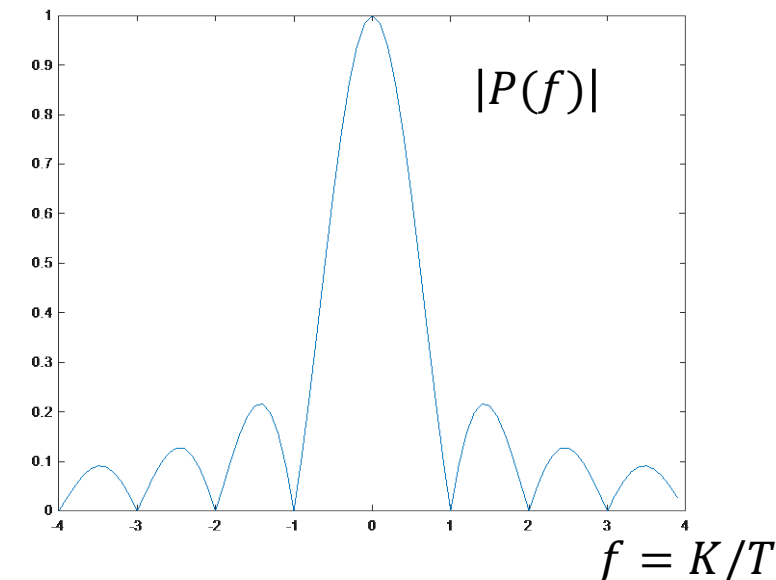
Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 6 Corrections

Exercice 6 soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$



1. Calculer l'énergie E_p de la fonction $p(t)$ sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$
2. Calculer la transformée de Fourier $P(f)$ de $p(t)$
3. Représenter $|P(f)|$
4. Exprimer l'énergie E_{TFP} de $P(f)$

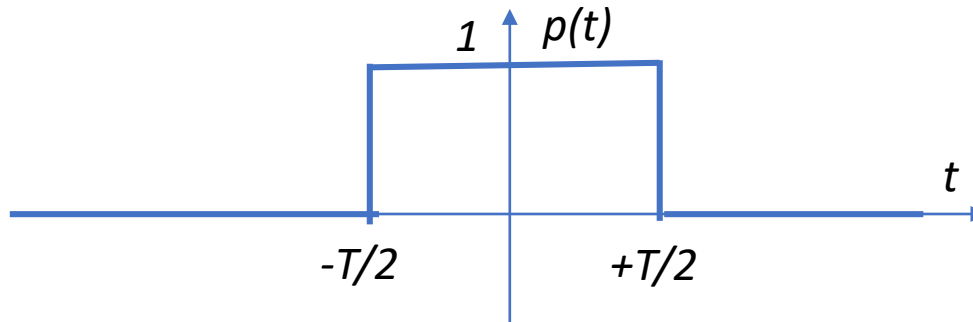


Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 6 Corrections

Exercice 6 soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



1. Calculer l'énergie E_p de la fonction $p(t)$ sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$
2. Calculer la transformée de Fourier $P(f)$ de $p(t)$
3. Représenter $|P(f)|$
4. Exprimer l'énergie E_{TFP} de $P(f)$

Le théorème de Parseval–Plancherel signifie qu'il y a conservation de l'énergie dans les deux domaines : un signal temporel et sa transformation de Fourier ont la même énergie.

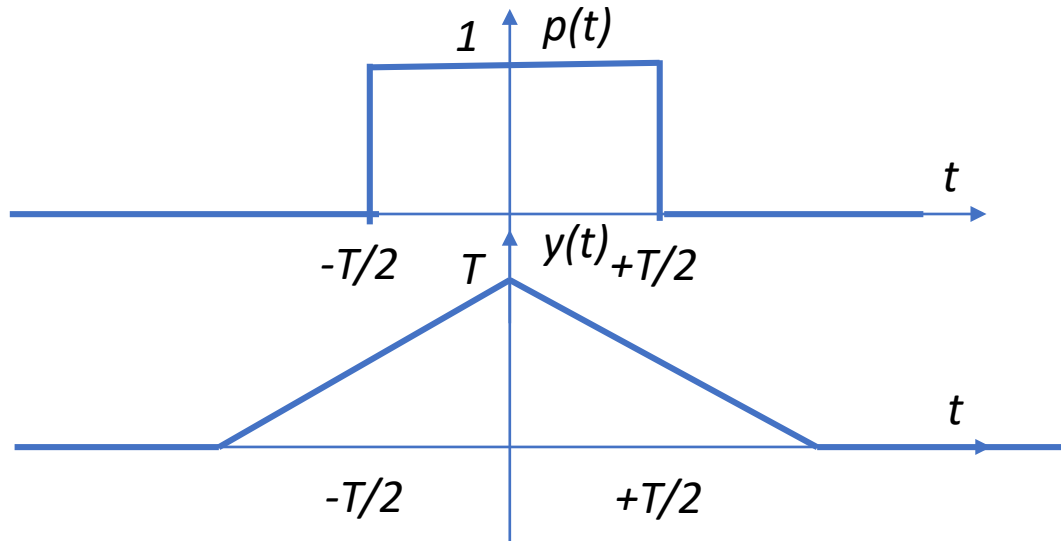
$$E_{TFP} = E_p$$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 7 :

Soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



On rappelle que la convolution d'une fonction porte par elle-même est la fonction triangle $y(t)$ telle que :

$$y(t) = p(t) * p(t) = \begin{cases} T - |t| & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| \geq T \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier $P(j\omega)$ de $p(t)$
2. En déduire la transformée de Fourier $Y(j\omega)$ de $y(t)$?

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 7 Corrections

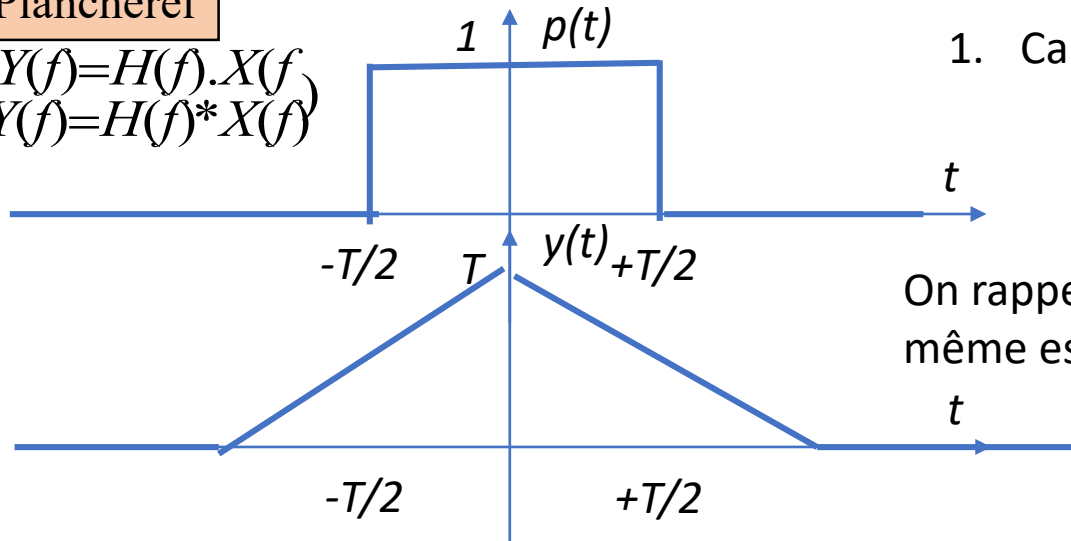
Exercice 7 soit la fonction porte de largeur T centrée sur 0 telle que

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Théorème de Plancherel

$$y(t) = h(t) * x(t) \implies Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$y(t) = h(t) \cdot x(t) \implies Y(f) = H(f) * X(f)$$



1. Calculer la transformée de Fourier $P(j\omega)$ de $p(t)$

$$P(f) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T)$$

On rappelle que la convolution d'une fonction porte par elle-même est la fonction triangle $y(t)$ telle que :

$$y(t) = p(t) * p(t) = \begin{cases} T - |t| & \text{si } |t| < T \\ 0 & \text{si } |t| \geq T \end{cases}$$

2. En déduire la transformée de Fourier $Y(j\omega)$ de $y(t)$?

$$Y(j\omega) = TF(p(t) * p(t)) = TF(p(t)) \cdot TF(p(t)) = |X(j\omega)|^2 = X^2(j\omega) = T^2 \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 8 Séparation de 2 fréquences : Un capteur de vibration (accéléromètre) mesure une information $m(t)$ afin de déterminer les fréquences de vibration d'une aile d'avion :

Le modèle théorique est le suivant $m(t) = A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \cos(2\pi F_2 t)$

Le modèle pratique est le suivant $m_p(t) = (A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \cos(2\pi F_2 t)) p(t)$

La fonction $p(t)$ représente la modélisation de la fenêtre d'observation (temps d'acquisition des données pour l'analyse)

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier $M_p(f)$ de $m_p(t)$.

Représenter le module du spectre $|M_p(f)|$ en fonction de f .

Quelle est l'influence de la durée d'observation T sur $|M_p(f)|$?

Soit $F_m = \frac{F_1 + F_2}{2}$ la fréquence moyenne, Calculer $P_M = |M_p(F_m)|^2$ la puissance du signal à cette fréquence

Déterminer la durée d'observation nécessaire pour que P_M soit inférieure à la moitié de la puissance minimale en F_1 (et en F_2)

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

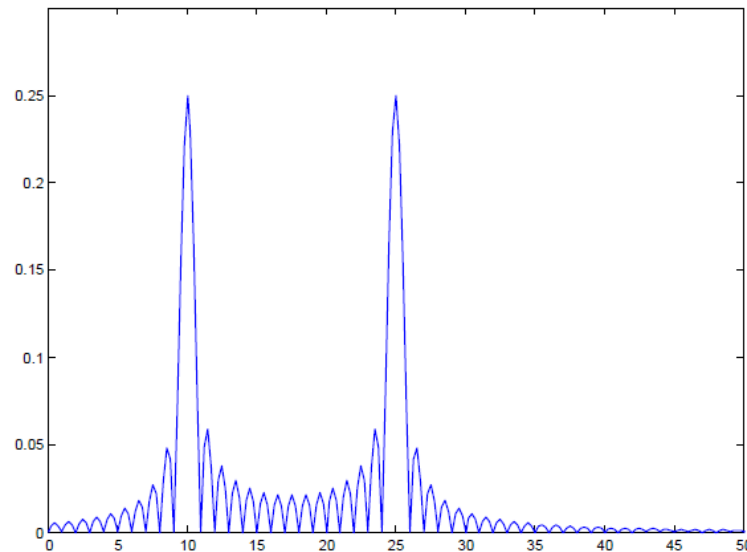
Exercice 8 Séparation de 2 fréquences $m_p(t) = (A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \cos(2\pi F_2 t)) p(t)$

Calculer la transformée de Fourier $M_p(f)$ de $m_p(t)$.

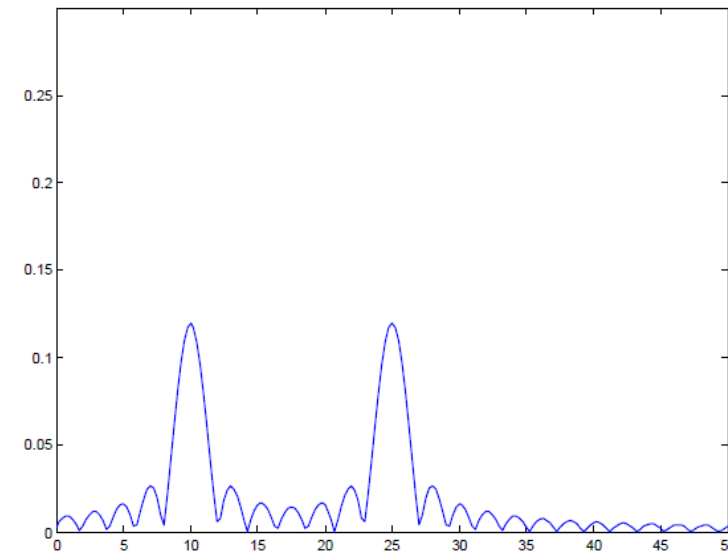
$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$M_p(f) = \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f - F_1)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f + F_1)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f - F_2)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f + F_2))$$

Représenter le module du spectre $|M_p(f)|$ en fonction de f .



$|M_p(f)|$ pour $f_1=10\text{KHz}$ $f_2=25\text{KHz}$ et $T=1\text{s}$



$|M_p(f)|$ pour $f_1=10\text{KHz}$ $f_2=25\text{KHz}$ et $T=0,5\text{s}$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 8 Corrections

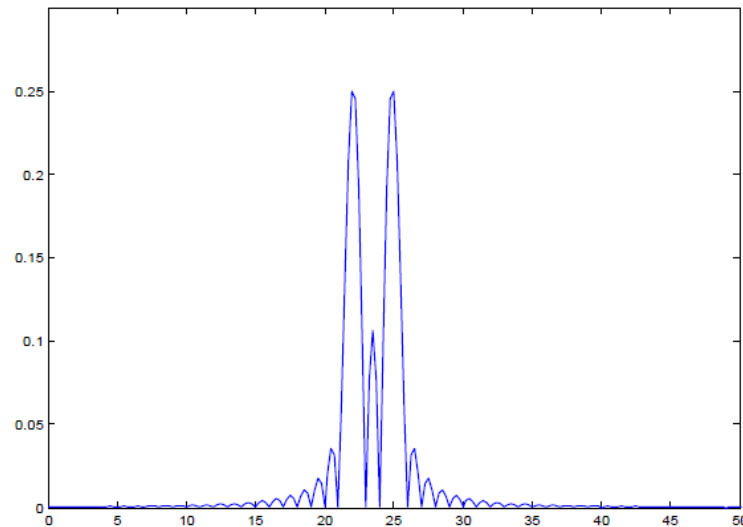
Exercice 8 Séparation de 2 fréquences $m_p(t) = (A_1 \cos(2\pi F_1 t) + A_2 \cos(2\pi F_2 t)) p(t)$

Calculer la transformée de Fourier $M_p(f)$ de $m_p(t)$.

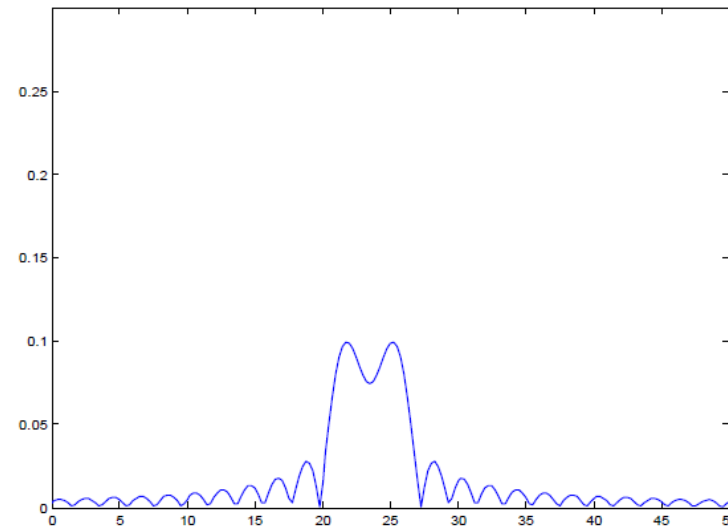
$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$M_p(f) = \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f - F_1)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f + F_1)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f - F_2)) + \frac{AT}{2} \text{sinc}(2\pi(f + F_2))$$

Représenter le module du spectre $|M_p(f)|$ en fonction de f .



$|M_p(f)|$ pour $f_1=22\text{KHz}$ $f_2=25\text{KHz}$ et $T=1\text{s}$



$|M_p(f)|$ pour $f_1=22\text{KHz}$ $f_2=25\text{KHz}$ et $T=0,5\text{s}$

Partie I: Convolution, Série de Fourier, Transformée de Fourier, Energie & Puissance d'un signal

Exercice 8 Corrections

Exercice 8 Séparation de 2 fréquences : Un capteur de vibration (accéléromètre) mesure un information $m(t)$ afin de déterminer les fréquences de vibration d'une aile d'avion :

Soit $F_m = \frac{F_1 + F_2}{2}$ la fréquence moyenne , Calculer $P_M = |M_p(F_m)|^2$ la puissance du signal à cette fréquence:

$$P_M = 4(AT)^2 \left[\text{sinc} \left(\pi T \left(\frac{F_1 - F_2}{2} \right) \right) \right]^2$$

Déterminer la durée d'observation nécessaire pour que P_M soit inférieure à la moitié de la puissance minimale en F_1 (et en F_2):

On veut que $P_M < P_1/2$ D'où

$$\frac{\sin \left(\pi T \left(\frac{F_1 - F_2}{2} \right) \right)}{\left(\pi T \left(\frac{F_1 - F_2}{2} \right) \right)} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{4\sqrt{2}}{\pi(F_1 - F_2)} \leq T$$