

TD6 : Limites et intégrales élémentaires

Dans tous ces exercices, on demande de déterminer la limite si elle existe.

1. POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1. Déterminez les limites suivantes :

- (1) $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ en $\pm\infty$ et en 1 ;
- (2) $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ en $\pm\infty$ et en 2 ;
- (3) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $\pm\infty$ et en 0 ;
- (4) $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ aux bornes de l'ensemble de définition (ce qui peut inclure $\pm\infty$)
- (5) $x \mapsto \frac{x}{(x-3)^2}$ aux bornes de l'ensemble de définition (ce qui peut inclure $\pm\infty$)
- (6) $x \mapsto x - x^2$ en 0 et $\pm\infty$
- (7) $x \mapsto x^2 + 3x + x^3 + x$ en $\pm\infty$
- (8) $x \mapsto x - \sqrt{x}$ en $+\infty$;
- (9) $x \mapsto \frac{x+4}{x^2+1}$ en $\pm\infty$;
- (10) $x \mapsto \frac{x^4+1}{x^2+1}$ en $\pm\infty$.

Exercice 2. (1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 - \sin x + x^7 - x^2$

- (2) Limites au bord de l'ensemble de définition de $f(x) := x^5 - x^2 + x^3 + \frac{1}{x-3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$
- (4) Ensemble de définition et limites aux bord de $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^2+2x-3}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{x}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x}{3x^2-2x-1}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x+x}{x^2-x}$
- (10) Limites en -1 et -2 de $f(x) := \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+2)}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-5x+6}$

Exercice 3. Déterminez les limites suivantes :

- (1) $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$ en $\pm\infty$;
- (2) $x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$ aux bornes de l'ensemble de définition ;
- (3) $x \mapsto x + \ln x$ en 0 et $+\infty$
- (4) $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x-1}$ aux bornes de l'ensemble de définition ;
- (5) $x \mapsto x(2 + \sin \sqrt{x})$ en $+\infty$;

2. INTÉGRALES

Exercice 4. Calculez les intégrales suivantes

(1) $\int_0^2 (x^2 + x) dx$

(2) $\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin t dt$

(3) $\int_{-\pi/2}^{\pi} (t - 2 \cos t) dt$

(4) $\int_{-1}^3 (x^4 - x^2 + e^x) dx$

(5) $\int_{-1}^3 (x^4 - x^2 + e^x) dx$

(6) $\int_0^2 3\sqrt{t} dt$

(7) $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$

(8) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} te^{t^2} dt$

(9) $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$

(10) $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin(x) dx$

(11) $\int_0^1 \frac{t+1/2}{t^2+t+1} dt$

(12) $\int_2^5 \frac{dt}{t \ln t}$

(13) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (2 \sin t + 3 \cos t) dt$

Exercice 5. Déterminez

$$\int_{-3}^5 (|x-1| + |x| + |x+1|) dx \text{ et } \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sin |t| dt$$