

Exercices Corrigés

MSS

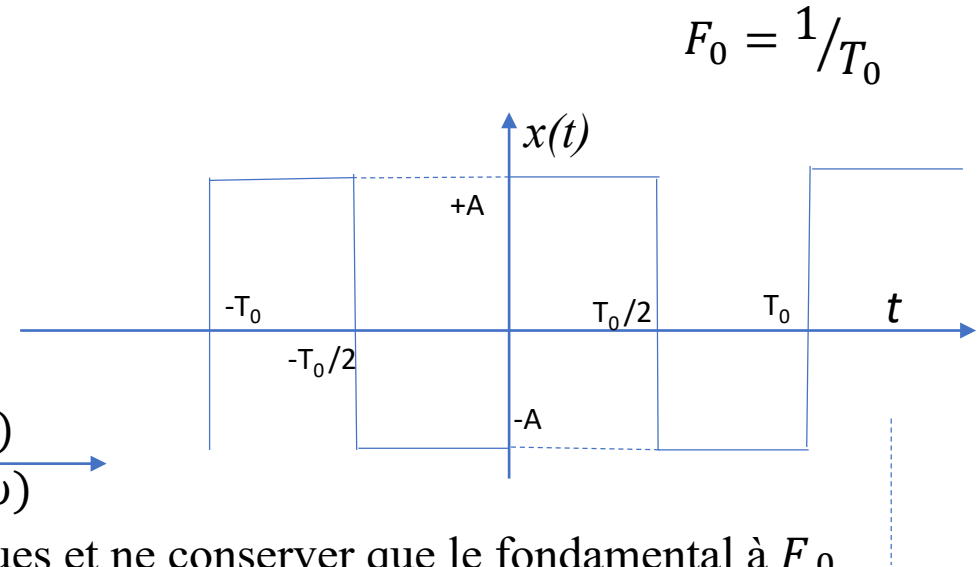
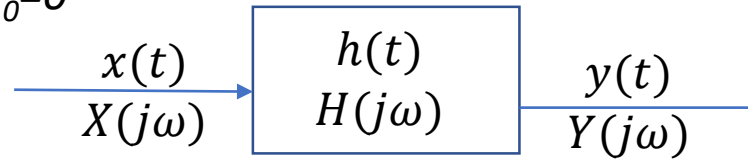
1A NRJ & ISN

Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Soit un signal **carré** d'amplitude A , de fréquence f_0 et de valeur moyenne nulle $\overline{x(t)} = A_0$

AN: $F_0 = 1\text{kHz}$ et $A = 1\text{Volts}$ et $A_0 = 0$



On souhaite dimensionner un filtre H pour filtrer tous les harmoniques et ne conserver que le fondamental à F_0

$h(t)$ représente la réponse impulsionnelle du filtre

$H(j\omega)$ représente la fonction de transfert du filtre

1. Définir la fonction de transfert $H(j\omega)$ du filtre idéal puis exprimer la sortie $Y(j\omega)$ et $y(t)$

2. La fonction de transfert réelle est telle que $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$ avec $\omega_0 = 2\pi F_0$,

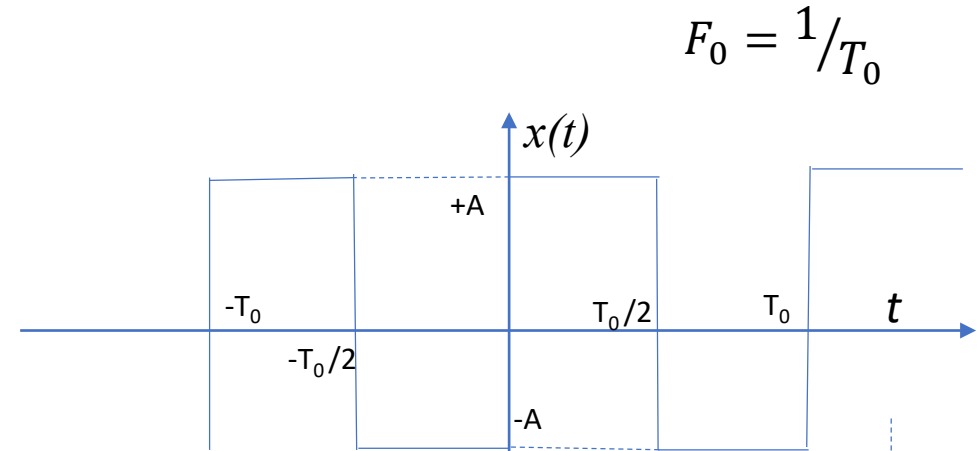
Exprimer la sortie du filtre $y(t)$ si l'entrée est $x(t)$

Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Soit un signal **carré** d'amplitude A , de fréquence f_0 et de valeur moyenne nulle A_0

AN: $F_0 = 1\text{kHz}$ et $A = 5\text{Volts}$ et $A_0=0$

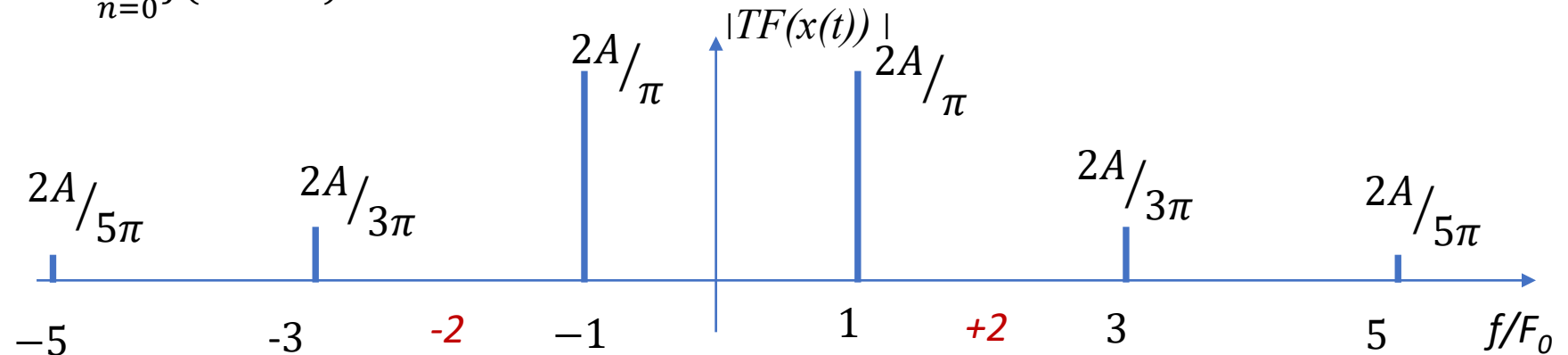


On souhaite dimensionner un filtre pour filtrer tous les harmoniques et ne conserver que le fondamental à F_0

La décomposition en série de Fourier de $x(t)$ s'exprime telle que
$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t)$$

Donc
$$TF(x(t)) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{j(2n+1)} (\delta(f - (2n+1)F_0) - \delta(f + (2n+1)F_0))$$

son spectre



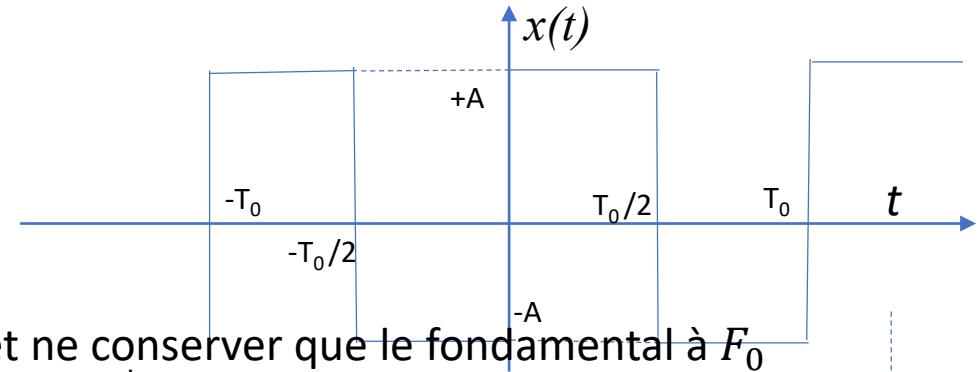
Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Exercice 2,1 Corrigé

Soit un signal **carré** d'amplitude A , de fréquence f_0 et de valeur moyenne nulle A_0

AN: $F_0 = 1\text{kHz}$ et $A = 5\text{Volts}$ et $A_0=0$



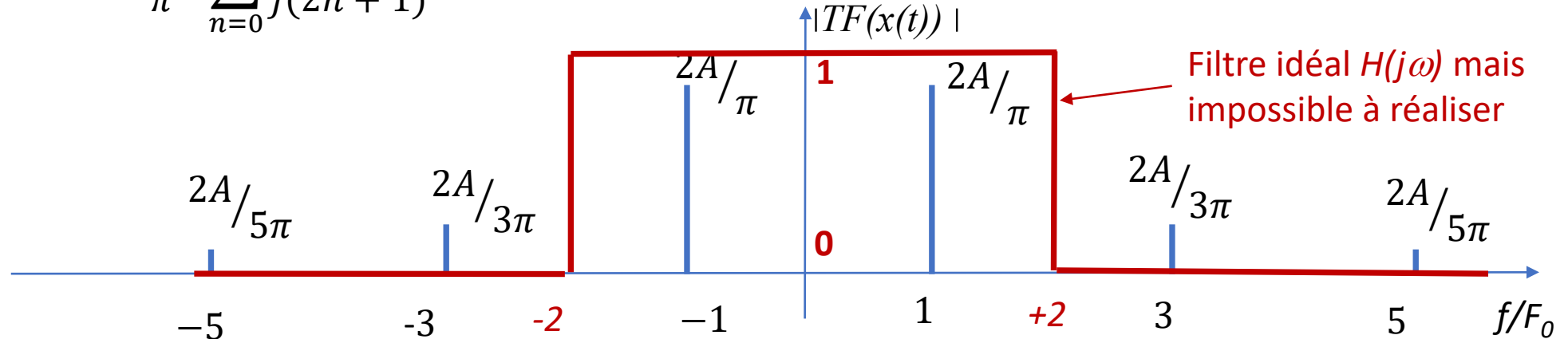
$$F_0 = 1/T_0$$

On souhaite dimensionner un filtre pour filtrer tous les harmoniques et ne conserver que le fondamental à F_0

La décomposition en série de Fourier de $x(t)$ s'exprime telle que
$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t)$$

Donc
$$TF(x(t)) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{j(2n+1)} (\delta(f - (2n+1)F_0) - \delta(f + (2n+1)F_0))$$

son spectre



Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Exercice 2,1 Corrigé

$$F_0 = 1/T_0$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t)$$

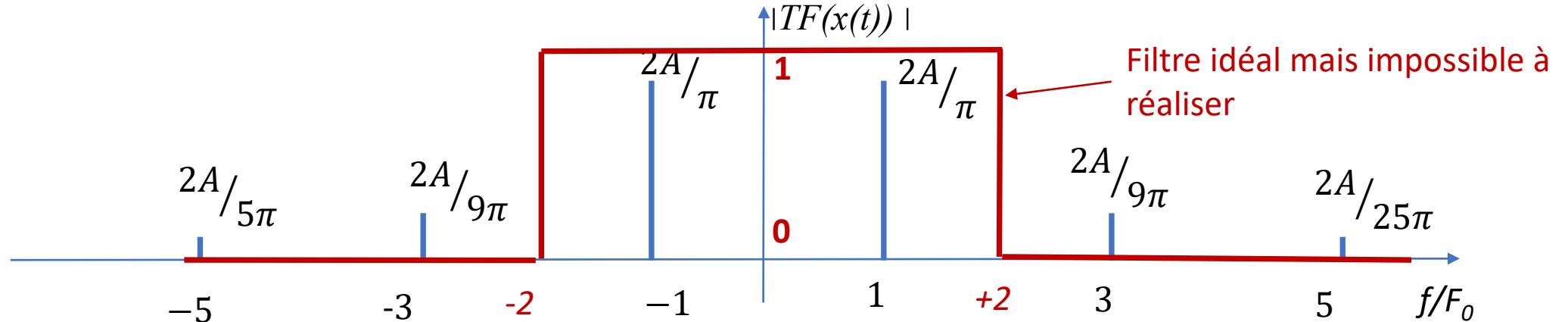
$$TF(x(t)) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{j(2n+1)} (\delta(f - (2n+1)F_0) - \delta(f + (2n+1)F_0))$$

$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < 2F_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$Y(jf) = \frac{2A}{j\pi} (\delta(f - F_0) - \delta(f + F_0))$$

$$y(t) = \frac{4A}{\pi} \sin(2\pi F_0 t)$$

son spectre



Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Exercice 2,1 Corrigé

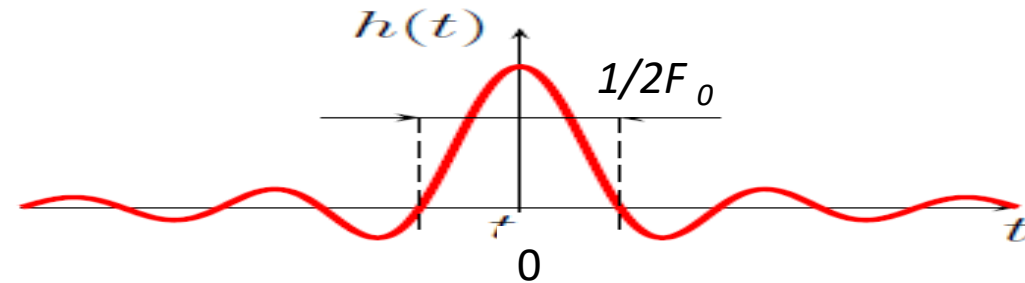
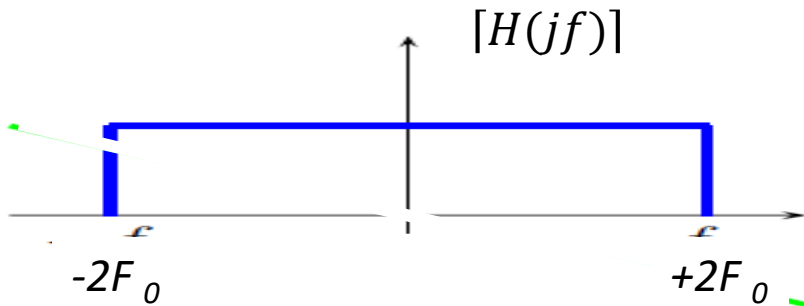
$$H(jf) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < 2F_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pourquoi un tel filtre ne peut pas être réalisé?

Sa réponse impulsionnelle est telle que

$$h(t) = TF^{-1}(H(jf)) = \int_{-2F_0}^{+2F_0} e^{j2\pi ft} df = \left[\frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi t} \right]_{-2F_0}^{+2F_0} = \frac{\sin(2\pi 2F_0 t)}{\pi t} = 4F_0 \text{sinc}(4\pi F_0 t)$$

Cette réponse impulsionnelle est anticausale



$$F_0 = 1/T_0$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t)$$

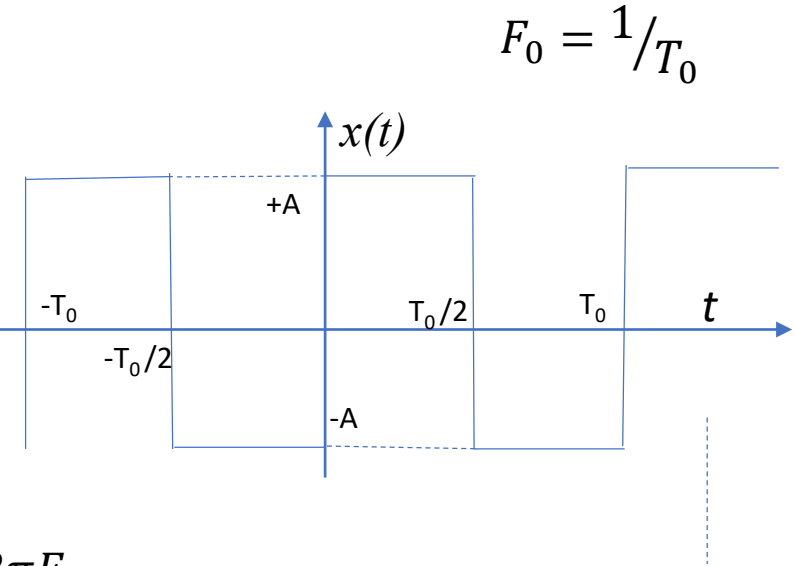
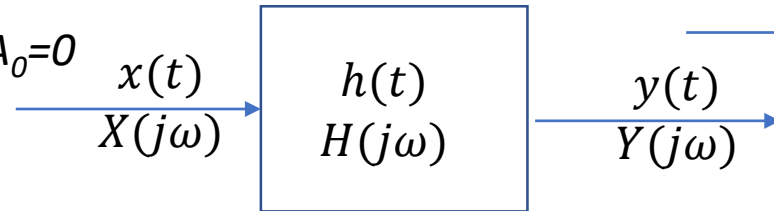
Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Exercice 2,1 Corrigé

Soit un signal **carré** d'amplitude A , de fréquence f_0 et de valeur moyenne nulle A_0

AN: $F_0 = 1\text{kHz}$ et $A = 1\text{Volts}$ et $A_0=0$



2. La fonction de transfert réelle est telle que $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_c}$ avec $\omega_c = 2\pi F_c$,

Exprimer la sortie du filtre $y(t)$ si l'entrée est $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t) \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \varphi_H = -\arctan(\omega/\omega_c)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \frac{1}{\sqrt{1 + \left((2n+1)2\pi F_0 / 2\pi F_c \right)^2}} \sin(2\pi(2n+1)F_0 t + \varphi_{H(2n+1)})$$

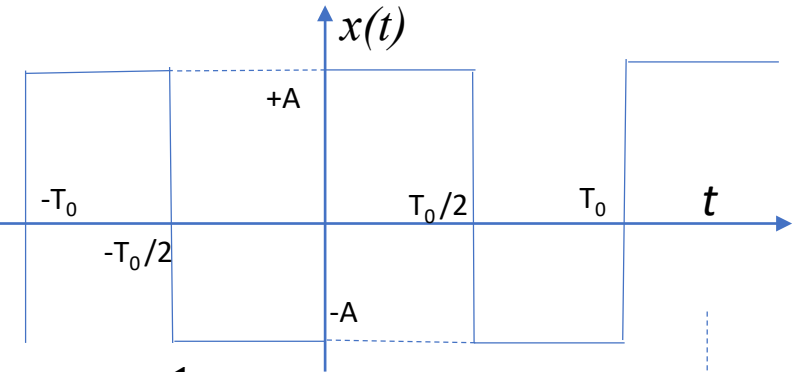
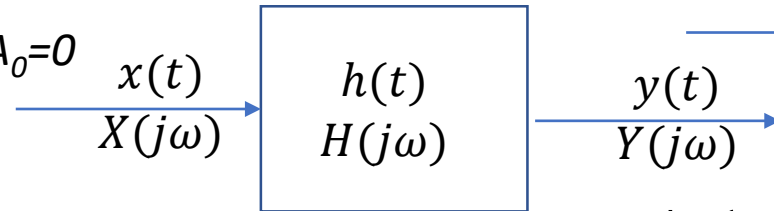
Partie 2: Filtrage

Exercice 2.1

Exercice 2,1 Corrigé

Soit un signal **carré** d'amplitude A , de fréquence f_0 et de valeur moyenne nulle A_0

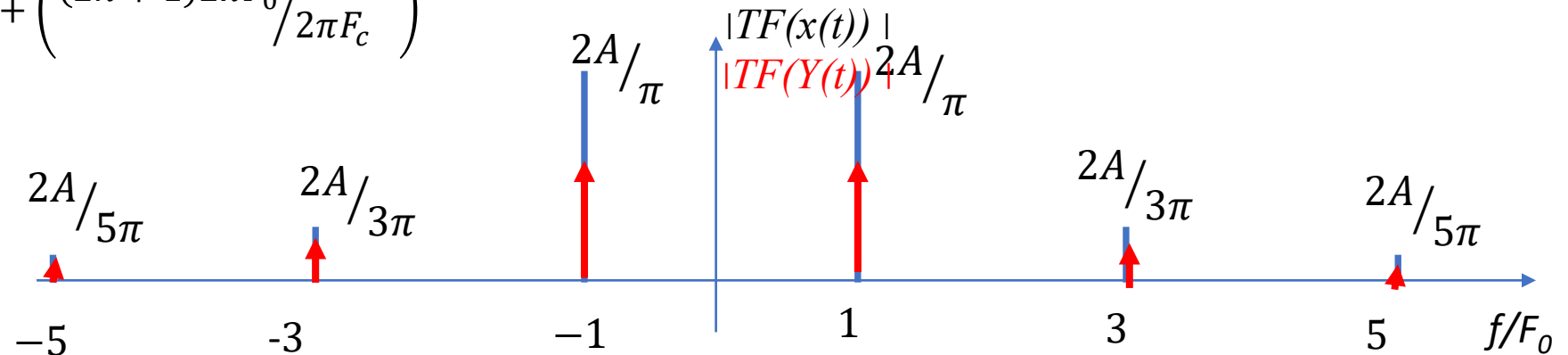
AN: $F_0 = 1\text{kHz}$ et $A = 1\text{Volts}$ et $A_0=0$



$$F_0 = 1/T_0$$

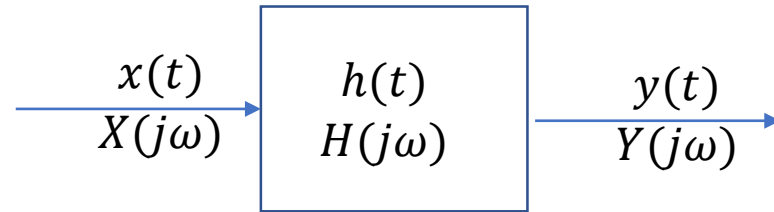
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \varphi_H = -\arctan(\omega/\omega_c)$$

$$Y(jf) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2A}{\pi j(2n+1)} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2n+1)2\pi F_0}{2\pi F_c} \right)^2}} e^{-j \arctan((2n+1)2\pi F_0/\omega_c)} [\delta(f - (2n+1)F_0) - \delta(f + (2n+1)F_0)]$$



Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2



t

L'objectif de ce tutorat sur le filtrage est de déterminer la fonction de transfert d'un filtre de Butterworth qui convient à un gabarit fixé par le cahier des charges utilisateur et de l'implanter dans une structure à base d'amplificateurs opérationnels

Rappels sur le Filtre passe-bas de Butterworth

Il s'agit du filtre possédant la courbe de réponse la plus plate à l'origine. Soit f_0 la fréquence de coupure du filtre à -3dB . On définit la fréquence réduite

$$F = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

La courbe de réponse en amplitude est notée $H(jF)$ ($\sim$ la réponse fréquentielle). $A^2(F)$ est appelée fonction de transfert en puissance avec $A^2(jf) = H(jf)H^*(jf)$

La fonction de transfert en puissance d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre n (avec F réduite comme ci-dessus) est définie par :

$$A^2(f) = \frac{1}{1 + F^{2n}}$$

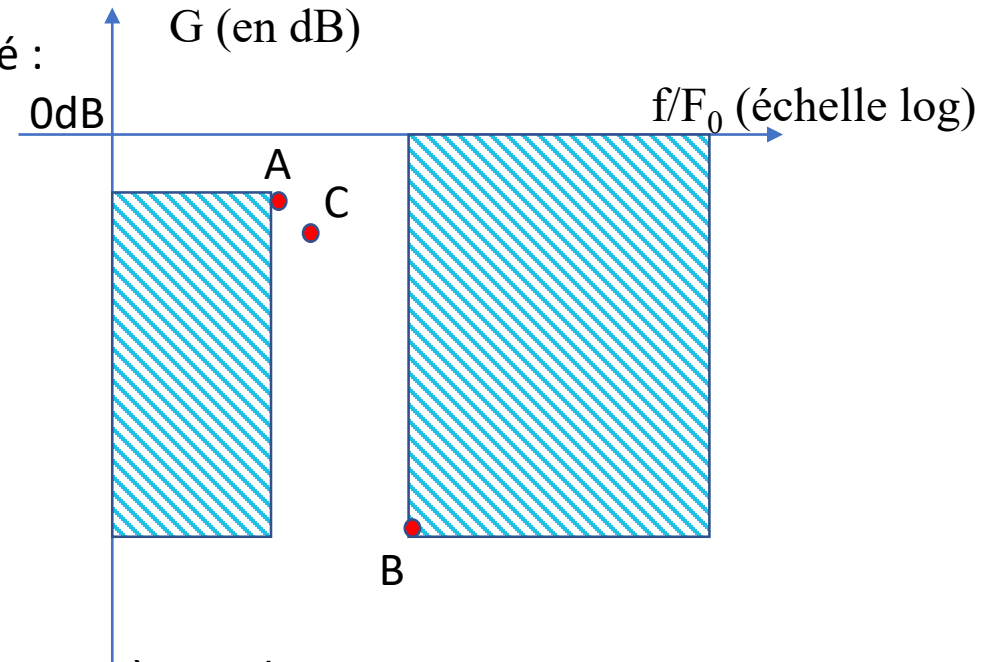
Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2 Considérons un gabarit donné :

Les coordonnées des points sont

Point	F en Hertz	G en dB
A	0,84	-1
B	$\sqrt{10}$	-40
C	1	-3

$$A^2(f) = \frac{1}{1 + F^{2n}}$$



Application numérique : $f_0 = 1\text{KHz}$

1. Déterminer l'ordre du filtre de Butterworth qui convient à ce gabarit
2. Etablir la fonction de transfert du filtre $H(j\omega)$
3. *Faire une proposition de synthèse de filtres*

Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2

Exercice 2.2 Corrigé

Les coordonnées des points sont

Point	F en Hertz	G en dB
A	0,84	-1
B	$\sqrt{10}$	-40
C	1	-3

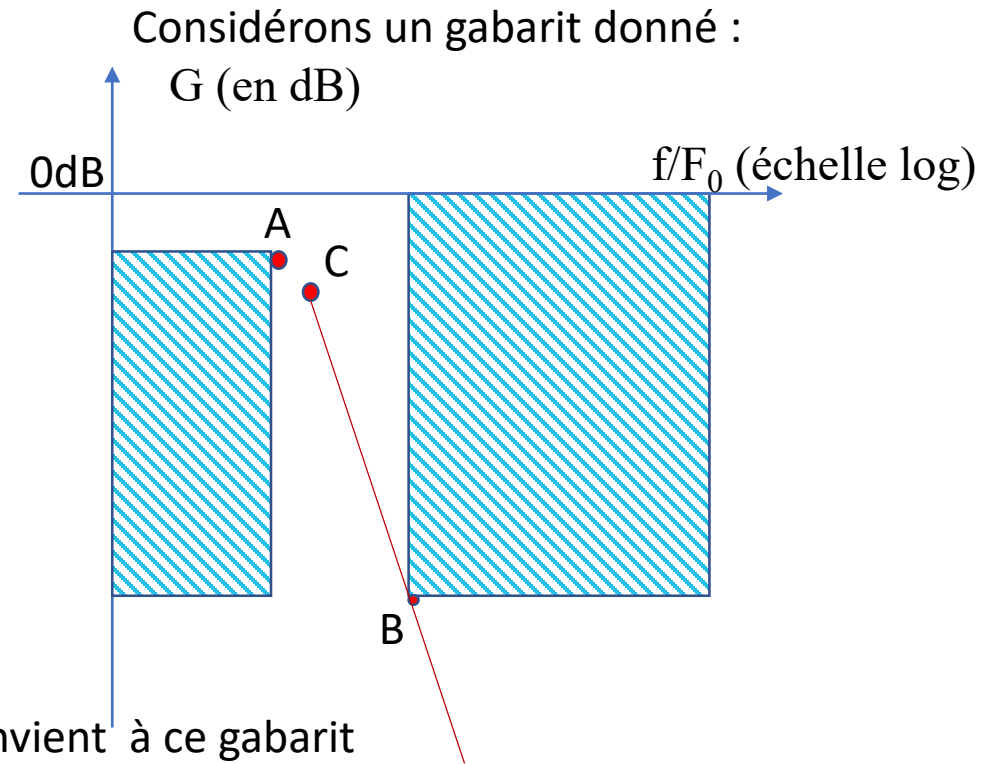
$$A^2(f) = \frac{1}{1 + F^{2n}}$$

Application numérique : $f_0 = 1\text{KHz}$

- Déterminer l'ordre du filtre de Butterworth qui convient à ce gabarit

$$C \in A^2(f) \forall n \quad \text{Pente} = \frac{G_B - G_C}{\text{Log}(F_B) - \text{Log}(F_C)} = \frac{37\text{dB}}{1/2 \text{décade}} \text{ soit au moins } -74 \text{ dB/décade}$$

L'ordre n est donc égale à 4 $\rightarrow -20n \text{ dB/décade}$



Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2

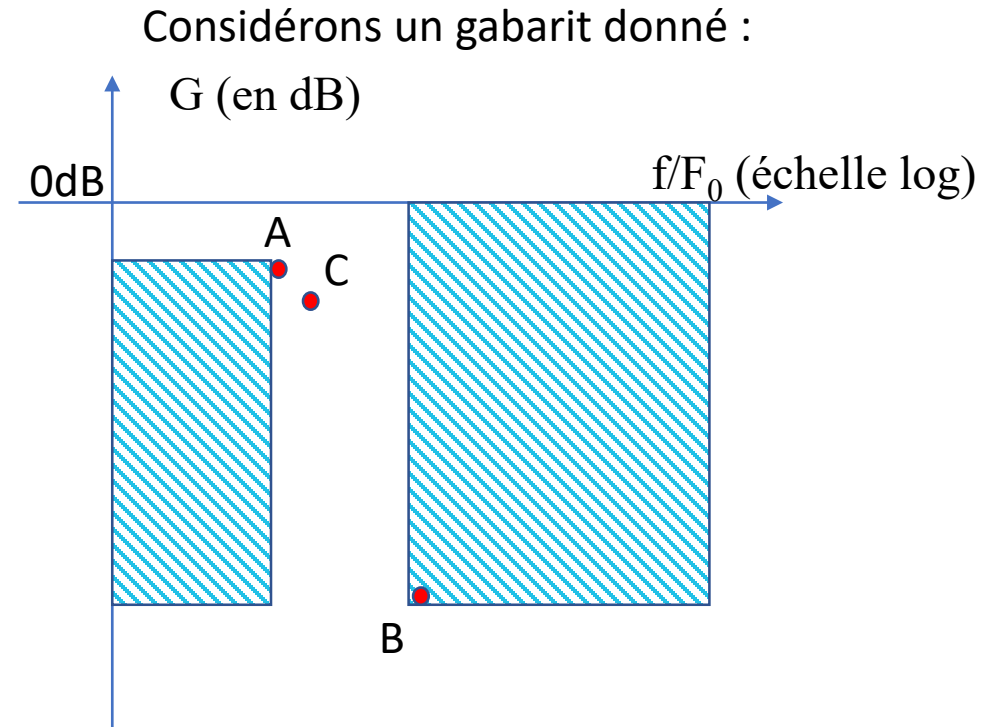
Exercice 2.2 Corrigé

Les coordonnées des points sont

Point	F en Hertz	G en dB
A	0,84	-1
B	$\sqrt{10}$	-40
C	1	-3

Application numérique : $F_0 = 1 \text{ KHz}$

$$A^2(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^{2n}}$$



2. Etablir la fonction de transfert du filtre de Butterworth d'ordre 4 : $H(j\omega)$

$A^2(f) \in \mathbb{R}$ et $A^2(p) = H(p)H^*(p)$ avec $H(p), H^*(p)$ fonction de variable complexe $p \in \mathbb{C}$

En régime Harmonique $p = j\omega/\omega_0 = jf/F_0$

$$A^2(p) = \frac{1}{1 + (p)^{2n}}$$

Décomposition en élément simple du dénominateur de

$$1 + p^{2n} = 0$$

Les solutions de cette équation sont : $p_k = e^{\frac{j(\pi+2k\pi)}{8}}$

Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2

Exercice 2,2 Corrigé

Solution de l'équation:

Les solution de cette équation sont

$$p_k = e^{\frac{j(\pi+2k\pi)}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}\right)$$

$A^2(p) = H(p)H^*(p)$ Pour $H(p)$ on ne gardera que les pôles à partie réelle négatives

$$H(p) = \frac{1}{(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)(p - p_5)} = \frac{1}{(p - p_2)(p - p_5)} \cdot \frac{1}{(p - p_4)(p - p_3)}$$

On pose $H_1(p) = \frac{1}{(p - p_2)(p - p_5)}$ $H_1(p) = \frac{1}{(p - p_4)(p - p_3)}$

En régime Harmonique $p = j\omega/\omega_0$

$$H_1(p) = \frac{1}{1 - 2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

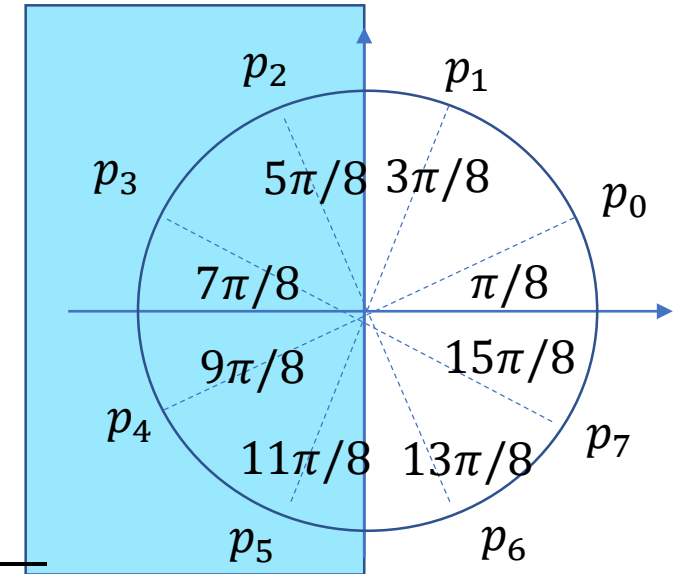
$$H_1(p) = \frac{1}{1 - 2\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + 2\xi_1 \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + 2\xi_2 \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\xi_1 = -\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\xi_2 = -\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$



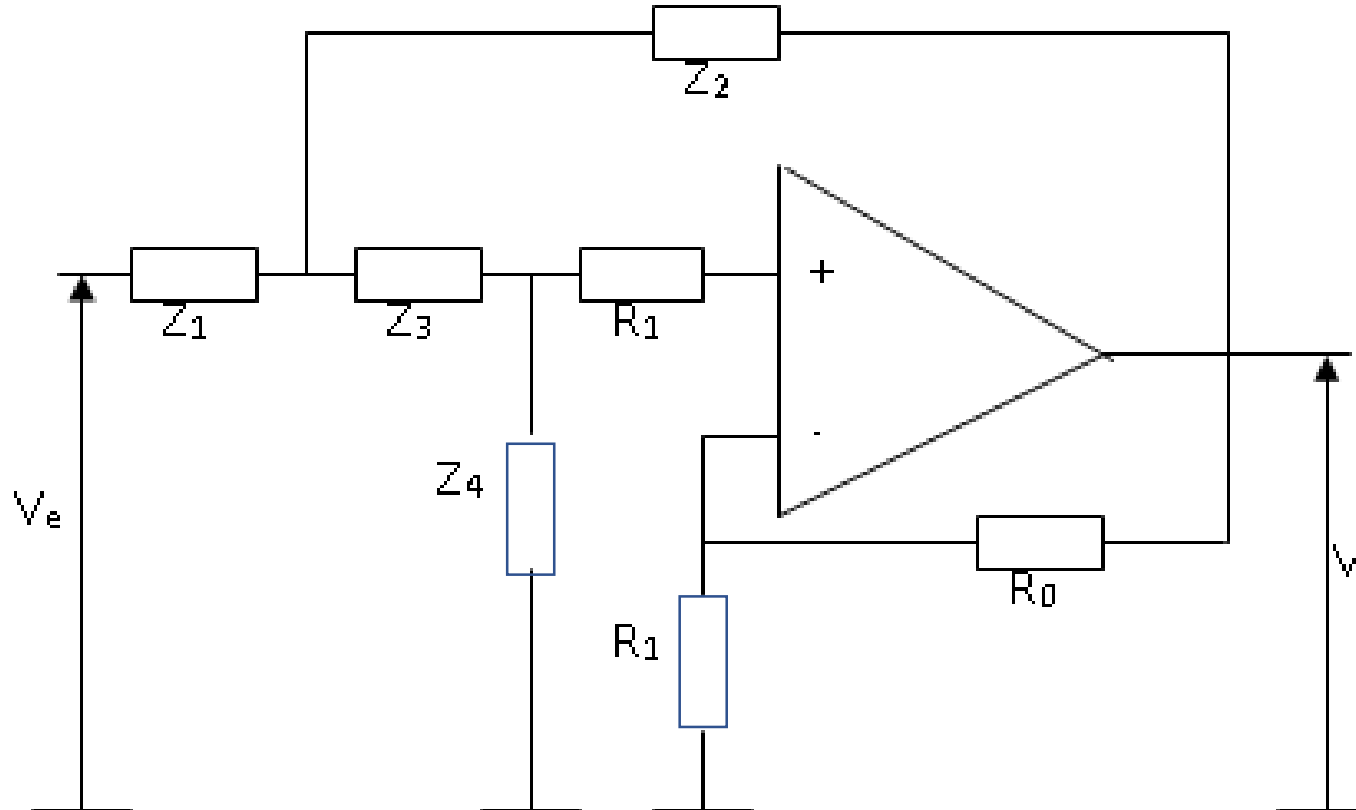
Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2

Exercice 2.2 Corrigé

Faire une proposition de synthèse de filtres

1. Soit le filtre actif à contre réaction multiple $Z_1 = Z_3 = R$ et $Z_2 = Z_4 = 1/jc\omega$



On notera :

$$K = 1 + \frac{R_0}{R_1}$$

La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + RCj\omega(3 - K) + (RCj\omega)^2}$$

Gain statique : K

Pulsation de coupure

$$\omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{1}{RC}$$

Amortissement

$$2\xi = 3 - K = 3 - \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right)$$

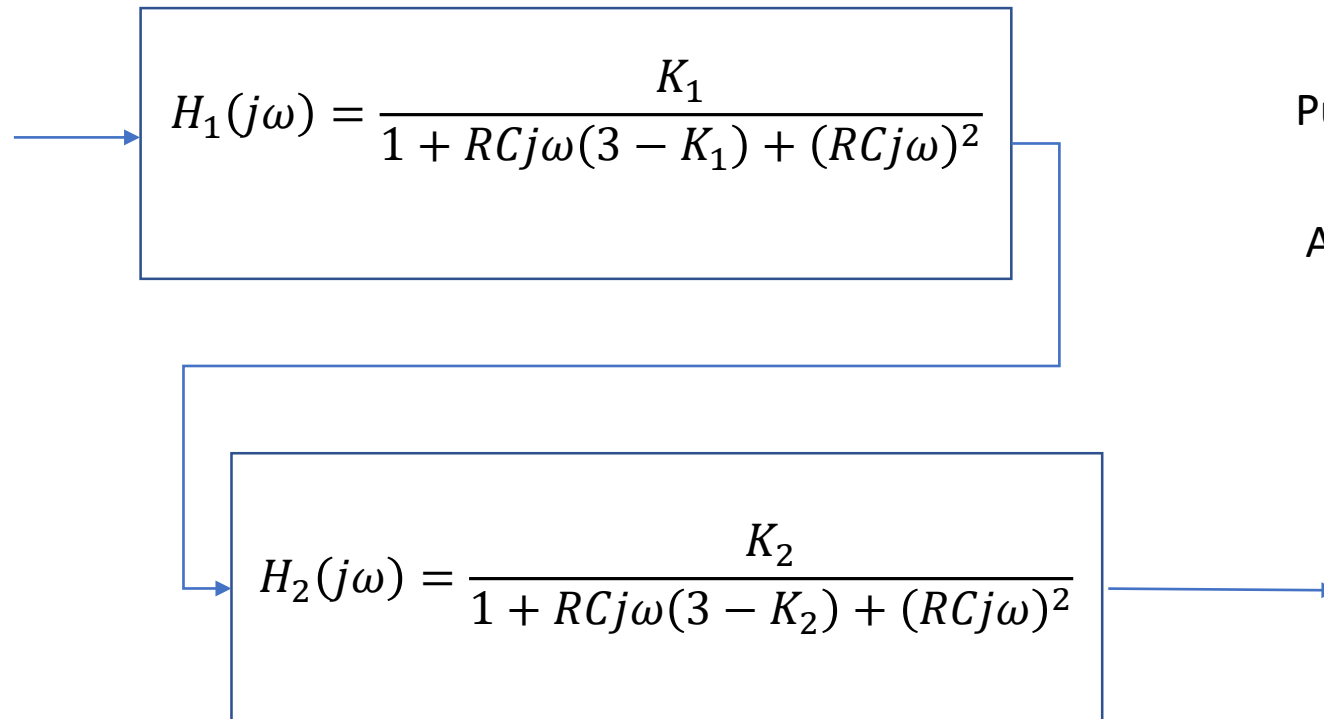
Partie 2: Filtrage

Exercice 2.2

Exercice 2.2 Corrigé

Faire une proposition de synthèse de filtres

3. Soit le filtre actif à contre réaction multiple d'ordre 4



La fonction de transfert est :

$$H_{Total}(j\omega) = \frac{K_1}{1 + RCj\omega(3 - K_1) + (RCj\omega)^2} \frac{K_2}{1 + RCj\omega(3 - K_2) + (RCj\omega)^2}$$

Avec : $K_1 = 1 + \frac{R_{01}}{R_1}$ $K_2 = 1 + \frac{R_{02}}{R_1}$

Gain statique : $K_{Total} = K_1 \cdot K_2$

Pulsation de coupure $\omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{1}{RC}$

Amortissement des 2 seconds ordres:

$$2\xi_1 = 3 - K_1 \quad 2\xi_2 = 3 - K_2$$

$$\xi_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3 - K_1}{2}$$

$$\xi_2 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 - K_2}{2}$$