

TD9 : Intégration avancée

Exercice 1. 1. Calculez $\tan'$. Déduisez-en $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 + \tan^2(t)) dt$.

2. Calculez $\int_0^x \tan^n(t) dt$ pour $n = 0, 1, 2$ et $x \in [0; \pi/2[$

Exercice 2. A l'aide d'une intégration par parties, calculez les intégrales suivantes :

- (1) $\int_0^1 (t+1)e^t dt$
- (2) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$
- (3) $\int_0^{\pi} (x+3) \sin x dx$
- (4) $\int_{-\pi/2}^0 x \sin(2x-1) dx$
- (5) $\int_0^x t^2 \sin t dt$
- (6) $\int_1^t \ln x dx$, où $t \geq 1$
- (7) $\int_1^t x \ln(x+3) dx$, où $t \geq 1$
- (8) $\int_0^x te^t dt$, où $x \geq 0$
- (9) $\int_0^x t^2 e^t dt$, où $x \geq 0$
- (10) $\int_0^x (t^3 - 1)e^t dt$, où $x \geq 0$

Exercice 3. Déterminez des primitives des fonctions suivantes : $x \mapsto 3x - \sin \frac{x}{2} + 5 \cos(3x)$ et $x \mapsto \tan^2(2x)$

Exercice 4. En écrivant sous forme d'exponentielle, déterminez une primitive de $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$. Déduisez-en

$$\int_{-1}^3 (2^t - t^2 + 3t - 5\sqrt{t}) dt.$$

Exercice 5. On va déterminer une primitive de $x \mapsto f(x) = e^x \sin x$ de deux façons :

- (1) Méthode 1 : Nombres complexes. En écrivant $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, déterminez une primitive de f par un calcul direct.
- (2) Méthode 2 : Intégrations par parties. En intégrant deux fois par parties, déterminez $\int_0^x f(t) dt$.

Exercice 6. Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Calculez I_0, I_1, I_2
- (2) En intégrant par parties, trouvez une relation entre I_n et I_{n+2}
- (3) Déduisez-en I_{2p} et I_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 7. Calculez les primitives des fonctions suivantes, en utilisant la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

- (1) $\frac{1}{x(x-1)}$
- (2) $\frac{1}{x^2-4}$,

$$(3) \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$(4) \frac{x + 1}{x(x - 1)}$$

$$(5) \frac{x^2}{x^2 - 4},$$

$$(6) \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$(7) \frac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$$

$$(8) \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{x^4 + 2x^3 + x + 5}$$

$$(9) \frac{1}{x^2 + 4}$$

$$(10) \frac{14x + 5}{7x^2 + 4x + 9}$$