

L1 PC – Soutien mathématique. Primitives et intégrales

EXERCICE 1: Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+x^2} & g(x) &= \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} & h(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ k(x) &= \cos(x) \sin^2(x) & l(x) &= \frac{1}{x \ln x} & m(x) &= 3x\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2: Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= (3x-1)(3x^2-2x+3)^3, \quad I = \mathbb{R} & 2. f(x) &= \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}, \quad I =]-\infty, -2[\\ 3. f(x) &= \frac{(x-1)}{\sqrt{x(x-2)}}, \quad I =]-\infty, 0[& 4. f(x) &= \frac{1}{x \ln(x^2)}, \quad I =]1, +\infty[. \end{aligned}$$

EXERCICE 3: Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_0^{\pi/3} (1 - \cos(3x)) dx \quad 2. \quad J = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx \quad 3. \quad K = \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx.$$

EXERCICE 4: Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \quad I = \int_0^1 x e^x dx \quad 2. \quad J = \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

EXERCICE 5: On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

(b) Dédire de la question précédente la valeur de l'intégrale $J = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.

(c) Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$.

EXERCICE 6: En effectuant le changement de variables demandé, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$;

(b) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt$ en posant $x = \cos t$;

(c) $\int_1^e \frac{dt}{2t \ln(t) + t}$ en posant $x = \ln t$.