

4. En s'appuyant sur le PFD appliqué à l'ensemble bébé+balancelle, montrer que la tension dans la corde qui tient la balancelle a pour amplitude :

$$T = M^B g \cos \theta + M^B l \dot{\theta}^2 \quad (\quad /2)$$

NB : ce calcul est plus simple en coordonnées cylindriques

On doit évidemment écrire la somme des efforts extérieurs qui s'appliquent : il y a le poids $\underline{P}$ d'une part, et la tension dans la corde $\underline{T}$ d'autre part.

$$\underline{P} = M^B \underline{g} = M^B g (\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta)$$

$$\underline{T} = -T \underline{e}_r$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = M^B \frac{d\underline{v}}{dt} = M^B \underline{a} = M^B l \left(\ddot{\theta} \underline{e}_\theta - \dot{\theta}^2 \underline{e}_r \right)$$

$$\text{Au final on a : } \begin{cases} M^B g \cos \theta - T = -M^B l \dot{\theta}^2 \\ -M^B g \sin \theta = M^B l \ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = M^B g \cos \theta + M^B l \dot{\theta}^2 \\ \frac{g}{l} \sin \theta + \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

En faisant l'hypothèse que les oscillations sont petites, la question précédente mène évidemment à pouvoir décrire les oscillations sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pendule est évidemment nulle pour $\theta(t) = \theta_0$.

5. Ecrire l'égalité entre l'énergie mécanique de la masse en mouvement dans le cas général et dans le cas où $\theta(t) = \theta_0$ (on considère l'énergie potentielle nulle pour $\theta(t=0) = 0$). En déduire que la tension dans la corde qui tient la balancelle peut s'écrire : $T = 3M^B g \cos \theta - 2M^B g \cos \theta_0$ (\quad \backslash 2)

L'énergie mécanique s'écrit évidemment pour $\theta(t) = \theta_0$:

$$E_M = \cancel{\mathcal{K}} + \sum E_p = M^B l g (1 - \cos \theta_0) = \text{cste}$$

Dans le cas général elle s'écrit :

$$E_M = \frac{1}{2} M^B l^2 \dot{\theta}^2 + M^B l g (1 - \cos \theta)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2} M^B l^2 \dot{\theta}^2 + M^B l g (1 - \cos \theta) = M^B l g (1 - \cos \theta_0)$$

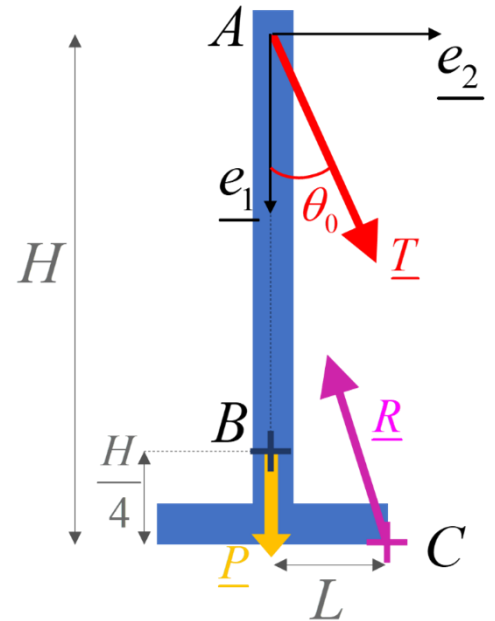
$$\Rightarrow M^B l \dot{\theta}^2 = 2 M^B g (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Si on remplace dans l'expression de T on obtient alors :

$$T = M^B g \cos \theta + 2 M^B g (\cos \theta - \cos \theta_0) = 3 M^B g \cos \theta - 2 M^B g \cos \theta_0$$

Selon la vitesse initiale du berceau on peut trouver θ_0 et donc l'évolution de la tension dans le fil. On s'intéresse au cas où $\theta = \theta_0$ (l'angle maximal), pour lequel $T = M^B g \cos \theta_0 = A$ avec A une constante. On cherche la demi-largeur L de l'embase pour que le châssis du berceau ne puisse pas basculer.

Le châssis est soumis à la tension dans la corde $\underline{T} = A \underline{e}_r$ ainsi qu'à son poids $\underline{P} = M^C g \underline{e}_1$ et à la réaction du support, et paramétré comme sur la figure ci-contre.



6. Calculer la réaction du support.

(\ 2)

Le châssis est soumis à trois efforts qui sont nécessairement à l'équilibre :

$$\underline{T} + \underline{P} + \underline{R} = \underline{0} \Rightarrow A \underline{e}_r + M^C g \underline{e}_1 + \underline{R} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow A \cos \theta_0 \underline{e}_1 + A \sin \theta_0 \underline{e}_2 + M^C g \underline{e}_1 + \underline{R} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{R} \cdot \underline{e}_1 = -A \cos \theta_0 - M^C g \\ \underline{R} \cdot \underline{e}_2 = -A \sin \theta_0 \end{cases}$$

7. Ecrire l'équilibre du châssis au point de basculement, et en déduire une condition sur la demi-largeur L de l'embase du châssis. (\2)

Les trois moments doivent être à l'équilibre évidemment : écrivons-les au point C.

$$\mathfrak{M}_C(\underline{T}) + \mathfrak{M}_C(\underline{P}) + \cancel{\mathfrak{M}_C(\underline{R})} = \underline{0}$$

$$\underline{CA} \wedge \underline{T} + \underline{CB} \wedge \underline{P} = \underline{0}$$

$$\left(-H\underline{e}_1 - L\underline{e}_2\right) \wedge \left(A\cos\theta_0\underline{e}_1 + A\sin\theta_0\underline{e}_2\right) + \left(-\frac{H}{4}\underline{e}_1 - L\underline{e}_2\right) \wedge M^C g \underline{e}_1 = \underline{0}$$

$$-H A \sin \theta_0 + L A \cos \theta_0 + L M^C g = 0$$

$$L = \frac{H A \sin \theta_0}{A \cos \theta_0 + M^C g}$$

→ cette valeur correspond à la demi-largeur minimale de l'embase !