

Corrigé du Partiel 1 du 5 novembre

Durée 3h. Documents et machines électroniques interdits.

On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.

Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

1. EXERCICES

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des sous-ensembles suivant, indiquez s'il est ouvert, fermé ou bien ni l'un ni l'autre :

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^4}{2} + \frac{y^2}{6} < 1 \right\} \text{ et } B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 < y; y^2 < 2x \text{ et } x \leq 1 \}$$

Chaque résultat devra être démontré.

Solution : A est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. L'ensemble B n'est ni ouvert ni fermés :

- Pas fermé : on a $P_n = (1/n, 2/n^2) \in B$ pour $n \geq 3$. Or $P_n \rightarrow (0, 0) \notin B$. Donc B n'est pas fermé.
- Pas ouvert : soit $Q := (1, y_0) \in B$ pour tout $1 < y_0 < \sqrt{2}$. Soit $Q_n = (1 + 1/n, y_0)$. On a $Q_n \rightarrow Q \in B$ mais $Q_n \notin B$ pour tout n . Donc B n'est pas ouvert.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On suppose qu'il admet une famille génératrice dénombrable, à savoir une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que

$$E = \text{Vect}(e_n / n \in \mathbb{N}).$$

En posant $E_N := \text{Vect}(e_n / n \in [0, N])$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et en utilisant le Lemme de Baire, montrez que E est de dimension finie.

Solution : Pour tout N , E_N est un ev de dimension finie, donc il est fermé. On a $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_N$ qui est d'intérieur non vide ($\text{Int}(E) = E$). Or E complet, d'après le Lemme de Baire, il existe N tel que $\text{Int}(E_N)$ est non vide. Il existe donc $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que

$$B(x_0, r) \subset E_N.$$

En particulier $x_0 \in E_N$. Soit $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$. On a $x_0 + \frac{r}{2}z \in B(x_0, r) \subset E_N$. Comme $x_0 \in E_N$ et E_N est un ev, on a alors $z \in E_N$ pour tout $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$. Puis pour tout $x \in E - \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in E_N$ puis $x \in E_N$. Ainsi, en n'oubliant pas le cas $x = 0$, on a $E \subset E_N$, puis $E = E_N$. Donc E est de dimension finie.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $F \subset E$ un sous-ev de dimension finie. On se donne $x_0 \in E$. On définit alors

$$\mu := \inf\{\|x_0 - y\| / y \in F\}.$$

1. Montrez que $\mu \in \mathbb{R}$ est bien défini.

Solution : L'ensemble $\{\|x_0 - y\|/y \in F\}$ est non-vidé (il contient $\|x_0 - 0\| = \|x_0\|$) est minoré par 0 dans $\mathbb{R}$, il admet donc un infimum $\mu \geq 0$.

2. Montrez qu'il existe $M > 0$ tel que pour $y \in F$, on a $\|y\| \geq M \Rightarrow \|x_0 - y\| \geq \mu + 1$.

Solution : Pour $y \in F$ tel que $\|y\| \geq M$, on a

$$\|y - x_0\| \geq \|y\| - \|x_0\| \geq M - \|x_0\|.$$

En choisissant $M := \|x_0\| + \mu + 1$, on a la conclusion demandée.

3. Dédisez-en que $\mu := \inf\{\|x_0 - y\|/y \in F \text{ et } \|y\| \leq M\}$.

Solution : Soit $m_0 := \inf\{\|x_0 - y\|/y \in F \text{ et } \|y\| \leq M\}$. Donc $m_0 \geq \mu$ par définition. Soit $(y_n) \in F$ telle que $\|y_n - x_0\| \rightarrow \mu$, donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $\|y_n - x_0\| < \mu + 1$, donc $\|y_n\| \leq M$, donc $\|y_n - x_0\| \geq m_0$. A la limite $\mu \geq m_0$, puis $m_0 = \mu$.

4. Dédisez-en que l'infimum est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\mu = \|x_0 - y_0\|$.

Solution : La fonction $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(y) = \|y - x_0\|$ pour $y \in F$ est continue. On est en dimension finie, donc $\bar{B}_F(0, M)$ est compacte. Donc l'infimum μ est atteint sur $\bar{B}_F(0, M)$.

Exercice 4. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Sur le produit $X \times Y$, on définit

$$\begin{aligned} d : (X \times Y)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto d_X(x, x') + d_Y(y, y') \end{aligned}$$

- (1) Montrez que d est une distance sur $X \times Y$.
- (2) Soit $A \subset X \times Y$ tel que $A \neq \emptyset$. Montrez que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - A est ouvert pour la topologie de $(X \times Y, d)$;
 - Pour tout $(x, y) \in A$, il existe U ouvert de X et V ouvert de Y tels que

$$(x, y) \in U \times V \subset A.$$

Solution : Voir le TD2.

2. PROBLÈME : SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON-LINÉAIRE

On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Dans ce problème, pour $t_0 > 0$ bien choisi, on montre l'existence et l'unicité d'une solution $u \in C^1([0, t_0], \mathbb{R})$ de

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{t} + \lambda u + u^3 & \text{pour } t \in [0, t_0] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (E_\lambda)$$

1. Soit $u \in C^1([0, t_0])$ une solution de (E_λ) . Montrez que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t (\sqrt{s} + \lambda u(s) + u^3(s)) ds \text{ pour tout } t \in [0, t_0].$$

Solution : Comme u est C^1 , on a $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$ et on a le résultat.

Pour $t_0 > 0$ et $r > 0$, on pose alors

$$\begin{aligned} T : C^0([0, t_0], [u_0 - r, u_0 + r]) &\rightarrow C^0([0, 1], [u_0 - r, u_0 + r]) \\ u &\mapsto v \end{aligned}$$

avec

$$v(t) := u_0 + \int_0^t (\sqrt{s} + \lambda u(s) + u^3(s)) ds \text{ pour tout } t \in [0, t_0].$$

Montrez qu'il existe $\delta > 0$ indépendant de $\lambda \in [-1, 1]$ tel que pour tout $t_0 \in]0, \delta[$, et pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, T admet un unique point fixe qu'on notera $u_\lambda \in C^0([0, t_0], [u_0 - r, u_0 + r])$.

Solution : Montrons d'abord que T est bien définie. Soit $u \in C^0([0, t_0], [u_0 - r, u_0 + r])$. La fonction v est continue sur $[0, t_0]$, il faut montrer qu'elle est à valeur dans $[u_0 - r, u_0 + r]$. Pour $t \in [0, t_0]$, on a

$$|T(u)[t] - u_0| = \left| \int_0^t (\sqrt{s} + \lambda u(s) + u^3(s)) ds \right| \leq \int_0^{t_0} (1 + \|u\|_\infty + \|u\|_\infty^3) ds \leq \delta(1 + \|u\|_\infty + \|u\|_\infty^3)$$

De plus, pour tout $t \in [0, t_0]$, $u(t) \in [u_0 - r, u_0 + r]$, donc $|u(t)| \leq |u_0| + r$ et donc $\|u\|_\infty \leq |u_0| + r$. Ainsi

$$|T(u)[t] - u_0| \leq \delta(1 + |u_0| + r + (|u_0| + r)^3)$$

du coup, avec

$$\delta \leq \frac{r}{1 + |u_0| + r + (|u_0| + r)^3},$$

on a $|T(u)[t] - u_0| \leq r$, donc $T(u)[t] \in [u_0 - r, u_0 + r]$ ppur tout $t \in [0, t_0]$, et ainsi $T(u) \in C^0([0, t_0], [u_0 - r, u_0 + r])$. Donc T est bien définie.

Montrons que T est contractante. Pour $u, v \in C^0([0, t_0], [u_0 - r, u_0 + r])$ et $t \in [0, t_0]$, on a

$$|(T(u) - T(v))[t]| = \left| \int_0^t (\lambda(u(s) - v(s)) + (u^3(s) - v^3(s))) ds \right|$$

Comme $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |(T(u) - T(v))[t]| &\leq \int_0^{t_0} (\|u - v\|_\infty + (u(s) - v(s))(u^2(s) + u(s)v(s) + v^2(s))) ds \\ &\leq \int_0^{t_0} (\|u - v\|_\infty + \|u - v\|_\infty (\|u\|_\infty^2 + \|u\|_\infty \|v\|_\infty + \|v\|_\infty^2)) ds \\ &\leq t_0 (\|u - v\|_\infty + \|u - v\|_\infty \times 3(|u_0| + r)^2) \leq \delta(1 + 3(|u_0| + r)^2) \|u - v\|_\infty \end{aligned}$$

et donc, en choisissant

$$\delta \leq \frac{1}{2(1 + 3(|u_0| + r)^2)},$$

on obtient

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_\infty$$

pour tous $u, v \in C^0([0, t_0], [u_0 - r, u_0 + r])$. Donc T est contractante. Comme $[0, t_0]$ est compact et $[u_0 - r, u_0 + r]$ est complet (car fermé dans $\mathbb{R}$), T admet un unique point fixe noté u_λ .

2. Montrez que $u_\lambda \in C^1([0, t_0], \mathbb{R})$ et est solution de (E_λ) .

Solution : D'après la première question, on a

$$u_\lambda(t) = u_0 + \int_0^t (\sqrt{s} + \lambda u_\lambda(s) + u_\lambda^3(s)) ds \text{ pour tout } t \in [0, t_0].$$

Comme $s \mapsto \sqrt{s} + \lambda u_\lambda(s) + u_\lambda^3(s)$ est continue, une primitive est C^1 et donc u_λ est C^1 . En prenant $t = 0$, on obtient $u_\lambda(0) = u_0$. En dérivant, on obtient (E_λ) .

3. Montrez qu'il existe $t_1 \in]0, \delta]$ à déterminer (probablement égal à δ) tel qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous ,

$$\|u_\lambda - u_\mu\|_{C^0([0, t_1])} \leq C|\lambda - \mu| \text{ pour tous } \lambda, \mu \in [-1, 1].$$

Solution : Pour $\lambda, \mu \in [-1, 1]$ et $t \in [0, t_0]$, en utilisant la première question, on obtient

$$\begin{aligned} |u_\lambda(t) - u_\mu(t)| &= \left| \int_0^t (\lambda u_\lambda - \mu u_\mu + (u_\lambda^3 - u_\mu^3)) ds \right| \\ &= \left| \int_0^t ((\lambda - \mu)u_\lambda + \mu(u_\lambda - u_\mu) + (u_\lambda^3 - u_\mu^3)) ds \right| \\ &\leq t_0(|\lambda - \mu|\|u_\lambda\|_\infty + \|u_\lambda - u_\mu\|_\infty + \|u_\lambda - u_\mu\|_\infty \times 3(|u_0| + r)^2) \\ &\leq t_0(|u_0| + r)|\lambda - \mu| + t_0(1 + 3(|u_0| + r)^2)\|u_\lambda - u_\mu\|_\infty \end{aligned}$$

Avec le choix $t_0 \leq \delta$ précédent, et en passant au sup, on obtient

$$\|u_\lambda - u_\mu\|_\infty \leq t_0(|u_0| + r)|\lambda - \mu| + \frac{1}{2}t_0(|u_0| + r)|\lambda - \mu|$$

Puis $\|u_\lambda - u_\mu\|_\infty \leq 2\delta(|u_0| + r)|\lambda - \mu|$.

4. Avec le choix de $t_1 > 0$ ci-dessus, montrez que

$$\begin{array}{ccc} \varphi : [-1, 1] & \rightarrow & C^1([0, 1]) \\ \lambda & \mapsto & u_\lambda \end{array}$$

est continue pour les normes naturelles.

Solution : Pour $\lambda, \mu \in [-1, 1]$, on a

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\|_{C^1} = \|u_\lambda - u_\mu\|_\infty + \|u'_\lambda - u'_\mu\|_\infty$$

Pour $t \in [0, t_0]$, on a

$$\begin{aligned} |u'_\lambda(t) - u'_\mu(t)| &= |(\lambda - \mu)u_\lambda + \mu(u_\lambda - u_\mu) + (u_\lambda^3 - u_\mu^3)| \\ &\leq |\lambda - \mu| \cdot (|u_0| + r) + \|u_\lambda - u_\mu\|_\infty + \|u_\lambda - u_\mu\|_\infty \times 3(|u_0| + r)^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)\|_{C^1} \leq (|u_0| + r + C + C3(|u_0| + r)^2)|\lambda - \mu|$$

Et donc φ est continue car Lipschitzienne.

3. PROBLÈME : LEMME DE CONJUGAISON TOPOLOGIQUE DE SHUB

Soit $n \geq 2$ un entier et soit $C > 1$. On se donne une fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y| \text{ et } f(x + 1) = f(x) + n. \quad (\star)$$

Le but de ce problème est de montrer qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(h(x)) = h(nx) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On note $A_{n,C}$ l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\mathbb{R})$ qui vérifient $(\star)$.

1. On définit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez que φ vérifie $(\star)$.

Corrigé : immédiat après avoir vérifié que $n \geq C$.

On note $C_{per}^0(\mathbb{R}) := \{p \in C^0(\mathbb{R}) / p(x+1) = p(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$ que l'on munit de $\|\cdot\|_\infty$.

2. Montrez que $\|\cdot\|_\infty : p \mapsto \|p\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |p(x)|$ est une norme sur $C_{per}^0(\mathbb{R})$.

Corrigé : Pour $p \in C_{per}^1(\mathbb{R})$, comme p est 1-périodique, $\|p\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |p(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|$ est atteint (fonction continue sur un compact). Les autres propriétés de la norme sont classiques.

3. Montrez que $(C_{per}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Corrigé : On se donne $(p_k)_k$ une suite de Cauchy dans $(C_{per}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. C'est donc aussi une suite de Cauchy dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet. Donc $\exists q \in C^0([0,1])$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k = q$ uniformément dans $C^0([0,1])$. En particulier, on a CV simple et comme $p_k(0) = p_k(1)$ pour tout k , on a $q(0) = q(1)$. On prolonge q par 1-périodicité sur $\mathbb{R}$, soit p cette fonction. Comme $p(0) = p(1)$, alors p est continue. Puis $p \in C_{per}^0([0,1])$. De plus, $\|p_k - p\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |p_k(x) - q(x)| \rightarrow 0$, et donc (p_k) converge vers p , puis l'espace est complet.

4. Soit $f \in A_{n,C}$. Montrez que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme.

Corrigé : On remarque tout d'abord que f est injective : en effet, si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $f(x) = f(y)$, alors $|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|$ et donc $x = y$. De plus, en fixant y dans l'inégalité $(\star)$, on obtient que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$. Comme f est injective et continue, elle est soit croissante, soit décroissante. Si elle est croissante, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Avec $(\star)$, on a $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq C^{-1}|x - y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. Donc f^{-1} est continue. Puis f est un homéomorphisme.

On se donne $f, g \in A_{n,C}$. Pour $p \in C_{per}^0(\mathbb{R})$, on définit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T_p : & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto T_p(x) \end{array} \right\}$$

telle que $T_p(x) := f^{-1}(g(x) + p(g(x))) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Montrez que $T_p \in C_{per}^0(\mathbb{R})$ et que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} T : & (C_{per}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) & \rightarrow (C_{per}^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ & p & \mapsto T_p \end{array} \right\}$$

est bien définie et k -Lipschitzienne pour un réel $0 < k < 1$ qu'on déterminera.

Corrigé : On a bien T_p continue comme composée. Montrons qu'elle est périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T_p(x+1) &= f_1^{-1}(f_2(x+1) + p(f_2(x+1))) - (x+1) \\ &= f_1^{-1}(f_2(x) + n + p(f_2(x) + n)) - x - 1 = f_1^{-1}(f_2(x) + n + p(f_2(x))) - x - 1. \end{aligned}$$

On pose $Y := f_2(x) + p(f_2(x))$ et $X = f_1^{-1}(Y + n)$, donc $Y + n = f_1(X) = f_1(X-1) + n$, donc $X-1 = f_1^{-1}(Y)$. Du coup $T_p(x+1) = X - x - 1 = f_1^{-1}(Y) - x = f_1^{-1}(f_2(x) + p(f_2(x))) - x = T + p(x)$. Donc périodique.

Pour Lipschitz, soient $p, q \in C_{per}^0(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $|f_1(T_p(x)) - f_1(T_q(x))| \geq C|T_p(x) - T_q(x)|$ d'une part, mais aussi $|f_1(T_p(x)) - f_1(T_q(x))| = |p(f_2(x)) - q(f_2(x))| \leq \|p - q\|_\infty$. Donc $|T_p(x) - T_q(x)| \leq C^{-1}\|p - q\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|T_p - T_q\|_\infty \leq C^{-1}\|p - q\|_\infty$ pour tous p, q avec $k = C^{-1} \in]0, 1[$.

6. Déduisez-en qu'il existe $p \in C_{per}^0(\mathbb{R})$ unique telle que

$$f(x + p(x)) = g(x) + p(g(x)) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Corrigé : On est dans un Banach, appli contractante, espace d'arrivée même que espace de départ. D'après le Th. du point fixe, $\exists p \in C_{per}^0([0, 1])$ unique tel que $T_p = p$, ce qui est équivalent à $f_1(T_p(x) + x) = f_1 \circ p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui est l'identité recherchée.

7. Déduisez de la question précédente qu'il existe $h, l \in C^0(\mathbb{R})$ tels que $f \circ h = h \circ g$ et $g \circ l = l \circ f$ avec $p, q \in C_{per}^0(\mathbb{R})$ tels que $h(x) = x + p(x)$ et $l(x) = x + q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé : On applique **6.** à f et g et on obtient h_1 comme demandé. Puis à g et f , et on obtient h_2 .

8. Montrez que $f \circ (h \circ l) = (h \circ l) \circ f$. En utilisant l'unicité du Théorème de point fixe, déduisez-en que $h \circ l = Id_{\mathbb{R}}$. Montrez de même que $l \circ h = Id_{\mathbb{R}}$.

Corrigé : La première identité est immédiate. En écrivant $h_1 \circ h_2$, on remarque que $\exists \tilde{p} \in C_{per}^0([0, 1])$ tel que $h_1 \circ h_2(x) = x + \tilde{p}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant **6.** avec $f_1 = f_2 = f$, on obtient $T_{\tilde{p}} = \tilde{p}$, or $T_0 = 0$ dans le cas $f_1 = f_2$. Par unicité, $\tilde{p} = 0$ puis $h_1 \circ h_2 = Id_{\mathbb{R}}$. Idem pour $h_2 \circ h_1$.

9. Concluez.

Corrigé : Comme $h_1, h_2 \in C^0$, ce sont donc des homéomorphismes inverses l'un de l'autre. En posant $h = h_1$, on a donc $f \circ h = h \circ g$, ce qui est exactement $(\star)$.