

Université de Lorraine
Département de Mathématiques
Analyse
Master 1 Mathématiques 2023-2024
F.Robert

Petit contrôle 2, 27 novembre
Durée : 30min

Le but est de montrer le résultat suivant :

Théorème : *On définit*

$A := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) / |f(x)| \leq 1 \text{ et } |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \text{ pour tous } x, y \in [0, 1]\}.$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $f_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une sous-suite $(f_{j(n)})$ et il existe $f \in A$ telles que $(f_{j(n)})$ converge uniformément vers f lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On **admet** qu'il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $x_k \in [0, 1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\{x_k / k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

1. Montrez qu'il existe des fonction $j_0, j_1, \dots : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(f_{j_0 \circ \dots \circ j_k(n)}(x_k))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

2. Montrez qu'il existe $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(f_{j(n)}(x_k))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

3. On se donne $x \in [0, 1]$. En utilisant la densité de $\{x_k / k \in \mathbb{N}\}$ dans $[0, 1]$, montrez que $(f_{j(n)}(x))_n$ est de Cauchy.

4. Montrez que pour tout $x \in [0, 1]$, $(f_{j(n)}(x))_n$ admet une limite dans $\mathbb{R}$. On la notera $f(x)$, ce qui définit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est la limite simple de $(f_{j(n)})$.

5. Montrez que $f \in A$.

On montre maintenant la convergence uniforme.

6. On fixe $\epsilon > 0$. Montrez qu'il existe une famille **finie** $L \subset \mathbb{N}$ telle que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k \in L} \left] x_k - \frac{\epsilon}{3}, x_k + \frac{\epsilon}{3} \right[.$$

7. En reprenant la preuve de **3.**, montrez qu'il existe $n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_{j(p)}(x) - f_{j(q)}(x)| < \epsilon \text{ pour tous } p, q \geq n_1 \text{ et } x \in [0, 1].$$

8. Dédisez-en que $(f_{j(n)})$ converge uniformément vers f .

Ceci prouve le théorème annoncé car $f \in A$.