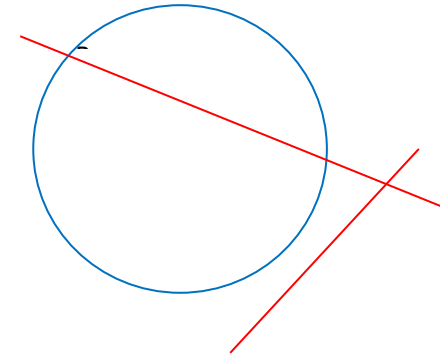
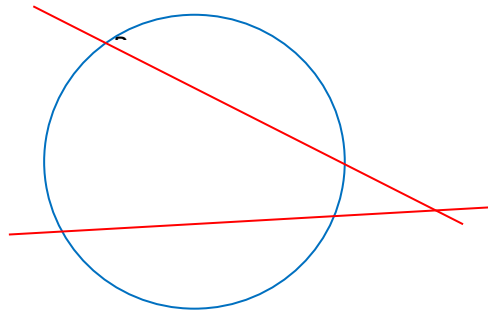
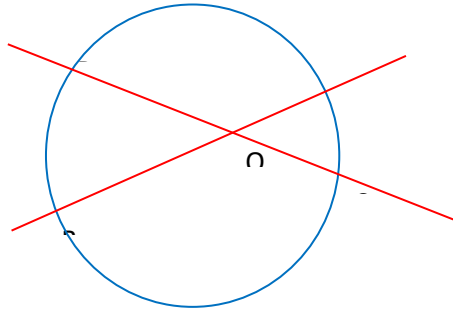


Une histoire parcellaire
de la géométrie projective au 19^e siècle

- Géométrie pure versus Géométrie des coordonnées (Applications de l'algèbre à la géométrie).
- Au début du 19^e siècle, 2 manières de pratiquer la géométrie : la géométrie qui utilise les coordonnées et celle (dite pure ou des Anciens) qui ne les utilise pas.
- Chez Carnot, Poncelet, Chasles, Steiner ..., un constat identique « la supériorité des méthodes de la géométrie analytique » et une ambition analogue « doter la géométrie pure du même caractère de généralité que celui de la géométrie analytique ».



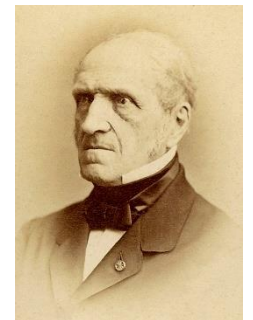
« En effet, tandis que la Géométrie analytique offre, par la marche qui lui est propre, des moyens généraux et uniformes pour procéder à la solution des questions qui se présentent, à la recherche des propriétés des figures ; tandis qu'elle arrive à des résultats dont la généralité est pour ainsi dire sans borne, l'autre procède au hasard ; sa marche dépend tout à fait de la sagacité de celui qui l'emploie, et ses résultats sont, presque toujours, bornés à l'état particulier de la figure que l'on considère. Par les efforts successifs des géomètres, les vérités particulières se sont multipliées sans cesse, mais il est arrivé rarement que la méthode et la théorie générale y aient gagné. »

Poncelet (*Traité* – 1822)



« Mais au surplus, en réfléchissant sur les procédés de l'algèbre, et en recherchant la cause des avantages immenses qu'elle apporte dans la Géométrie, ne s'aperçoit-on pas qu'elle doit une partie de ces avantages à la facilité des transformations que l'on fait subir aux expressions qu'on y introduit d'abord ? Transformations dont le secret et le mécanisme font la véritable science, et l'objet constant des recherches de l'analyste. N'était-il pas naturel de chercher à introduire pareillement dans la Géométrie pure des transformations analogues, portant directement sur les figures proposées, et sur leurs propriétés ? »

Chasles (*Aperçu* – 1837)



- La question de la généralité - Doter la nouvelle géométrie pure de la même capacité que la géométrie analytique quant à la généralité des questions, des méthodes et des résultats.
 - « [...] c'est une question aussi utile qu'intéressante que de rechercher directement quelles sont les causes de la faiblesse naturelle à l'une [*la géométrie ordinaire*], et de la puissance extensive qui constitue en quelque sorte le caractère propre de l'autre [*la géométrie analytique*]. Car, si ces causes étaient une fois bien connues, il deviendrait peut-être possible de faire passer dans la Géométrie ordinaire la généralité des conceptions de l'Analyse algébrique, généralité qui doit nécessairement appartenir à l'essence même de la grandeur figurée, indépendamment de toute manière de raisonner. [Poncelet 1818]
- Explicite/Implicite – déterminé/indéterminé
 - « Par raisonnements, formules, etc., *explicites*, j'entendrai toujours des raisonnements, formules, etc., qui concernent des quantités dont la grandeur est actuellement déterminée et connue d'une manière explicite, soit numériquement, soit géométriquement ; j'attache une signification précisément contraire aux expressions *raisonnement*, *formule implicite* ; le raisonnement explicite est nécessairement absolu, l'autre peut n'être que figuré. » [Poncelet 1818, 324-325]
 - « [...] en un mot, toutes les fois qu'on emploie le raisonnement sur des grandeurs *indéterminées*, c'est-à-dire le raisonnement purement *implicite*. » [Poncelet 1825, XII]

La généralité

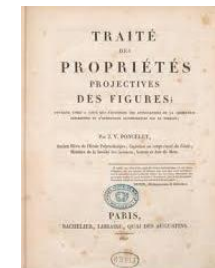
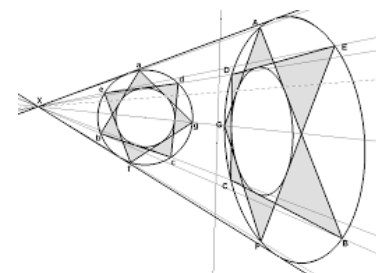
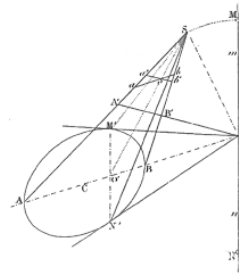
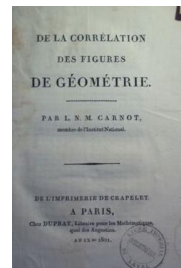
1. procède du caractère indéterminé des grandeurs ou situations avec lesquelles on raisonne.
2. en algèbre, est liée (entre autres) avec l'introduction des nombres négatifs et imaginaires
3. en géométrie, sera liée (entre autres) avec une indifférence pour la position des points sur une droite, avec la possibilité de considérer des éléments imaginaires

D'où l'idée de transformer les figures avec deux pistes :

Introduire la notion de corrélation (Carnot, Poncelet, le principe de continuité).

Mettre en avant les propriétés projectives des figures (les propriétés qui se conservent par projection).

« [...] deux moyens généraux, également puissants, se présentent pour perfectionner la Géométrie rationnelle : l'un qui consiste à étendre l'objet des conceptions de cette Géométrie à l'aide du principe de continuité, l'autre qui met en usage les principes de la doctrine des projections pour procéder, par une marche à la fois rapide et exempte d'hésitation, à la recherche des vérités géométriques. »

Poncelet (*Traité*, 1822)

Le principe de continuité

« N'est-il pas évident que si, en conservant ces mêmes données, on vient à faire varier la figure primitive par degrés insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations, trouvées pour le premier système, demeureront applicables aux états successifs, pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signe, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître à *priori*, et par des règles sûres ? » [Poncelet 1825, XIII]

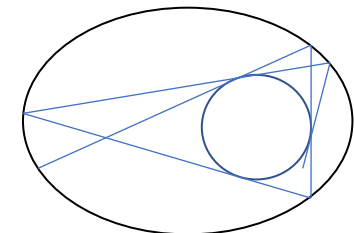
Légitimer le principe de continuité – un jugement négatif de Cauchy –
opposition entre deux lignes argumentatives – généralité versus rigueur

« [...] ne serait-on pas en droit d'admettre, dans toute son étendue, le principe de continuité en Géométrie rationnelle, comme on l'a fait d'abord dans le calcul algébrique, puis dans l'application de ce calcul à la géométrie, si ce n'est comme moyen de démonstration, du moins comme moyen de découverte ou d'invention ? N'est-il pas, pour le moins, aussi nécessaire d'enseigner les ressources employées, à diverses époques, par les hommes de génie, pour parvenir à la vérité, que les efforts pénibles qu'ils ont été ensuite obligés de faire pour les démontrer selon le goût des esprits ou timides ou peu capables de se mettre à leur portée ? »

Poncelet (*Traité*, 1822)

Une théorie des coniques et des surfaces du second degré

- Doter la géométrie pure de moyens pour rendre ses méthodes et ses résultats aussi généraux que ceux de la géométrie des coordonnées (faire de la géométrie sans calcul algébrique)
- Le principe de continuité ou de permanence des propriétés des figures
- Des propriétés projectives et des principes de projections
- Des éléments imaginaires et des éléments à l'infini
- On peut regarder le *Traité* comme essentiellement un exposé de théorie des coniques et des surfaces du 2^e ordre – les coniques sont présentes dès le début et tout au long de l'exposé
- Ce que nous allons faire dans la suite :
 - Exposer le point de vue « projectif » de Poncelet
 - En montrer la pertinence et la puissance
 - Mettre en place le langage
 - Nouveaux résultats ... comme le « grand » théorème de Poncelet



Le contexte

- Tout le monde connaît les résultats exposés dans la présentation des coniques.
- Poncelet se sert de cette exposition pour donner des exemples de démonstration par projection (il utilise aussi la méthode des transversales et un peu de géométrie infinitésimale).
- Mise en place d'un cadre démonstratif (résultat et méthode).
- Construction d'outils (principes projectifs).
- NB : il fait la même chose (plus rapidement) avec les expressions « éléments à l'infini » ou « éléments imaginaire »
- Ce que Poncelet reprend de la théorie classique

La définition :

« Suivant la définition d'*Apollonius*, généralement admise en Géométrie, une *section conique* ou simplement une conique est la ligne suivant laquelle un plan arbitraire rencontre un cône quelconque à base circulaire ; une conique n'est donc autre chose que la projection d'un cercle, et, d'après ce qui précède, c'est aussi une ligne du second ordre, puisque la circonférence du cercle ne peut être coupée en plus de deux points par une droite arbitraire tracée dans son plan. » [Poncelet, 1822, 4]

La classification des coniques

« C'est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, suivant que le plan sécant rencontre à la fois toutes les arêtes du cône, est parallèle à l'une d'entre elles, ou est parallèle en même temps à deux d'entre elles ; dans le premier cas, la courbe n'a qu'une branche entièrement fermée ; dans le second, cette branche est fermée d'un côté et s'étend à l'infini de l'autre ; dans le troisième, la courbe a deux branches infinies et distinctes. D'après cela, il est aisé de voir que l'hyperbole a deux points à l'infini avec deux tangentes en ces points nommés asymptotes, et que pour la parabole, ces deux points et ces deux tangentes se confondent en un seul point et en une seule tangente située toute entière à l'infini. »

[Poncelet 1822, 4]

La définition de l'harmonicité et de sa nature projective

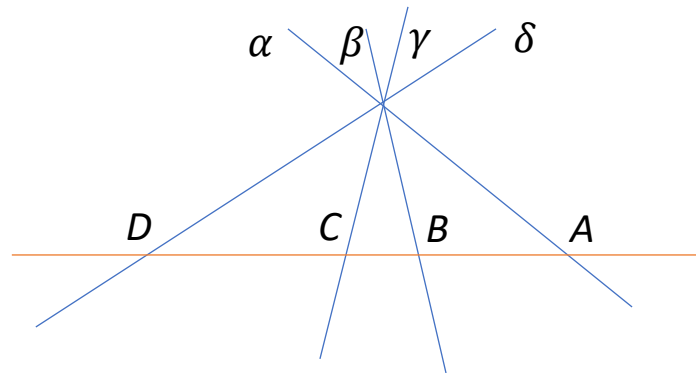
Référence à Pappus, Lahire et Brianchon

4 points A, B, C, D sont en relation harmonique si et seulement si

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = 1.$$

4 droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont en relation harmonique si et seulement si

$$\frac{\sin \alpha\gamma}{\sin \alpha\delta} : \frac{\sin \beta\gamma}{\sin \beta\delta} = 1.$$

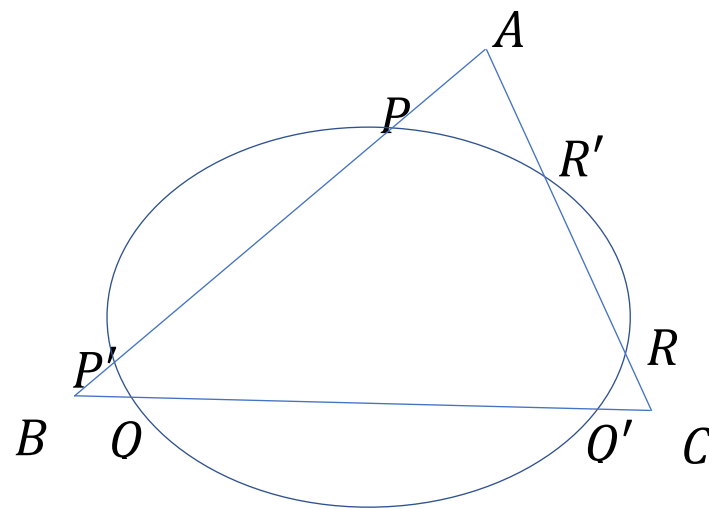


Les propriétés classiques des sections coniques

Une reprise qui montre d'emblée la pertinence des méthodes projectives et met en place les notions et le vocabulaire

« [...], nous donnerons dès à présent une idée de la facilité avec laquelle les principes qui précèdent peuvent conduire aux diverses propriétés connues des sections coniques, d'autant plus que presque toutes des propriétés nous seront indispensables pour ce que nous aurons à dire dans les Chapitres suivants. » [Poncelet 1822, 18]

Exemple : un cas particulier d'une propriété générale due à Carnot – un mélange de techniques de projection et de théorie des transversales



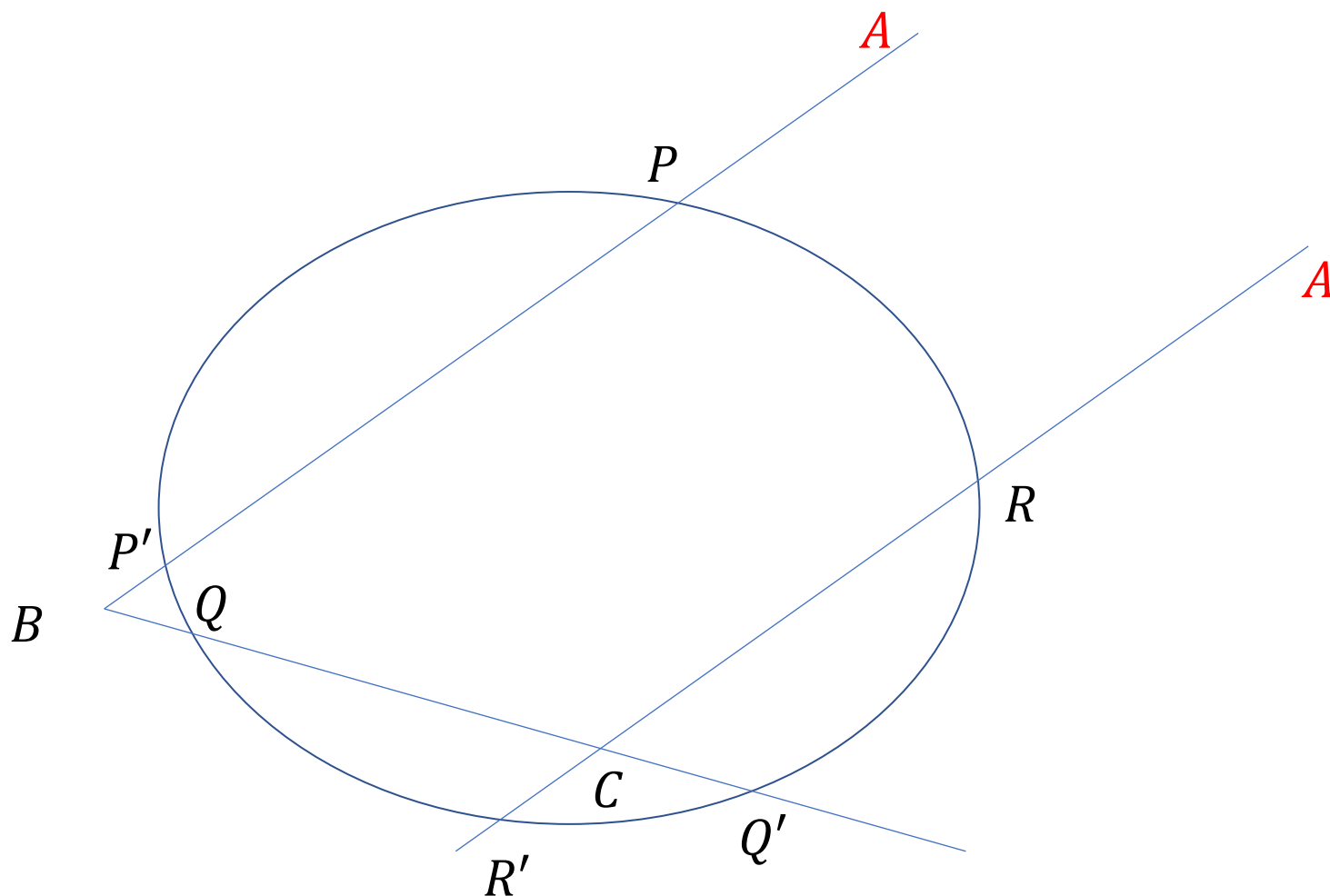
Soit ABC un triangle quelconque, situé sur le plan d'une section conique, et dont les côtés AB , BC , AC , ou leurs prolongements, sont rencontrés en P et P' , Q et Q' , R et R' respectivement par cette courbe : je dis qu'on aura :

$$AP \cdot AP' \cdot BQ \cdot BQ' \cdot CR \cdot CR' \\ = BP \cdot BP' \cdot CQ \cdot CQ' \cdot AR \cdot AR'$$

- Si le triangle ABC est circonscrit, la formule s'écrit

$$AP \cdot BQ \cdot CR = BP \cdot CQ \cdot AR$$

- Si A part à l'infini, ...



« Supposons que les côtés AB et AC , de concourants qu'ils étaient, deviennent parallèles, le sommet A passera à l'infini, et les segments qui lui correspondent pourront être considérés comme égaux ; donc la relation ci-dessus se changera en cette autre

$$BQ.BQ'.CR.CR' = BP.BP'.CQ.CQ'$$

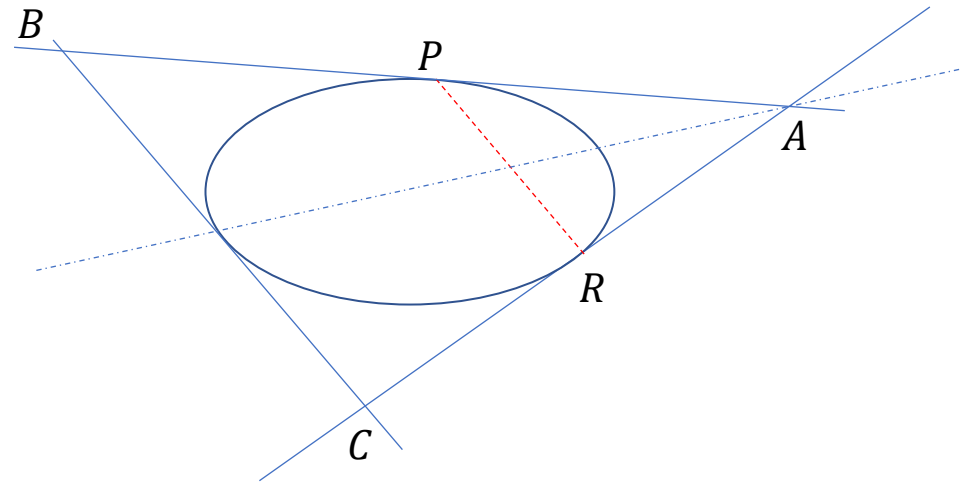
ou

$$\frac{BP.BP'}{BQ.BQ'} = \frac{CR.CR'}{CQ.CQ'}$$

c'est-à-dire que *le produit des ordonnées BP, BP' est à celui des abscisses correspondantes BQ, BQ' dans un rapport constant pour toutes les parallèles à AB : propriété très-anciennement connue des sections coniques, et qui subsiste [...], quand on remplace la courbe par le système de deux lignes droites quelconques. »*

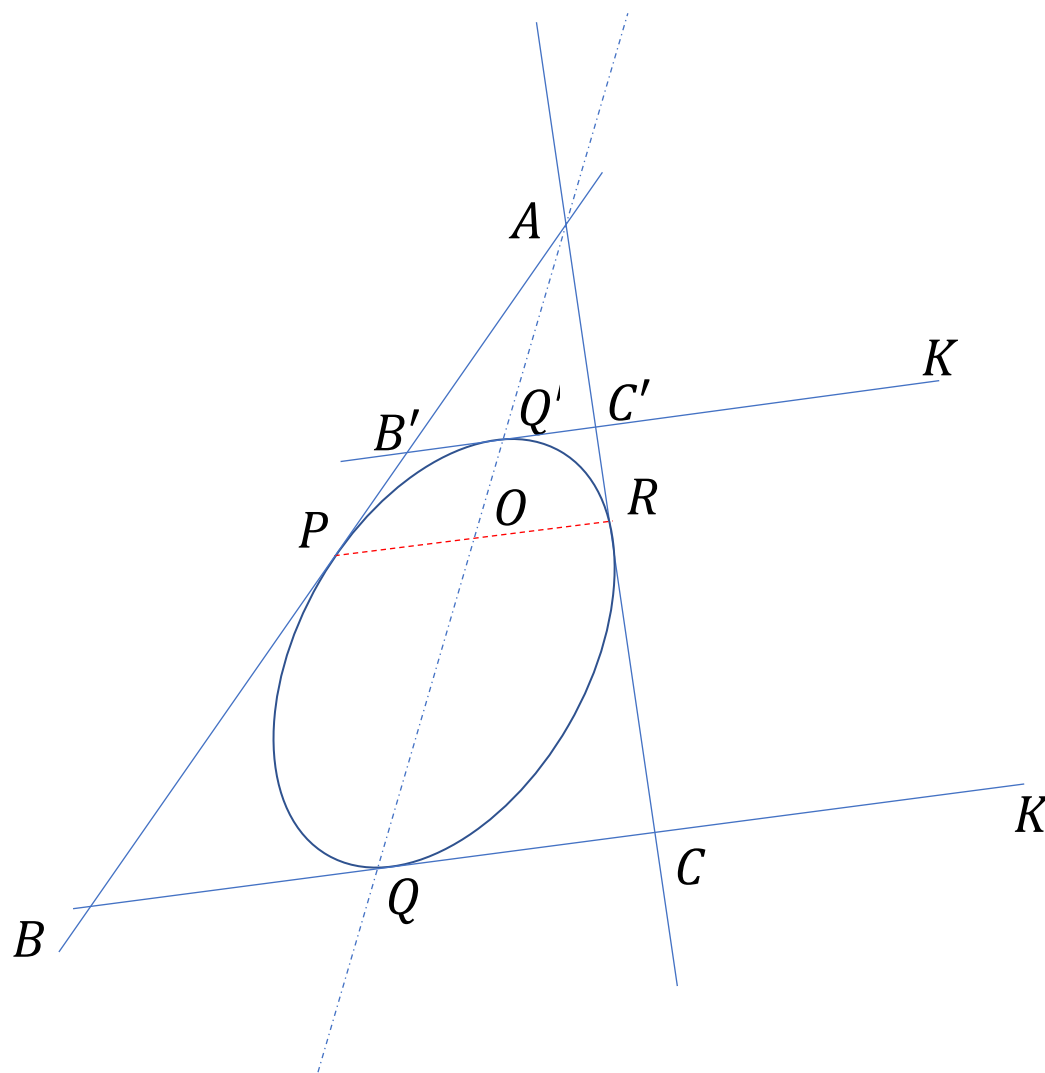
[Poncelet 1822, 18]

En considérant le cas particulier d'un triangle ABC circonscrit et de la corde PR parallèle à BC , Poncelet retrouve la propriété des diamètres conjugués.



« [...] les cordes parallèles des sections coniques ont leurs milieux et les points de concours des tangentes qui correspondent à leurs extrémités respectives, distribués sur une même droite appelée diamètre. »

[Poncelet 1822, 19]



La formule générale appliquée au triangle $BB'K$ donne

$$PB \cdot Q'B' = PB' \cdot QB.$$

Comme BC , PR et $B'C'$ sont parallèles, on a :

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{OQ}{OQ'} \text{ et } \frac{QB}{Q'B'} = \frac{AQ}{AQ'}$$

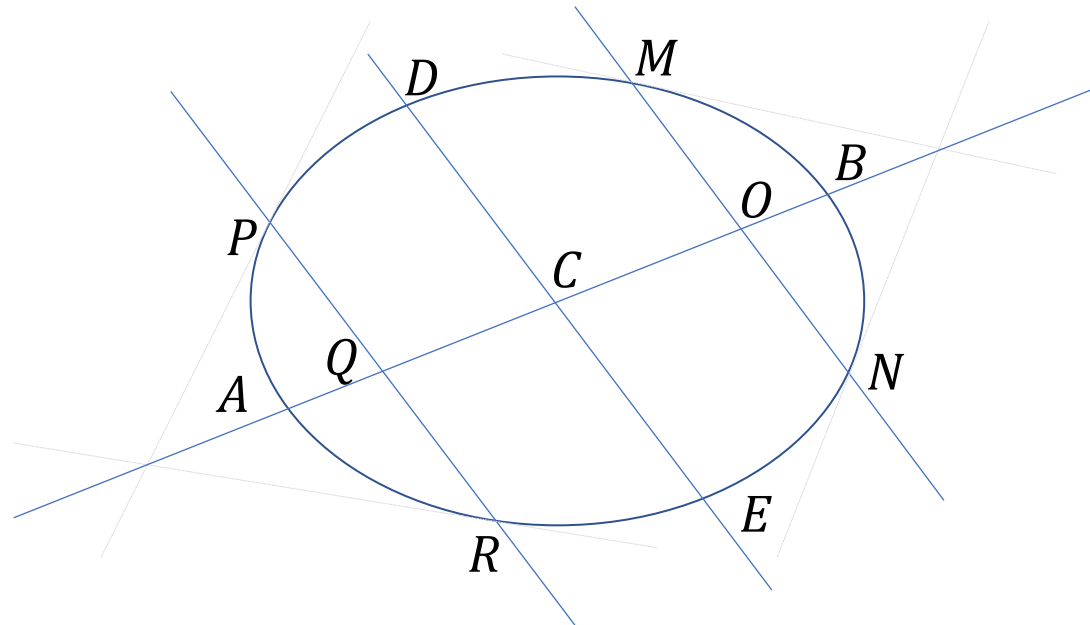
d'où

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{AQ}{AQ'}$$

« [...] le diamètre QQ' est divisé harmoniquement par le milieu de chaque corde PR et par le sommet A de l'angle circonscrit correspondant. » (38^e proposition du 1^{er} livre des *Coniques d'Apollonius*)

À partir de là, Poncelet retrouve les définitions et les propriétés classiques des centres, des diamètres conjugués, des asymptotes des coniques.

En particulier, il obtient une caractérisation des points d'une ellipse ou d'une hyperbole en fonction d'un paramètre qui ne dépend que du diamètre considéré et de son conjugué (*symptoma*).



« Soient, par exemple MN et PR deux cordes parallèles d'une section conique quelconque, AN le diamètre conjugué à leur direction commune, c'est-à-dire celui qui passe par leur points milieux O et Q, la proportion [précédente] deviendra évidemment

$$\frac{OM^2}{OA \cdot OB} = \frac{PQ^2}{QA \cdot QB}$$

d'où l'on tire

$$OM^2 = p \cdot OA \cdot OB$$

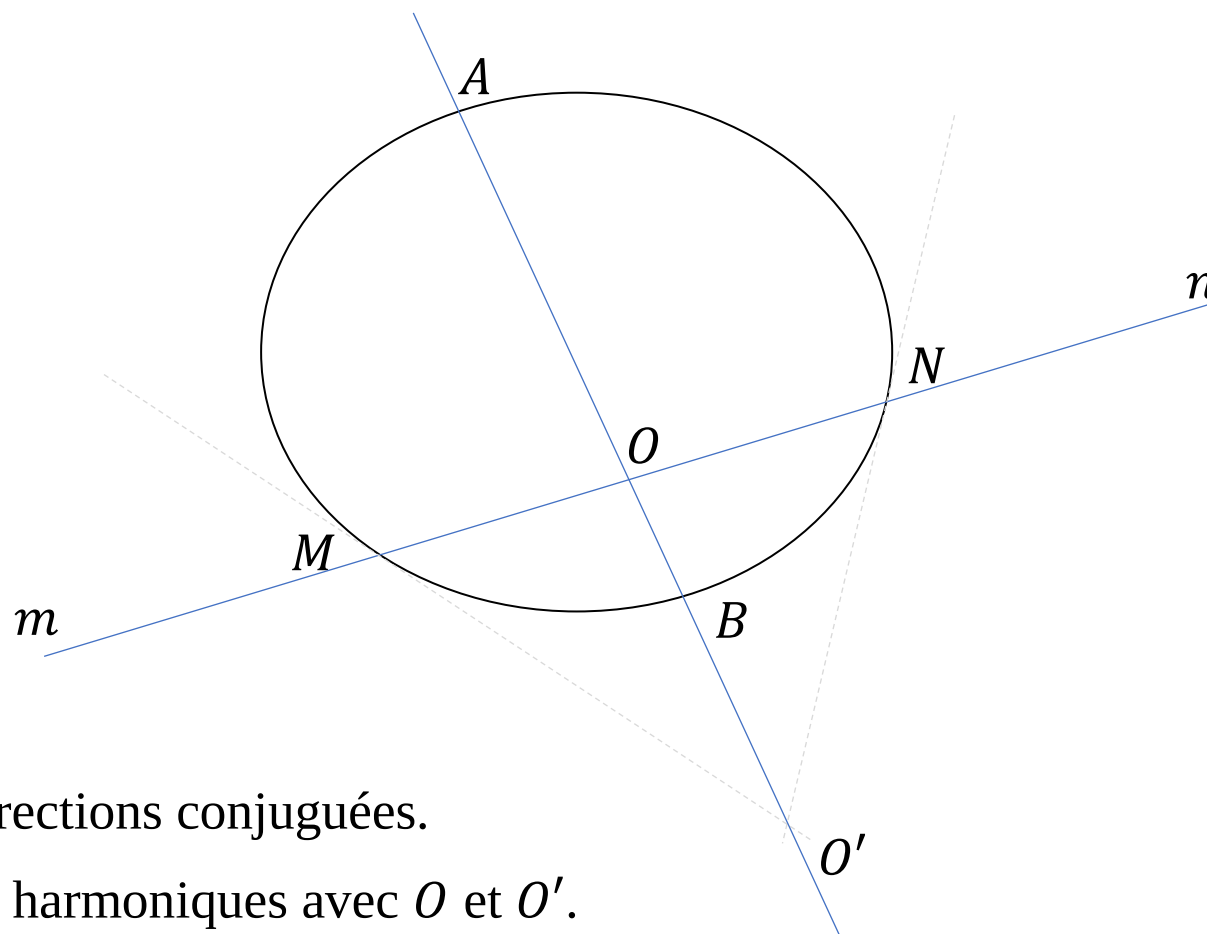
p étant une quantité constante qui ne varie qu'avec la direction du diamètre AB, et représente évidemment, dans le cas de l'*ellipse* et de l'*hyperbole*, le rapport inverse du carré de ce diamètre à celui qui lui est conjugué. »

[Poncelet 1822, 20]

1. p se calcule facilement « au moyen d'une ordonnée et des segments qui lui correspondent sur le diamètre » conjugué.
2. On peut donc tracer facilement la courbe
3. « Il en résulte cette conséquence générale, qu'il nous était indispensable d'établir pour ce qui suit : La projection d'une section conique quelconque sur un plan arbitraire est encore une section conique. » [Poncelet 1822, 21]
4. Propriétés de similitudes des coniques.

Ce que Poncelet ajoute à la théorie classique

L'idée de cordes imaginaires et coniques supplémentaires



AB et MN des directions conjuguées.

A et B conjugués harmoniques avec O et O' .

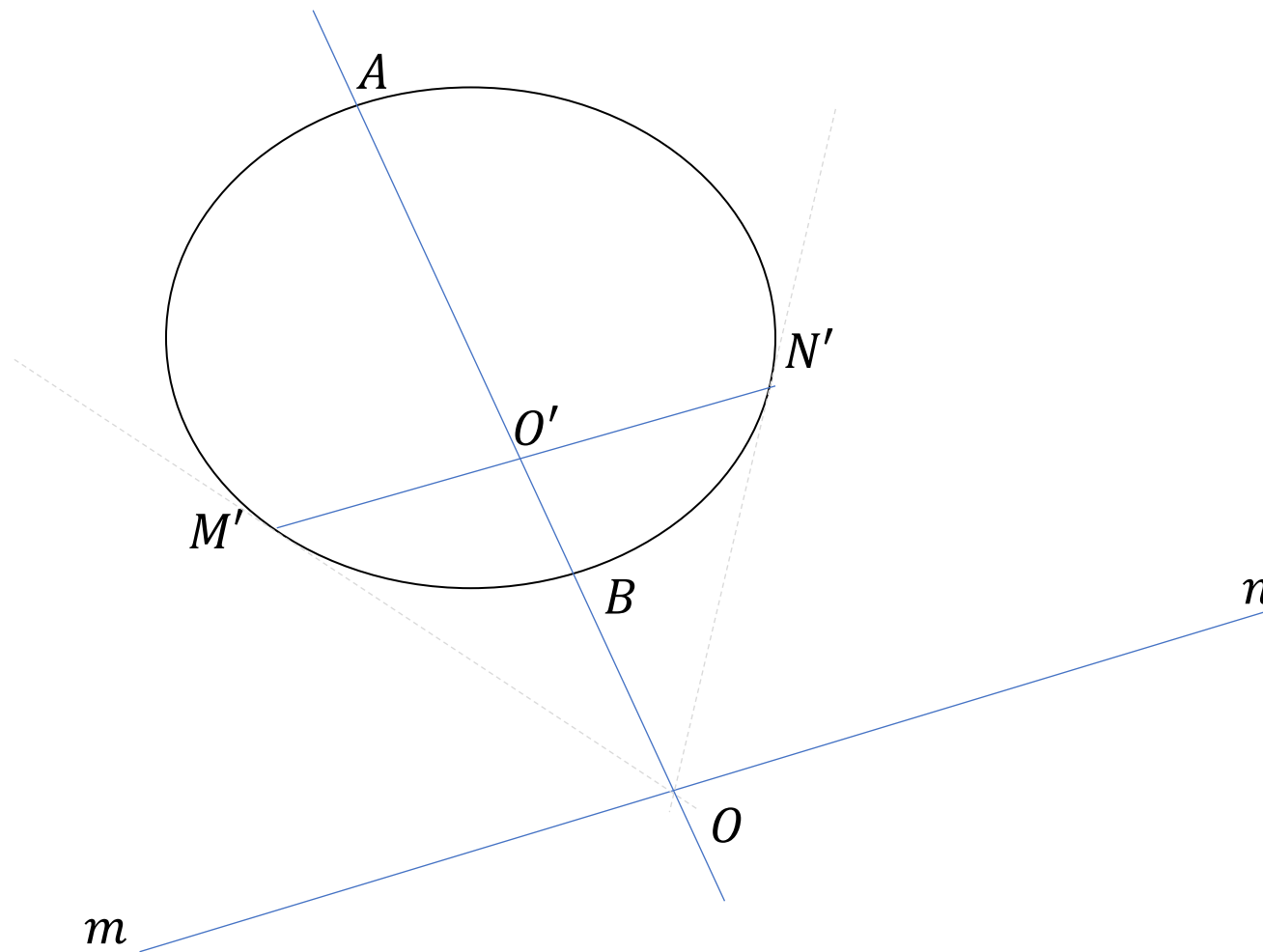
Le début de la théorie de la polarité

« Or, il résulte de ces définitions des points O et O' que ces points peuvent se construire indépendamment des points M et N , et subsistent par conséquent dans tous les cas possibles, même quand la droite mn est extérieure à la courbe. »

Généralisation (propriétés d'incidence + éléments imaginaires)

O milieu de $MN \rightarrow$ intersection de mn et AB .

O' est le point d'intersection des tangentes (réelles ou imaginaires) issues de M et N avec AB

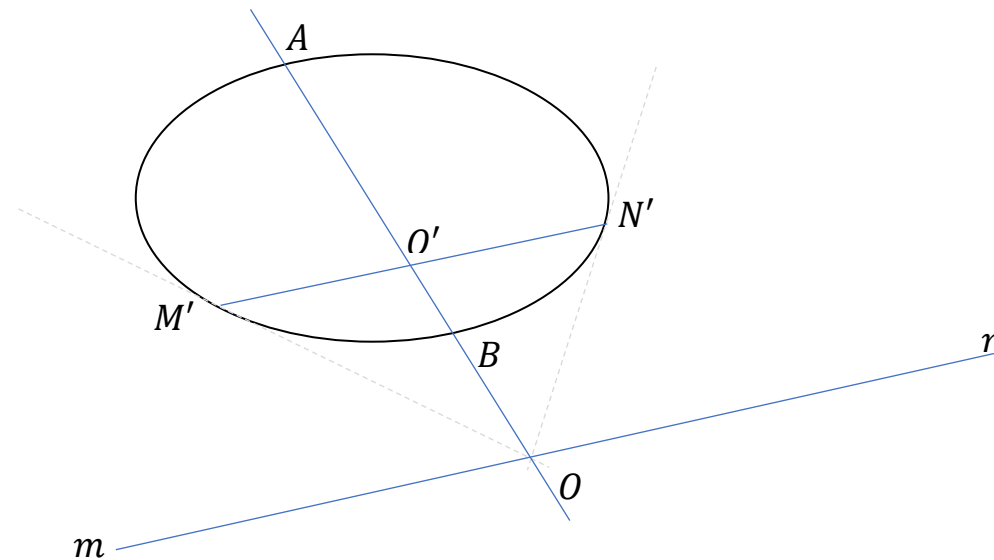


L'importance du vocabulaire ... « de l'importance de donner de la justesse et de la précision à la langue du raisonnement géométrique

« [...] les points O et O' , considérés comme appartenant à la droite mn , subsistant indépendamment de la réalité ou de la non-réalité des intersections M , N de cette droite et de la courbe, il n'y a aucune raison de les négliger plutôt dans un cas que dans l'autre, non plus que cette droite elle-même, puisqu'en devenant extérieure à la courbe elle ne cesse pas de conserver certaines dépendances avec elle.

Le point O' jouit, en particulier, d'un grand nombre de propriétés curieuses, par rapport à la droite dont il s'agit et à la section conique ; sa considération est très importante dans les recherches, et c'est à cause d'une de ces propriétés qu'il a reçu des géomètres le nom de *pôle* de cette droite, tandis que celle-ci a été appelée, à l'inverse, la *polaire* du point O' . » [Poncelet 1822, 27] e nouvelles expressions ...

« Mais aussi, en supposant qu'on ne veuille pas créer des termes nouveaux pour désigner la droite mn et ce qui lui appartient, et qu'on persiste à la regarder comme une sécante de la courbe quand elle cesse de la rencontrer, nous dirons, afin de conserver l'analogie entre les idées et le langage, que ses points d'intersection avec la courbe, et par conséquent la corde correspondante, sont *imaginaires*, qu'elle est elle-même *sécante idéale* de cette courbe ; et nous la distinguerons ainsi de toute ligne droite entièrement inconstruite dans son cours et sa direction, laquelle conservera d'ailleurs la dénomination, déjà admise, de *droite imaginaire*. »

Éléments réels, idéaux et imaginaires ...

$M'N'$ est une corde réelle

mn est une sécante idéale ; ses points d'intersection M et N avec l'ellipse sont imaginaires. O est le milieu (centre) idéal de la corde imaginaire MN et O' est le point de concours idéal des tangentes imaginaires issues des points imaginaires M et N .

L'objectif de Poncelet

➤ Rappel

Doter la géométrie pure de moyens aussi puissants que ceux dont dispose la géométrie des coordonnées, qui peut « grâce au calcul algébrique » considérer des problèmes géométriques indépendamment de la description des figures.

➤ Application des principes affichés

« Pour concevoir l'objet de ces définitions, il suffit de supposer que la section conique que l'on considère ne soit pas décrit, mais seulement donnée par certaines conditions, et qu'alors on se propose de rechercher, soit les points où elle est rencontrée par la droite réelle tracée sur son plan, soit tout autre objet qui en dépende ; car on ignore alors si les uns ou les autres sont ou non possibles, et il est naturel de persister, dans tous les cas, à regarder cette ligne droite comme une sécante véritable de la courbe, et par conséquent de la traiter comme telle dans le raisonnement géométrique qui sert à faire découvrir les objets qu'on cherche. » [Poncelet 1822, 27]

Les principes de projection

Liés au projet d'étudier les propriétés projectives des figures. Si une propriété (projective) est vraie pour une figure particulière, elle reste vraie pour toutes ses projections.

Idée : connaître les spectres de figures projectives pour choisir la figure la plus adéquate au problème étudié.

Exemple : « la figure renfermant, en particulier une section conique, pourra être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la section conique sera remplacée par une circonférence de cercle ; et cette seule remarque suffira pour ramener les questions les plus générales, sur les sections coniques, à d'autres qui soient purement élémentaires. » [Poncelet 1822, 50]

Un exemple de principe de projection

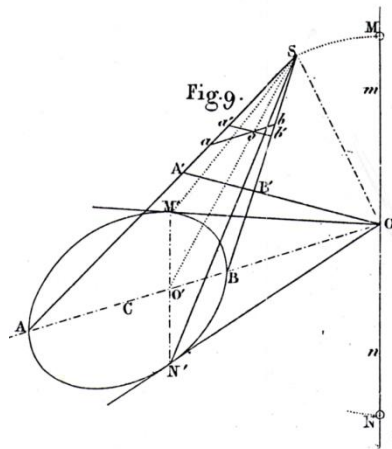
« Une figure plane quelconque, où entrent une certaine droite et une section conique, peut, en général, être regardée comme la projection d'une autre, pour laquelle la droite est passée entièrement à l'infini, et la section conique est devenue une circonférence de cercle. » [Poncelet 1822, 53]

Formulation du problème :

« Étant données une section conique (C) et une droite MN , située à volonté sur son plan, trouver un centre et un plan de projection tels, que la droite donnée MN soit projetée à l'infini sur ce plan, et que la section conique y soit en même temps représentée par un cercle. » [Poncelet 1822, 53]

S le centre (inconnu) de la projection. Comme la droite MN est projetée sur la droite à l'infini, le plan de projection (le plan sur lequel on réalise la projection) doit être parallèle au plan qui contient S et MN . De plus ce plan doit couper le cône de sommet S et de base (C) le long d'un cercle.

Une condition : « la droite MN doit être entièrement extérieure à la section conique (C) , c'est-à-dire *sécante idéale* de cette courbe » [Poncelet 1822, 53].



Soit MN la corde idéale correspondant à la droite et à la conique, si O désigne le milieu de MN , on doit avoir

$$SO = OM$$

et l'angle $M\hat{O}S$ doit être droit.

Pourquoi ? (Mise en place des techniques projectives et utilisation de technique de géométrie infinitésimale)

On considère un cône et une droite. Si l'on coupe le cône par deux plans passant par la droite, on obtient deux sections coniques projectives l'une de l'autre.

On a donc

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OA'.OB'$$

et si un des plans passent par S , on aura

$$OM^2 = p.OA.OB = p'.OS^2$$

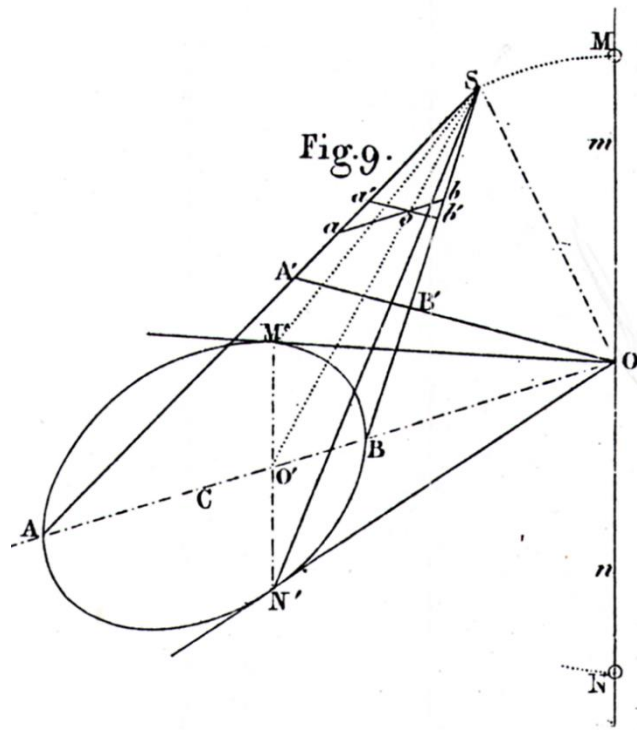
où p' est le paramètre commun aux coniques semblables à la conique infinitésimale en S (aux coniques obtenues par des plans parallèles au plan SOM) par rapport à la direction SO .

Dans le cas qui nous intéresse comme cette conique est un cercle (SOM est parallèle au plan de projection), $p' = 1$, d'où $OM = SO$.

Dans un cercle, les directions conjuguées sont orthogonales et donc SO est orthogonale à OM .

D'où :

« Le centre auxiliaire de projection doit se trouver sur une circonférence de cercle, décrite du milieu de la corde idéale qui répond à la droite donnée, comme centre, avec un rayon égal à la moitié de cette corde, et dans un plan qui lui soit perpendiculaire ».[Poncelet 1822, 54]



Commentaires : [...] il faut que la droite MN ne rencontre pas la courbe, car autrement la distance OS ou OM deviendrait imaginaires. [Poncelet 1822, 54]

- Les propriétés examinées ne seront démontrées, d'une manière rigoureuse et absolue, que pour les premières de ces positions, et elles cesseront de l'être pour les autres.
- Toutefois on ne doit pas conclure que, l'objet des raisonnements primitifs étant devenus illusoire, la propriété ait par là même cessé de subsister. [Poncelet 1822, 66]

Le rôle heuristique du principe de continuité. Le fait que dans une certaine configuration, des éléments deviennent imaginaires est la marque qu'un autre énoncé s'applique :

« Nous venons de remarquer que, quand la droite donnée rencontre la section conique (C), telle que celle $M'N'$ par exemple, la projection de cette courbe, suivant un cercle, devient impossible ou imaginaire ; on peut alors demander que cette projection soit une hyperbole équilatère, dont le diamètre parallèle à la droite donnée soit l'axe idéal. »
[Poncelet 1822, 54]

Principe de continuité

« [...] nous regarderons comme générales, et applicables à tous les cas possibles, les propriétés géométriques qu'il sera possible de déduire des principes de projection qui viennent d'être exposés, quand bien même ces principes pourraient cesser d'avoir lieu géométriquement pour certaines dispositions de la figure, et qu'en conséquence sa projection pût devenir imaginaire. »

[Poncelet 1822, 67]

Exemple : Les propriétés de deux cercles concentriques appartiennent aussi à deux coniques qui ont un double contact.