

Axiomatisches Denken.*)

Von

DAVID HILBERT in Göttingen.

Wie im Leben der Völker das einzelne Volk nur dann gedeihen kann wenn es auch allen Nachbarvölkern gut geht, und wie das Interesse der Staaten es erheischt, daß nicht nur innerhalb jedes einzelnen Staates Ordnung herrsche, sondern auch die Beziehungen der Staaten unter sich gut geordnet werden müssen, so ist es auch im Leben der Wissenschaften. In richtiger Erkenntnis dessen haben die bedeutendsten Träger des mathematischen Gedankens stets großes Interesse an den Gesetzen und der Ordnung in den Nachbarwissenschaften bewiesen und vor allem zu Gunsten der Mathematik selbst von jeher die Beziehungen zu den Nachbarwissenschaften, insbesondere zu den großen Reichen der Physik und der Erkenntnistheorie gepflegt. Das Wesen dieser Beziehungen und der Grund ihrer Fruchtbarkeit, glaube ich, wird am besten deutlich, wenn ich Ihnen diejenige allgemeine Forschungsmethode schildere, die in der neueren Mathematik mehr und mehr zur Geltung zu kommen scheint: ich meine die *axiomatische Methode*.

Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassenden Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, daß diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen* in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts Anderes als die *Theorie* des Wissensgebietes.

So ordnen sich die geometrischen Tatsachen zu einer Geometrie, die arithmetischen Tatsachen zu einer Zahlentheorie, die statischen, mechanischen, elektrodynamischen Tatsachen zu einer Theorie der Statik, Mechanik, Elektrodynamik oder die Tatsachen aus der Physik der Gase zu einer Gastheorie. Ebenso ist es mit den Wissensgebieten der Thermodynamik, der geometrischen Optik, der elementaren Strahlungstheorie, der

*) Dieser Vortrag ist in der Schweizerischen mathematischen Gesellschaft am 11. September 1917 in Zürich gehalten worden.

Wärmeleitung oder auch mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mengenlehre. Ja es gilt von speziellen rein mathematischen Wissensgebieten wie Flächentheorie, Galoisscher Gleichungstheorie, Theorie der Primzahlen nicht weniger als für manche der Mathematik fern liegende Wissensgebiete wie gewisse Abschnitte der Psychophysik oder die Theorie des Geldes.

Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, daß der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen.

So genügt in der Geometrie der Satz von der Linearität der Gleichung der Ebene und von der orthogonalen Transformation der Punktkoordinaten vollständig, um die ganze ausgedehnte Wissenschaft der Euklidischen Raumgeometrie allein durch die Mittel der Analysis zu gewinnen. Zum Aufbau der Zahlentheorie ferner reichen die Rechnungsgesetze und Regeln für ganze Zahlen aus. In der Statik übernimmt die gleiche Rolle der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, in der Mechanik etwa die Lagrange'schen Differentialgleichungen der Bewegung und in der Elektrodynamik die Maxwell'schen Gleichungen mit Hinzunahme der Forderung der Starrheit und Ladung des Elektrons. Die Thermodynamik läßt sich vollständig auf den Begriff der Energiefunktion und die Definition von Temperatur und Druck als Ableitungen nach ihren Variablen, Entropie und Volumen, aufbauen. Im Mittelpunkt der elementaren Strahlungstheorie steht der Kirchhoffsche Satz über die Beziehungen zwischen Emission und Absorption; in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Gauß'sche Fehlergesetz, in der Gastheorie der Satz von der Entropie als negativem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit des Zustandes, in der Flächentheorie die Darstellung des Bogenelementes durch die quadratische Differentialform, in der Gleichungstheorie der Satz von der Wurzelexistenz, in der Theorie der Primzahlen der Satz von der Realität und Häufigkeit der Nullstellen der Riemann'schen Funktion $\xi(t)$ der grundlegende Satz.

Diese grundlegenden Sätze können von einem ersten Standpunkte aus als die *Axiome der einzelnen Wissensgebiete* angesehen werden: die fortschreitende Entwicklung des einzelnen Wissensgebietes beruht dann lediglich in dem weiteren logischen Ausbau des schon aufgeführten Fachwerkes der Begriffe. Zumal in der reinen Mathematik ist dieser Standpunkt der vorherrschende, und der entsprechenden Arbeitsweise verdanken wir die mächtige Entwicklung der Geometrie, der Arithmetik, der Funktionentheorie und der gesamten Analysis.

Somit hatte dann in den genannten Fällen das Problem der Begründung der einzelnen Wissensgebiete eine Lösung gefunden; diese Lösung war aber nur eine vorläufige. In der Tat machte sich in den einzelnen Wissensgebieten das Bedürfnis geltend, die genannten, als Axiome angesehenen und zugrunde gelegten Sätze selbst zu begründen. So gelangte man zu „Beweisen“ für die Linearität der Gleichung der Ebene und die Orthogonalität der eine Bewegung ausdrückenden Transformation, ferner für die arithmetischen Rechengesetze, für das Parallelogramm der Kräfte, für die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und das Kirchhoffsche Gesetz über Emission und Absorption, für den Entropiesatz und den Satz von der Existenz der Wurzeln einer Gleichung.

Aber die kritische Prüfung dieser „Beweise“ läßt erkennen, daß sie nicht an sich Beweise sind, sondern im Grunde nur die Zurückführung auf gewisse tiefer liegende Sätze ermöglichen, die nunmehr ihrerseits an Stelle der zu beweisenden Sätze als neue Axiome anzusehen sind. So entstanden die eigentlichen heute sogenannten *Axiome* der Geometrie, der Arithmetik, der Statik, der Mechanik, der Strahlungstheorie oder der Thermodynamik. Diese Axiome bilden eine tiefer liegende Schicht von Axiomen gegenüber derjenigen Axiomschicht, wie sie durch die vorhin genannten zuerst zugrunde gelegten Sätze in den einzelnen Wissensgebieten charakterisiert worden ist. Das Verfahren der axiomatischen Methode, wie es hierin ausgesprochen liegt, kommt also einer *Tieferlegung der Fundamente* der einzelnen Wissensgebiete gleich, wie eine solche ja bei jedem Gebäude nötig wird in dem Maße, als man dasselbe ausbaut, höher führt und dennoch für seine Sicherheit bürgen will.

Soll die Theorie eines Wissensgebietes d. h. das sie darstellende Fachwerk der Begriffe ihrem Zwecke, nämlich der Orientierung und Ordnung dienen, so muß es vornehmlich gewissen zwei Anforderungen genügen: *erstens* soll es einen Überblick über die *Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* der Sätze der Theorie und *zweitens* eine Gewähr der *Widerspruchslosigkeit* aller Sätze der Theorie bieten. Insbesondere sind die Axiome einer jeden Theorie nach diesen beiden Gesichtspunkten zu prüfen.

Beschäftigen wir uns zunächst mit der Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Axiome.

Das klassische Beispiel für die Prüfung der Unabhängigkeit eines Axioms bietet das *Parallelenaxiom* in der Geometrie. Die Frage, ob der Parallelsatz durch die anderen Axiome schon bedingt ist, verneinte Euklid, indem er ihn unter die Axiome setzte. Die Untersuchungsmethode Euklids wurde vorbildlich für die axiomatische Forschung, und seit Euklid

ist zugleich die Geometrie das Musterbeispiel für eine axiomatisierte Wissenschaft überhaupt.

Ein anderes Beispiel für eine Untersuchung über die Abhängigkeit der Axiome bietet die klassische Mechanik. Vorläufigerweise konnten, wie vorhin bemerkt, die Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung als Axiome der Mechanik gelten — läßt sich doch auf diese in ihrer allgemeinen Formulierung für beliebige Kräfte und beliebige Nebenbedingungen die Mechanik gewiß vollständig gründen. Bei näherer Untersuchung zeigt sich aber, daß beim Aufbau der Mechanik sowohl beliebige Kräfte wie beliebige Nebenbedingungen vorauszusetzen unnötig ist und somit das System von Voraussetzungen vermindert werden kann. Dieses Erkenntnis führt einerseits zu dem Axiomensystem von Boltzmann, der nur Kräfte und zwar speziell Zentralkräfte, aber keine Nebenbedingungen annimmt und dem Axiomensystem von Hertz, der die Kräfte verwirft und mit Nebenbedingungen und zwar speziell mit festen Verbindungen auskommt. Diese beiden Axiomensysteme bilden somit eine tiefere Schicht in der fortschreitenden Axiomatisierung der Mechanik.

Nehmen wir bei Begründung der Galoisschen Gleichungstheorie die Existenz der Wurzeln einer Gleichung als Axiom an, so ist dieses sicher ein abhängiges Axiom; denn jener Existenzsatz ist aus den arithmetischen Axiomen beweisbar, wie zuerst Gauß gezeigt hat.

Ähnlich verhält es sich damit, wenn wir etwa den Satz von der Realität der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ in der Primzahlentheorie als Axiom annehmen wollten: beim Fortschreiten zur tieferen Schicht der reinen arithmetischen Axiome würde der Beweis dieses Realitätssatzes notwendig sein und dieser erst uns die Sicherheit der wichtigen Folgerungen gewähren, die wir durch seine Postulierung schon jetzt für die Theorie der Primzahlen aufgestellt haben.

Besonderes Interesse für die axiomatische Behandlung bietet die Frage der Abhängigkeit der Sätze eines Wissensgebietes von dem Axiom der *Stetigkeit*.

In der Theorie der reellen Zahlen wird gezeigt, daß das Axiom des Messens, das sogenannte Archimedische Axiom, von allen übrigen arithmetischen Axiomen unabhängig ist. Dieses Erkenntnis ist bekanntlich für die Geometrie von wesentlicher Bedeutung, scheint mir aber auch für die Physik von prinzipiellem Interesse; denn sie führt uns zu folgendem Ergebnis: die Tatsache, daß wir durch Aneinanderfügen irdischer Entfernungen die Dimensionen und Entfernungen der Körper im Weltenraume erreichen, d. h. durch irdisches Maß die himmlischen Längen messen können, ebenso die Tatsache, daß sich die Distanzen im Atominneren durch das Metermaß ausdrücken lassen, sind keineswegs bloß eine logische Folge der Sätze

über Dreieckskongruenzen und der geometrischen Konfiguration, sondern erst ein Forschungsergebnis der Empirie. Die Gültigkeit des Archimedischen Axioms in der Natur bedarf eben im bezeichneten Sinne gerade so der Bestätigung durch das Experiment wie etwa der Satz von der Winkelsumme im Dreieck im bekannten Sinne.

Allgemein möchte ich das Stetigkeitsaxiom in der Physik wie folgt formulieren: „Wird für die Gültigkeit einer physikalischen Aussage irgend ein beliebiger Genauigkeitsgrad vorgeschrieben, so lassen sich kleine Bereiche angeben, innerhalb derer die für die Aussage gemachten Voraussetzungen frei variieren dürfen, ohne daß die Abweichung von der Aussage den vorgeschriebenen Genauigkeitsgrad überschreitet“. Dies Axiom bringt im Grunde nur zum Ausdruck, was unmittelbar im Wesen des Experimentes liegt; es ist stets von den Physikern angenommen worden, ohne daß es bisher besonders formuliert worden ist.

Wenn man z. B. nach Planck aus dem Axiom der Unmöglichkeit des *Perpetuum mobile zweiter Art* den zweiten Wärmesatz ableitet, so wird dabei dieses Stetigkeitsaxiom notwendigerweise benutzt.

Daß in der Begründung der Statik beim Beweise des Satzes vom *Parallelogramm der Kräfte* das Stetigkeitsaxiom notwendig ist — wenigstens bei einer gewissen nächstliegenden Auswahl der übrigen Axiome — hat Hamel auf eine sehr interessante Weise durch Heranziehung des Satzes von der Wohlordnungsfähigkeit des Kontinuums gezeigt.

Die Axiome der klassischen Mechanik können eine Tieferlegung erfahren, wenn man sich vermöge des Stetigkeitsaxioms die kontinuierliche Bewegung in kurz aufeinanderfolgende geradlinig gleichförmige stückweise durch Impulse hervorgerufene Bewegungen zerlegt denkt und dann als wesentliches mechanisches Axiom das *Bertrandsche Maximalprinzip* verwendet, demzufolge nach jedem Stoß die wirklich eintretende Bewegung stets diejenige ist, bei welcher die kinetische Energie des Systems ein Maximum wird gegenüber allen mit dem Satz von der Erhaltung der Energie verträglichen Bewegungen.

Auf die neuesten Begründungsarten der Physik, insbesondere der Elektrodynamik, die ganz und gar Kontinuumstheorien sind und dem gemäß die Stetigkeitsforderung in weitestem Maße erheben, möchte ich hier nicht eingehen, weil diese Forschungen noch nicht genügend abgeschlossen sind.

Wir wollen nun den zweiten der vorhin genannten Gesichtspunkte, nämlich die Frage nach der *Widerspruchslosigkeit* der Axiome prüfen; diese ist offenbar von höchster Wichtigkeit, weil das Vorhandensein eines Widerspruches in einer Theorie offenbar den Bestand der ganzen Theorie gefährdet.

Die Erkenntnis der inneren Widerspruchslosigkeit ist selbst bei längst anerkannten und erfolgreichen Theorien mit Schwierigkeit verbunden: ich erinnere an den *Umkehr- und Wiederkehrreinwand* in der kinetischen Gastheorie.

Oftmals passiert es, daß die innere Widerspruchslosigkeit einer Theorie als selbstverständlich angesehen wird, während in Wahrheit tiefe mathematische Entwicklungen zu dem Nachweise nötig sind. Als Beispiel betrachten wir ein Problem aus der elementaren Theorie der *Wärmeleitung*, nämlich die Temperaturverteilung innerhalb eines homogenen Körpers, dessen Oberfläche auf einer bestimmten von Ort zu Ort variierenden Temperatur gehalten wird: alsdann enthält in der Tat die Forderung des Bestehens von Temperaturgleichgewicht keinen inneren Widerspruch der Theorie. Zur Erkenntnis dessen ist aber der Nachweis nötig, daß die bekannte Randwertaufgabe der Potentialtheorie stets lösbar ist; denn erst die Lösung dieser Randwertaufgabe zeigt, daß eine der Wärmeleitungsgleichung genügende Temperaturverteilung überhaupt möglich ist.

Aber zumal in der Physik genügt es nicht, wenn die Sätze einer Theorie unter sich in Einklang stehen; vielmehr ist noch die Forderung zu erheben, daß sie auch den Sätzen eines benachbarten Wissensgebietes niemals widersprechen.

So liefern, wie ich kürzlich zeigte, die Axiome der elementaren Strahlungstheorie außer der Begründung des *Kirchhoffschen Satzes* über Emission und Absorption noch einen speziellen Satz über Reflexion und Brechung einzelner Lichtstrahlen, nämlich den Satz: Wenn zwei Strahlen natürlichen Lichtes und gleicher Energie von je einer Seite her auf die Trennungsfläche zweier Medien in solchen Richtungen auffallen, daß der eine Strahl nach seinem Durchtritt, der andere nach seiner Reflexion dieselbe Richtung aufweist, so ist der durch die Vereinigung entstehende Strahl wieder von natürlichem Licht und gleicher Energie. Dieser Satz ist — wie sich in der Tat zeigt — mit der Optik keineswegs in Widerspruch, sondern kann als Folgerung aus der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitet werden.

Die Resultate der *kinetischen Gastheorie* stehen bekanntlich mit der *Thermodynamik* in bestem Einklang.

Ebenso sind *elektromagnetische Trägheit* und *Einsteinsche Gravitation* mit den entsprechenden Begriffen der klassischen Theorien verträglich, insofern diese letzteren als Grenzfälle der allgemeineren Begriffe in den neuen Theorien aufzufassen sind.

Dagegen hat die *moderne Quantentheorie* und die fortschreitende Erkenntnis der inneren Atomstruktur zu Gesetzen geführt, die der bisherigen wesentlich auf den *Maxwellschen Gleichungen* aufgebauten *Elektrodynamik*

geradezu widersprechen; die heutige Elektrodynamik bedarf daher — wie jedermann anerkennt — notwendig einer neuen Grundlegung und wesentlichen Umgestaltung.

Wie man aus dem bisher Gesagten ersieht, wird in den physikalischen Theorien die Beseitigung sich einstellender Widersprüche stets durch veränderte Wahl der Axiome erfolgen müssen und die Schwierigkeit besteht darin, die Auswahl so zu treffen, daß alle beobachteten physikalischen Gesetze logische Folgen der ausgewählten Axiome sind.

Anders verhält es sich, wenn in rein theoretischen Wissensgebieten Widersprüche auftreten. Das klassische Beispiel für ein solches Vorkommnis bietet die Mengentheorie und zwar insbesondere das schon auf Cantor zurückgehende *Paradoxon der Menge aller Mengen*. Dieses Paradoxon ist so schwerwiegend, daß sehr angesehene Mathematiker, z. B. Kronecker und Poincaré, sich durch dasselbe veranlaßt fühlten, der gesamten Mengentheorie — einem der fruchtreichsten und kräftigsten Wissenszweige der Mathematik überhaupt — die Existenzberechtigung abzuspochen.

Auch bei dieser prekären Sachlage brachte die axiomatische Methode Abhilfe. Es gelang Zermelo, indem er durch Aufstellung geeigneter Axiome einerseits die Willkür der Definitionen von Mengen und andererseits die Zulässigkeit von Aussagen über ihre Elemente in bestimmter Weise beschränkte, die Mengentheorie derart zu entwickeln, daß die in Rede stehenden Widersprüche wegfallen, daß aber trotz der auferlegten Beschränkungen die Tragweite und Anwendungsfähigkeit der Mengentheorie die gleiche bleibt.

In allen bisherigen Fällen handelte es sich um Widersprüche, die sich im Verlauf der Entwicklung einer Theorie herausgestellt hatten und zu deren Beseitigung durch Umgestaltung des Axiomensystems die Not drängte. Aber es genügt nicht, vorhandene Widersprüche zu vermeiden, wenn der durch sie gefährdete Ruf der Mathematik als Muster strengster Wissenschaft wiederhergestellt werden soll: die prinzipielle Forderung der Axiomenlehre muß vielmehr weitergehen, nämlich dahin, zu erkennen, daß jedesmal innerhalb eines Wissensgebietes auf Grund des aufgestellten Axiomensystems Widersprüche *überhaupt unmöglich* sind.

Dieser Forderung entsprechend habe ich in den *Grundlagen der Geometrie* die Widerspruchslösigkeit der aufgestellten Axiome nachgewiesen, indem ich zeigte, daß jeder Widerspruch in den Folgerungen aus den geometrischen Axiomen notwendig auch in der Arithmetik des Systems der reellen Zahlen erkennbar sein mußte.

Auch für die physikalischen Wissensgebiete genügt es offenbar stets, die Frage der *inneren Widerspruchslösigkeit* auf die Widerspruchslösigkeit der arithmetischen Axiome zurückzuführen. So zeigte ich die Wider-

spruchslosigkeit der Axiome der *elementaren Strahlungstheorie*, indem ich für dieselbe das Axiomensystem aus analytisch unabhängigen Stücken aufbaute — die Widerspruchslosigkeit der Analysis dabei voraussetzend.

Ähnlich darf und soll man unter Umständen beim Aufbau einer mathematischen Theorie verfahren. Haben wir beispielsweise bei Entwicklung der Galoisschen Gruppentheorie den Satz von der *Wurzelexistenz* oder in der Theorie der Primzahlen den Satz von der *Realität der Nullstellen* der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ als Axiom betrachtet, so läuft jedesmal der Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems eben darauf hinaus, den Satz von der Wurzelexistenz bzw. den Riemannschen Satz über die Funktion $\xi(t)$ mit den Mitteln der Analysis zu beweisen — und damit erst ist die Vollendung der Theorie gesichert.

Auch die Frage der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems für die *reellen Zahlen* läßt sich auf die nämliche Frage für die ganzen Zahlen zurückführen: dies ist das Verdienst der Theorien der Irrationalzahlen von Weierstraß und Dedekind.

Nur in zwei Fällen nämlich, wenn es sich um die Axiome der *ganzen Zahlen* selbst und wenn es sich um die Begründung der *Mengenlehre* handelt, ist dieser Weg der Zurückführung auf ein anderes spezielleres Wissensgebiet offenbar nicht gangbar, weil es außer der Logik überhaupt keine Disziplin mehr gibt, auf die alsdann eine Berufung möglich wäre.

Da aber die Prüfung der Widerspruchslosigkeit eine unabweisbare Aufgabe ist, so scheint es nötig, die Logik selbst zu axiomatisieren und nachzuweisen, daß Zahlentheorie, sowie Mengenlehre nur Teile der Logik sind.

Dieser Weg, seit langem vorbereitet — nicht zum mindesten durch die tiefgehenden Untersuchungen von Frege — ist schließlich am erfolgreichsten durch den scharfsinnigen Mathematiker und Logiker Russell eingeschlagen worden. In der Vollendung dieses großzügigen Russellschen Unternehmens der *Axiomatisierung der Logik* könnte man die Krönung des Werkes der Axiomatisierung überhaupt erblicken.

Diese Vollendung wird indessen noch neuer und vielseitiger Arbeit bedürfen. Bei näherer Überlegung erkennen wir nämlich bald, daß die Frage der Widerspruchslosigkeit bei den ganzen Zahlen und Mengen nicht eine für sich alleinstehende ist, sondern einem großen Bereiche schwierigster erkenntnistheoretischer Fragen von spezifisch mathematischer Färbung angehört: ich nenne, um diesen Bereich von Fragen kurz zu charakterisieren, das Problem der prinzipiellen *Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage*, das Problem der nachträglichen *Kontrollierbarkeit* des Resultates einer mathematischen Untersuchung, ferner die Frage nach einem *Kriterium für die Einfachheit* von mathematischen Beweisen, die Frage nach dem

Verhältnis zwischen *Inhaltlichkeit und Formalismus* in Mathematik und Logik und endlich das Problem der *Entscheidbarkeit* einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen.

Wir können uns nun nicht eher mit der Axiomatisierung der Logik zufrieden geben, als bis alle Fragen dieser Art in ihrem Zusammenhange verstanden und aufgeklärt sind.

Unter den genannten Fragen ist die letzte, nämlich die Frage nach der *Entscheidbarkeit* durch eine endliche Anzahl von Operationen die bekannteste und die am häufigsten diskutierte, weil sie das Wesen des mathematischen Denkens tief berührt.

Ich möchte das Interesse für sie zu vermehren suchen, indem ich auf einige speziellere mathematische Probleme hinweise, in denen sie eine Rolle spielt.

In der Theorie der *algebraischen Invarianten* gilt bekanntlich der Fundamentalsatz, daß es stets eine endliche Anzahl von ganzen rationalen Invarianten gibt, durch die sich alle übrigen solchen Invarianten in ganzer rationaler Weise darstellen lassen. Der erste von mir angegebene allgemeine Beweis für diesen Satz befriedigt, wie ich glaube, unsere Ansprüche, was Einfachheit und Durchsichtigkeit anlangt, vollauf; es ist aber unmöglich, diesen Beweis so umzugestalten, daß wir durch ihn eine angebbare Grenze für die Anzahl der endlich vielen Invarianten des vollen Systems erhalten oder gar zur wirklichen Aufstellung derselben gelangen. Es sind vielmehr ganz anders geartete Überlegungen und neue Prinzipien notwendig gewesen, um zu erkennen, daß die Aufstellung des vollen Invariantensystems lediglich Operationen erfordert, deren Anzahl endlich ist und unterhalb einer vor der Rechnung angebbaren Grenze liegt.

Das gleiche Vorkommnis bemerken wir an einem Beispiel aus der *Flächentheorie*. In der Geometrie der Flächen vierter Ordnung ist es eine fundamentale Frage, aus wie vielen von einander getrennten Mänteln eine solche Fläche höchstens bestehen kann.

Das Erste bei der Beantwortung dieser Frage ist der Nachweis, daß die Anzahl der Flächenmäntel endlich sein muß; dieser kann leicht auf funktionentheoretischem Wege, wie folgt, geschehen. Man nehme das Vorhandensein unendlich vieler Mäntel an und wähle dann innerhalb eines jeden durch einen Mantel begrenzten Raumteiles je einen Punkt aus. Eine Verdichtungsstelle dieser unendlich vielen ausgewählten Punkte würde dann ein Punkt von solcher Singularität sein, wie sie für eine algebraische Fläche ausgeschlossen ist.

Dieser funktionentheoretische Weg führt auf keine Weise zu einer oberen Grenze für die Anzahl der Flächenmäntel; dazu bedarf es vielmehr gewisser Überlegungen über Schnittpunktsanzahlen, die dann schließ-

lich lehren, daß die Anzahl der Mäntel gewiß nicht größer als 12 sein kann.

Die zweite von der ersten gänzlich verschiedene Methode läßt sich ihrerseits nicht dazu anwenden und auch nicht so umgestalten, daß sie die Entscheidung ermöglicht, ob eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit 12 Mänteln wirklich existiert.

Da eine quaternäre Form 4^{ter} Ordnung 35 homogene Koeffizienten besitzt, so können wir uns eine bestimmte Fläche 4^{ter} Ordnung durch einen Punkt im 34-dimensionalen Raume veranschaulichen. Die Diskriminante der quaternären Form 4^{ter} Ordnung ist vom Grade 108 in den Koeffizienten derselben; gleich Null gesetzt, stellt sie demnach im 34-dimensionalen Raume eine Fläche 108^{ter} Ordnung dar. Da die Koeffizienten der Diskriminante selbst bestimmte ganze Zahlen sind, so läßt sich der topologische Charakter der Diskriminantenfläche nach den Regeln, die uns für den 2- und 3-dimensionalen Raum geläufig sind, genau feststellen, so daß wir über die Natur und Bedeutung der einzelnen Teilgebiete, in die die Diskriminantenfläche den 34-dimensionalen Raum zerlegt, genaue Auskunft erhalten können. Nun besitzen die durch Punkte des nämlichen Teilgebietes dargestellten Flächen 4^{ter} Ordnung gewiß alle die gleiche Mäntelzahl, und es ist daher möglich, durch eine endliche, wenn auch sehr mühsame und langwierige Rechnung, festzustellen, ob eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit $n \leq 12$ Mänteln vorhanden ist oder nicht.

Die eben angestellte geometrische Betrachtung ist also ein dritter Weg zur Behandlung unserer Frage nach der Höchstzahl der Mäntel einer Fläche 4^{ter} Ordnung. Sie beweist die Entscheidbarkeit dieser Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen. Prinzipiell ist damit eine bedeutende Förderung unseres Problems erreicht: dasselbe ist zurückgeführt auf ein Problem von dem Range etwa der Aufgabe, die $10^{(10^{10})}$ Ziffer der Dezimalbruchentwicklung von π zu ermitteln — einer Aufgabe, deren Lösbarkeit offenbar ist, deren Lösung aber unbekannt bleibt.

Vielmehr bedurfte es einer von Rohn ausgeführten tiefgehenden schwierigen algebraisch-geometrischen Untersuchung, um einzusehen, daß bei einer Fläche 4^{ter} Ordnung 11 Mäntel nicht möglich sind; 10 Mäntel dagegen kommen wirklich vor. Erst diese vierte Methode bringt somit die völlige Lösung des Problems.

Diese speziellen Ausführungen zeigen, wie verschiedenartige Beweismethoden auf dasselbe Problem anwendbar sind, und sollen nahelegen, wie notwendig es ist, das Wesen des mathematischen Beweises an sich zu studieren, wenn man solche Fragen, wie die nach der Entscheidbarkeit durch endlich viele Operationen mit Erfolg aufklären will.

Alle solchen prinzipiellen Fragen, wie ich sie vorhin charakterisierte

und unter denen die eben behandelte Frage nach der Entscheidbarkeit durch endlich viele Operationen nur die letztgenannte war, scheinen mir ein wichtiges, neu zu erschließendes Forschungsfeld zu bilden, und zur Eroberung dieses Feldes müssen wir — das ist meine Überzeugung — den Begriff des spezifisch mathematischen Beweises selbst zum Gegenstand einer Untersuchung machen, gerade wie ja auch der Astronom die Bewegung seines Standortes berücksichtigen, der Physiker sich um die Theorie seines Apparates kümmern muß und der Philosoph die Vernunft selbst kritisiert.

Die Durchführung dieses Programms ist freilich gegenwärtig noch eine ungelöste Aufgabe.

Zum Schlusse möchte ich in einigen Sätzen meine allgemeine Auffassung vom Wesen der axiomatischen Methode zusammenfassen.

Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegender Schichten von Axiomen im vorhin dargelegten Sinne gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewußt. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt.