

RÉDACTION N° 194

COTE : NBR 096

**TITRE : LIVRE II - ALGÈBRE
CHAPITRE IX : GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (ÉTAT 3)
OU CONDENSÉ DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE**

ASSOCIATION DES COLLABORATEURS DE NICOLAS BOURBAKI

NOMBRE DE PAGES : 82

NOMBRE DE FEUILLES : 82

M. Samuel
Février 1954

N 32 1096

1942

LIVRE II

ALGÈBRE

CHAPITRE IX.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (Etat 3).

ou CONDENSÉ de GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Commentaires du rédacteur.

Le rédacteur est effrayé par la longueur de ce chapitre. Malgré la rédaction à l'état d'esquisses de tous les sorites et de presque toutes les démonstrations, la rédaction dépasse 70 pages, ce qui est la longueur normale d'un gros chapitre rédigé avec tous les détails par le présent rédacteur ; celui-ci se demande donc ce qu'il adviendra du présent chapitre lorsqu'il sera rédigé en style canonique. Il plaint sincèrement son malheureux successeur.

On s'est efforcé, surtout en ce qui concerne les Géométries projective et affine, de se placer nettement au service des usagers (géomètres algébriques par exemple). On a donc traité, avec pas mal de détails, la théorie des projections en géométrie projective, et dit ce qu'il est indispensable de savoir sur les Grassmanniennes et variétés de Segre ; à titre d'introduction aux coordonnées de Chow, on a défini la "forme associée" d'une variété linéaire. En Géométrie affine on a introduit le calcul des "points massifs et vecteurs" (de Schwartz), qui marche fort bien, et qui donne aisément le plongement canonique d'un espace affine dans un espace projectif.

La théorie des espaces affines sur un corps ordonné (convexité, polyèdres) a été réduite à sa plus simple expression. On a adopté une notion ultra générale d'orientation, qui a l'air de couvrir tous les cas connus.

- 11 -

La Géométrie euclidienne a été découpée en 4 paragraphes, ce qui n'est guère "gleichberechtigt" ; mais, autrement, on ne voit pas où l'on va. Dans les exemples (c'est à dire les cas de dimensions 2, 4 et 3) on s'est efforcé de traiter simultanément les divers cas tenant aux valeurs de l'indice de la forme métrique ; en réalité cette méthode est surtout adaptée au cas de l'indice 0. On a donné diverses caractérisations des isométries et similitudes, vu que c'est joli et pas difficile. Le rédacteur est ravi d'avoir enfin compris ce que c'est qu'une bissectrice intérieure en géométrie plane, et d'avoir vu que cette théorie n'est qu'un cas particulier du théorème normique n°90 de Hilbert (c'est à dire de la cohomologie !) ; afin de ne pas rendre jalouses les géométries euclidiennes de dimensions 4 et 3, on les a basées sur le th. de Skolem-Noether. Le rédacteur a été ravi également de s'apercevoir que, dans les cas de basses dimensions, les sous-espaces totalement isotropes sont en réalité des idéaux.

La justification (ou plutôt la défense) du point de vue adopté (qui est le point de vue "fibroïde" adopté par Chevalley dans l'état 2) est donnée au début du § 1. Le point de vue "traduction de résultats algébriques" (qui est, et pour cause, prépondérant dans les démonstrations) me semble tout à fait insuffisant, car il ne tient aucun compte des motivations de nature dite "géométrique".

On trouvera à la fin de la rédaction une liste de sujets qui furent traités dans les états précédents, et sur lesquels Bourbaki ne semble avoir pris aucune décision. Le rédacteur a donné son avis quant au bien fondé de leur insertion dans le texte.

Sommaire

- § 1 - Notion de structure géométrique.
 - 1 - Définitions et exemples.
 - 2 - Isomorphismes et invariants.
 - 3 - Augmentation du groupe G .
- § 2 - Géométrie projective.
 - 1 - Définitions.
 - 2 - Variétés linéaires dans un espace projectif.
 - 3 - Projections.
 - 4 - Birapport.
 - 5 - Géométrie projective plane.
 - 6 - Grassmanniennes.
 - 7 - Variétés de Segre et de Veronese.
- § 3 - Géométrie affine.
 - 1 - Opérations dans un espace affine.
 - 2 - Variétés linéaires affines.
 - 3 - Produits et quotients d'espaces affines.
 - 4 - Applications affines.
 - 5 - Homothéties.
 - 6 - Immersion de l'espace affine dans l'espace projectif.
- § 4 - Géométrie affine sur un corps ordonné. Orientation.
 - 1 - Espaces affines sur un corps ordonné.
 - 2 - Orientation.
 - 3 - Secteurs angulaires.
- § 5 - Figures en Géométrie Euclidienne.
 - 1 - Définition de la Géométrie Euclidienne.
 - 2 - Perpendicularité.
 - 3 - Sorité.
 - 4 - Hyperplans médiateurs et bissecteurs.
 - 5 - Sphères.
- § 6 - Transformations en Géométrie Euclidienne.
 - 1 - Isométries et symétries.
 - 2 - Similitudes.
 - 3 - Inversions.
- § 7 - Espaces euclidiens parfaits.
 - 1 - Généralités.
 - 2 - Cas d'un corps ordonné pythagoricien.
- § 8 - Géométrie euclidienne plane. Angles.
 - 1 - Rotations et similitudes.
 - 2 - Angles de droites. Tangente.
 - 3 - Angles de droites pointées. Sinus et cosinus.
 - 4 - Cas d'un corps ordonné. Angles de demi-droites. Secteurs.
 - 5 - Angle inscrit et angle au centre.
 - 6 - Angles dans les espaces euclidiens parfaits.
 - 7 - Généralisation quaternionique et multidimensionnelle.

5
- d -

Divers, à ajouter ou à ne pas ajouter.

Interprétation projective de la Géométrie Euclidienne.

Géométrie non euclidienne.

Géométrie pentasphérique, etc.

Géométrie euclidienne de dim.6 et d'indice 3 .

Octaves de Cayley, etc.

Géométrie hermitienne.

Le théorème fondamental de la Géométrie Projective.

Géométrie symplectique.

- 1 -

CONDENSÉ de GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

§ 1 - NOTION de STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE.

1 - Définitions et exemples.

Un profond penseur a dit un jour que "la Géométrie est de l'Algèbre qu'on connaît bien", mais, malgré la justesse de cette définition, il faut à Bourbaki une définition de caractère moins psychologique, et qui puisse, si possible, s'énoncer en termes mathématiques, ou, au moins, métamathématiques.

Une première définition possible est : une géométrie élémentaire est la théorie d'un espace homogène d'un groupe linéaire (cf. état 1). Dans certains cas simples (espaces projectifs, affines et euclidiens) ça marche très bien. Mais le groupe est déjà un peu plus caché lorsqu'on se propose d'étudier une grassmannienne, ou la paire formée d'un plan projectif et d'une conique ; et il l'est bien plus encore dans la théorie des faisceaux de cercles, par exemple. D'autre part la phrase si utile "Prenons un système de coordonnées tel que ..." ne reçoit pas de sens dès le début de la théorie.

Une autre définition, souvent utilisée, est la suivante : étude d'un ensemble structuralement défini à partir d'un espace vectoriel. Ceci marche très bien pour les espaces projectifs et les grassmanniennes. Mais cette définition me semble impliquer que l'on doive donner, pour définir les espaces affines ou euclidiens, une primauté injustifiée aux espaces projectifs. Et il y a plus grave : l'on rencontre, par exemple, de nombreux ensembles à qui l'on désire donner le nom d'espaces projectifs et appliquer la théorie de ces espaces, mais qui ne se présentent pas de façon canonique (ou immédiate) comme quotients de vectoriels (moins 0) par la relation d'équivalence bien connue : il suffit de citer l'ensemble des

variétés linéaires de dimension q d'un espace projectif qui passent par une variété linéaire donnée de dimension $q-1$, ou l'ensemble des diviseurs positifs d'une variété qui sont linéairement équivalent à un diviseur donné.

C'est pourquoi nous adoptons la définition donnée dans l'état 2 .

On considère un vectoriel V (muni éventuellement de structures additionnelles) sur un corps K , un terme structurant E quelque part dans l'échelle des types de V et K , et un groupe structurant G de permutations de E . On considère aussi un ensemble E' et une famille non vide R d'applications biunivoques de E sur E' telles que, pour tout $g \in G$, les relations " $r \in R$ " et " $r \circ g \in R$ " soient équivalentes. Telle est une structure que nous qualifierons de structure géométrique. Etant donnée une espèce de structure géométrique, on donne en général un nom distinctif aux ensembles E' munis d'une structure de cette espèce (p.ex. "espace affine", "grassmannienne",...) ; disons "un truc". Alors on peut prendre $E' = E$, $R = G$, et ainsi E (qui est déterminé de façon unique par V, K et l'espèce de structure) est un "truc", appelé le "truc standard" (relatif à V et K). Les applications r de R sont appelées les repères. Notons que, pour définir une structure géométrique sur E' , il suffit de se donner V, K, E, G, E' et un repère ; c'est pourquoi nous ne mentionnerons pas E' et R dans les exemples :

Exemple 1 - Espace affine. Ici E est le vectoriel V lui-même, et G est l'ensemble des applications $x \rightarrow a + u(x)$ ($a \in V$, u : automorphisme de G) (groupe engendré par les automorphismes de V et ses translations).

Exemple 2 - Espace projectif. Ici $\dim(V) \geq 1$ et E est le quotient de V (ou plutôt du complément de (0) dans V) par la relation d'équivalence "il existe $a \in K$ tel que $x = a.y$ " ; et G est le quotient du groupe $\text{Aut}(V)$

des automorphismes de V qui opère effectivement sur E (c.à.d. $\text{Aut}(V)/\text{homothéties centrales}$ lorsque $n \geq 2$).

Exemple 3 - Espace euclidien. Ici V est muni d'une forme quadratique f , l'on a $E = V$, et G est l'ensemble des applications $x \rightarrow a + u(x)$ ($a \in V$, u : automorphisme de V laissant f invariante).

On remarquera que l'on peut prendre pour V l'espace "numérique" K^n ; les repères sont alors appelés repères numériques ou systèmes de coordonnées. Cette méthode marche d'ailleurs pour la définition d'un espace vectoriel E' : on prend $E = K^n$ et pour G le groupe des matrices inversibles (a_{ij}) sur K opérant par $(x_i) \rightarrow (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)$ sur K^n ; la donnée d'un repère $r : K^n \rightarrow E'$ équivaut à celle d'une base de E' . D'autre part, étant donnée une structure géométrique (V, K, E, G, E', R) sur E' telle que G contienne l'extension canonique du groupe des automorphismes de V (c'est le cas lorsque E' est un espace affine ou projectif), // l'on peut, par composition des repères, définir sur E' une structure de même espèce $(K^{\dim(V)}, K, E_n, G_n, E', R_n)$ qui est isomorphe (cf. § 2) à la structure donnée. Lorsque la condition ci-dessus n'est pas remplie par G (p. ex. pour un espace euclidien), on utilise, à la place du groupe de toutes les matrices inversibles, un sous-groupe convenable. C'est dans la situation qui vient d'être décrite qu'on se place lorsqu'on profère la phrase fatidique "prenons un système de coordonnées tel que la droite de l'infini soit tangente d'inflexion"

2 - Isomorphismes et invariants.

Dans la définition des isomorphismes de structures géométriques le corps K est un ensemble de base privilégié : un fameux théorème (de Schwartz, évidemment) montre en effet que le passage au complexe conjugué n'est pas une homographie. Etant donné un isomorphisme

$(V, K, E, G, E') \longrightarrow (V_1, K, E_1, G_1, E'_1)$, il a les deux propriétés suivantes :

a) C'est un isomorphisme $(V, K, E, G) \longrightarrow (V_1, K, E_1, G_1)$ pour les structures standard sous jacentes.

b) Les bijections $E \longrightarrow E_1$, $E' \longrightarrow E'_1$ "commutent avec les repères", c.à.d. étant donné un repère $r: E \longrightarrow E'$, il existe un repère $r_1: E_1 \longrightarrow E'_1$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \xrightarrow{\quad} & E'_1 \end{array}$$

soit commutatif.

Réciproquement, étant donné un isomorphisme des structures standard $(V, K, E, G) \longrightarrow (V_1, K, E_1, G_1)$, celui-ci se prolonge en un isomorphisme des structures géométriques : on se donne deux repères r et r_1 et on choisit la bijection $E' \longrightarrow E'_1$ de telle sorte que le diagramme ci-dessus soit commutatif ; alors, pour tout $g \in G$, les bijections $E \longrightarrow E_1$ et $E' \longrightarrow E'_1$ commutent avec les repères $r \circ g$ et $r_1 \circ g_1$ (g_1 correspondant à g par l'isomorphisme $G \longrightarrow G_1$) ; autrement dit la condition b) est satisfaite.

Lorsque la bijection $E' \longrightarrow E'_1$ est l'application identique (alors $E' = E'_1$), on dit que l'isomorphisme en question est une équivalence et que les deux structures géométriques sur E' sont équivalentes. On obtient, par exemple, une équivalence lorsqu'on remplace V par l'espace numérique K^n (cf. n°1).

Voici un important exemple d'automorphismes. Etant donnée la structure géométrique (V, K, E, G, E', R) , l'on transporte le groupe de permutation G de E à E' (plus précisément, on choisit un repère $r \in R$, l'on considère l'ensemble des $r \circ g \circ r^{-1}$ où $g \in G$; cet ensemble est indépendant du choix de r d'après la condition sur les repères). L'on obtient ainsi un groupe G' de permutations de E' . Un élément de ce groupe, joint aux applications identiques de V, K, E, G , est un automorphisme de notre structure (AQT). Ce groupe d'automorphismes G' est appelé le groupe fondamental de E' .

Exemples - Groupe des transformations projectives, groupe des transformations affines, groupes des isométries.

La théorie d'une structure géométrique comprend, comme partie la plus importante, l'étude des termes et relations invariants par le groupe G' . Plus précisément considérons un terme structurant T de l'échelle des types construite sur K et E qui soit invariant par G (plus précisément ... application identique de K ... extension canonique ...) ; un tel terme est dit un invariant structural de G .

Exemple - Parmi les sous-groupes structurants de G , ceux qui sont des invariants structuraux sont les sous-groupes invariants.

Le transporté $r(T)$ à l'échelle de K et E' (r : extension canonique d'un repère) d'un tel invariant structural ne dépend pas du repère choisi et est invariant par G' . Un tel terme $r(T)$ satisfait aux deux conditions

- a) Il appartient à l'échelle construite sur K et E' (à l'exclusion de V).
- b) Il est structurant.

Réciproquement un terme T' satisfaisant à ces conditions est invariant par G' puisqu'il est structurant, et provient donc d'un invariant structural T de G . Un tel terme T' est dit intrinsèque.

Un terme intrinsèque peut fort bien faire appel, dans sa définition, aux ensembles E et V : par exemple le terme "l'ensemble des hyperplans de l'espace projectif E' ". Il lui suffit de vérifier a) et b).

On dit qu'une relation R est intrinsèque si elle peut s'obtenir comme suit : on part d'une relation structurante R_1 telle que les types des lettres $X_1, \dots, X_q$ qui y figurent appartiennent à l'échelle construite sur K et E' seuls, et on y remplace les X_i par des termes intrinsèques T_i de mêmes types. Une telle ~~mm~~ relation est invariante par G' .

On voit aussitôt qu'un terme ou une relation intrinsèque est inchangé par les équivalences.

Sauf mention expresse (ou évidence immédiate) du contraire, tous les termes et relations introduits dans ce chapitre seront intrinsèques.

3 - Augmentation du groupe G .

Considérons un ensemble E' muni d'une structure géométrique (V, K, E, G, E', R) et un groupe de permutations structurant G_1 de E qui contienne G . Alors l'ensemble E' peut être muni d'une structure géométrique (V, K, E, G_1, E', R_1) moins riche que la structure donnée et admettant G_1 pour groupe : on prend pour R_1 l'ensemble $r \circ G_1$, où r est un repère arbitrairement choisi dans R ; comme G est un sous-groupe de G_1 , R_1 ne dépend pas de r ; et R_1 est évidemment un ensemble de repères. Cette structure géométrique est dite induite par la structure donnée.

Exemple - Une structure d'espace euclidien sur E' y induit une structure d'espace affine.

Réciproquement, étant donnée une structure géométrique (V, K, E, G_1, E', R_1) sur E' , on peut l'enrichir en une structure de groupe G , mais de façon non unique : étant donné $r_1 \in R_1$, on prend $R = r_1 \circ G$. Deux éléments r_1, r_1' de R_1 donnent la même structure enrichie (c.à.d. le même R) si et seulement si l'élément $r_1^{-1} \circ r_1'$ de G_1 appartient à G . Le groupe fondamental G' de la structure enrichie est $r_1 \circ G \circ r_1^{-1}$; il est indépendant de r_1 si et seulement si G est un sous-groupe invariant de G_1 .

§ 2 - GÉOMETRIE PROJECTIVE.

1 - Définitions.

Etant donné un espace vectoriel V de dimension ≥ 1 sur un corps K , l'espace projectif standard E attaché à V est le quotient du complément V^* de (0) dans V par la relation d'équivalence "il existe $a \in K$ tel que $y = a.x$ ". Le groupe G est le quotient du groupe $\text{Aut}(V)$ des automorphismes de V qui opère effectivement sur E (c.à.d. (1) si $\dim(V)=1$, et $\text{Aut}(V)/\text{homoth. centrales}$ si $\dim(V) \geq 2$). Un espace projectif attaché à V est un ensemble E' muni d'une famille R de bijections de E sur E' telles que :

- a) R est non vide.
- b) Pour $g \in G$, les relations $r \in R$ et $rog \in R$ sont équivalentes (autrement dit $R = G \circ R$).

Les éléments de R sont appelés les repères de E' .

L'entier $\dim(V)-1$ est un invariant structural de G ; on l'appelle la dimension de l'espace projectif E' . Un espace projectif de dimension 0 est réduit à un point. Droite projective, plan projectif.

Lorsque K est un corps fini à q éléments, le nombre d'éléments d'un espace projectif E' de dimension n sur K est $(q^{n+1}-1)/(q-1)$. Le nombre d'éléments de $\text{Aut}(V)$ est $(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q) \dots (q^{n+1}-q^{n-1})(q^{n+1}-q^n)$, et (comme K est alors commutatif) celui de G est $q^{n(n+1)/2} \cdot (q^2-1)(q^3-1) \dots (q^{n+1}-1)$ (polynôme de degré n^2+2n).

Le groupe fondamental G' de E' (transporté de G par R) est appelé le groupe des transformations projectives de E' .

Lorsque V est l'espace numérique K^{n+1} et E l'espace projectif standard associé, tout système $(x_0, \dots, x_n)$ de $n+1$ éléments non tous nuls

de K détermine un point $\bar{x}$ de E , à savoir la classe d'équivalence du point $(x_0, \dots, x_n)$ de K^{n+1} ; un tel système est appelé un système de coordonnées homogènes de $\bar{x}$. Pour que deux systèmes $(x_i), (y_i)$ de $n+1$ quantités non toutes nulles de K soient des systèmes de coordonnées homogènes du même point de E , il faut et il suffit qu'il existe un élément non nul a de K tel que $x_i = ay_i$ pour $1 \leq i \leq n+1$.

Plus généralement, étant donné un anneau commutatif unitaire A , on peut considérer l'ensemble V des systèmes de $n+1$ éléments $(x_0, \dots, x_n)$ de A tels que les x_i ne soient pas tous des diviseurs de zéro; alors la relation "il existe des éléments a et b de A , non diviseurs de zéro tels que $ax_i = by_i$ pour tout i " est une relation d'équivalence entre éléments $(x_i), (y_i)$ de V . Le quotient de V par cette relation d'équivalence est appelé l'espace projectif standard de dimension n sur A . Remarquons que l'anneau A et son anneau de fractions donnent le même espace projectif. Remarquons aussi que tout point $\bar{x}$ de l'espace projectif standard de dimension 1 sur un anneau A qui est son propre anneau de fractions admet un système de coordonnées homogènes qui est de la forme $(1, x)$ ou $(y, 1)$ (y étant un diviseur de zéro); ces deux cas s'excluent, et l'élément x (ou y selon le cas) de A est déterminé de façon unique par $\bar{x}$. Ainsi l'anneau A s'identifie à un sous-ensemble de cet espace projectif A' (savoir l'ensemble des classes des $(1, x)$); les éléments du complément A'' de A dans A' sont appelés éléments à l'infini. On prolonge partiellement à A' les lois de composition de A au moyen de : $x+x'' = x''$ ($x \in A, x'' \in A''$), $x''+y''$ non défini pour $x'', y'' \in A''$.

$(1, a) \cdot (b, 1)$ (b diviseur de zéro) $= (b/a, 1)$ si a n'est pas diviseur de zéro (il est alors inversible), - non défini autrement.

- 9 -

$$(b,1).(c,1) = (bc,1).$$

$$(1,a)^{-1} = (a,1), (a,1)^{-1} = (1,a) \text{ pour un diviseur } a \text{ de zéro.}$$

Muni de cette structure l'ensemble A' est appelé l'anneau projectif associé à A (si A est un anneau commutatif quelconque on appelle anneau projectif associé à A l'anneau projectif attaché à l'anneau des fractions de A). Lorsque A est un corps, l'anneau projectif A' contient un seul élément en dehors de A ; cet élément est noté ∞ ; et A' prend le nom de corps projectif.

Repérage d'un point d'une droite projective par un élément du corps projectif.

2 - Variétés linéaires dans un espace projectif.

Le complément de (0) dans un sous-espace vectoriel W d'un vectoriel E est saturé par rapport à la relation d'équivalence "il existe a non nul dans K tel que $y=ax$ " ; l'image canonique F d'un tel ensemble dans l'espace projectif standard E attaché à V est appelée une variété linéaire de E ; et l'image de F par n'importe quel repère dans un espace projectif E' attaché à V est appelée une variété linéaire de E' .

Notons que la relation " F' est une variété linéaire de E' " est intrinsèque.

Il est clair que F est un espace projectif standard (ou plutôt est canoniquement identifiable à un ; cf. quotient d'un sous-truc) ; donc F' est un espace projectif (attaché à W ; attention, il y a moins de repères). On peut donc parler de la dimension de F' ($= \dim(W)-1$). Une variété linéaire de dimension $n-1$ d'un espace projectif E' de dimension n est appelée un hyperplan de E' .

Dans l'espace projectif standard E attaché à K^{n+1} il existe, pour toute variété linéaire F de E (resp. pour toute variété linéaire de dimension d de E) un système d'équations homogènes (resp. un système de $n-d$ équations homogènes linéairement indépendantes) $(\sum_{i=0}^n x_i a_{ij} = 0)$ tel que les points de F soient ceux dont un système de coordonnées homogènes (x_i) satisfait ce système ; alors tous les systèmes de coordonnées homogènes de ce point satisfont ce système ; un tel système est appelé un système d'équations de F . Etant donné un espace projectif E' attaché à K^{n+1} , une variété linéaire F' de E' et un repère (ou système de coordonnées projectives) $r: E \rightarrow E'$, l'ensemble $r^{-1}(F')$ est une variété linéaire de E , et un système d'équations homogènes de $r^{-1}(F')$ est appelé un système d'équations homogènes de F' dans le système de coordonnées projectives r . Un hyperplan peut être défini par une seule équation $\sum_{i=0}^n x_i a_i = 0$ (non identiquement nulle).

Noter qu'on met les coefficients des équations à droite des variables.

En termes plus intrinsèques un hyperplan H de l'espace projectif standard E est défini par l'annulation d'une forme linéaire (non nulle) sur V ; et deux formes linéaires f, f' définissent le même hyperplan si et seulement s'il existe a non nul dans K tel que $f' = f.a$. Autrement dit l'ensemble des hyperplans de E s'identifie canoniquement à l'espace projectif attaché à l'espace vectoriel (à droite) dual de V ; cet ensemble a donc une structure d'espace projectif (à droite) ; on l'appelle l'espace projectif dual de E . Cet espace étant un invariant structural de G , l'ensemble des hyperplans d'un espace projectif quelconque E' est encore un espace projectif, appelé le dual de E' . Il y a un bidual, canoniquement isomorphe à l'espace initial. Faisceaux et réseaux d'hyperplans.

Etant donnée une famille $(x^{(i)})$ d'éléments non nuls d'un vectoriel V , la relation " $(x^{(i)})$ est linéairement libre (resp. liée)" est compatible avec la relation d'équivalence bien connue. Elle définit donc une relation entre les images canoniques $\bar{x}^{(i)}$ des $x^{(i)}$ dans l'espace projectif standard E , et donc une relation entre éléments $y^{(i)}$ de n'importe quel espace projectif attaché à V ; cette relation s'énonce "la famille $(y^{(i)})$ est projectivement libre "(resp. liée)".

Toute intersection de variétés linéaires d'un espace projectif E' est une variété linéaire. Réciproquement toute variété linéaire de E' est intersection d'hyperplans. Etant donné une partie A de E' (ou une famille d'éléments de E'), il existe une plus petite variété linéaire contenant A , à savoir l'intersection de toutes les variétés linéaires contenant A ; on dit que cette variété linéaire est engendrée par A . La variété linéaire engendrée par la réunion $A \cup B$ de deux variétés linéaires, est la réunion des droites s'appuyant sur A et B .

Pour une famille $(x^{(i)})$ de points de coordonnées homogènes $(x_j^{(i)})$, la variété linéaire engendrée par cette famille est l'ensemble des points de coordonnées homogènes de la forme $y_j = \sum_i a^{(i)} x_j^{(i)}$ ($0 \leq j \leq n$) ($a^{(i)} \in K$). Lorsque la famille $(x^{(i)})$ est projectivement libre les coefficients $a^{(i)}$ sont déterminés de façon unique, à un facteur non nul près, par le point de coordonnées homogènes (y_j) ; et ces coefficients peuvent prendre des valeurs arbitraires à l'exception du cas où ils sont tous nuls; on dit alors que les formules $y_j = \sum_i a^{(i)} x_j^{(i)}$ constituent une représentation paramétrique de la variété linéaire engendrée par la famille libre $(x^{(i)})$.

- 12 -

Une famille $(x^{(i)})$ de points d'un espace projectif E' est dite totale si elle engendre E' . Une famille à la fois libre et totale s'appelle une base projective de E' . Une base de E' correspond à une base du vectoriel V . Par conséquent les notions suivantes sont coextensives : base ; famille libre maximale ; famille totale minimale ; famille libre à $\dim(E')+1$ éléments, famille totale à $\dim(E')+1$ éléments. En particulier une base projective de E' a $\dim(E')+1$ éléments. On peut compléter une famille libre en une base en puisant dans un système total. Et l'âne trotte avec délices dans un champ de traductions triviales. La donnée d'une base de E' ne détermine pas un système de coordonnées : il faut, en plus, se donner (presqu'arbitrairement) le "point unité" de coordonnées homogènes $(1,1,\dots,1)$, et ça suffit dans le cas commutatif.

Il y a autant de bases de E' que d'éléments dans G' , soit $q^{n(n+1)/2} \cdot (q^2-1) \dots (q^{n+1}-1)$.

Soient A, B deux variétés linéaires d'un espace projectif E' et C la variété linéaire engendrée par A et B . Une formule bien connue d'algèbre linéaire donne, après qu'on retranche 2 à ses deux membres :

$$(1) \quad \dim(A) + \dim(B) = \dim(C) + \dim(A \cap B).$$

(Cette formule est vraie sans restrictions si l'on considère $\emptyset$ comme une variété linéaire de dimension -1). En particulier, si $\dim(A) + \dim(B) \geq \dim(E')$, l'intersection de A et B est non vide.

Etant donnée une variété linéaire A de dimension r d'un espace projectif E (zut pour les primes) de dimension n , l'ensemble des variétés linéaires B de dimension $r+1$ contenant A a une structure d'espace projectif de dimension $n-r-1$ (On se ramène au cas standard ; alors E est associé à un vectoriel V de dimension $n+1$, et A à un sous-espace W de

dimension $r+1$; les variétés linéaires B correspondent aux droites de V/W). Cet espace projectif (toujours à gauche) est appelé la gerbe de A .

La formation de la gerbe de A est presque une formation d'espace projectif quotient ; en fait cette gerbe s'identifie canoniquement à un ensemble quotient du complément de A dans E . C'est ici le plus près qu'on puisse s'approcher d'une notion de quotient ; car il n'y a pas, au sens propre, de quotient raisonnable d'un espace projectif (les variétés algébriques ayant l'habitude d'y avoir, pour un rien, des points communs).

3 - Projections.

Etant donnés deux vectoriels V, V' sur le même corps K , une application linéaire f de V dans V' définit une application du complément du noyau de V dans l'espace projectif standard E' attaché à V' , et cette application est compatible avec la relation d'équivalence bien connue. Ainsi f définit une application g du complément d'une variété linéaire A (correspondant au noyau) de l'espace projectif standard E attaché à V dans E' . Par "déstandardisation" on obtient la notion d'application projective ou projection : une telle application g est définie sur $P-A$ (P :projectif, A :variété linéaire), à valeurs dans un projectif P' ; son image $g(P-A)$ est une variété linéaire A' de P' . Lorsque g est partout définie ($A \neq \emptyset$), c'est un isomorphisme de P sur $g(P)$. Dans le cas général l'image réciproque d'un élément de $g(P-A)$ est le complément de A dans une variété linéaire B de dimension $\dim(A)+1$ passant par A . Ainsi la projection g définit une bijection de la gerbe de A sur $g(P-A)$, et cette bijection est un isomorphisme pour les structures d'espaces projectifs (AQT, et qui remonte aux vectoriels). La variété linéaire A est appelée

le centre de la projection g . L'application canonique de $P-A$ sur la gerbe de A est une projection de centre A , dite projection canonique de centre A . Composée de deux projections. Formules linéaires quant on a des systèmes de coordonnées. Donnée sur base plus un point.

Bien qu'une projection g ne soit pas partout définie en général, on dit cependant, par abus de langage, que g est une projection (ou une application projective) de P dans P' , et, X désignant une partie de P , on appellera projection de X par g et on notera $g(X)$ l'ensemble $g(X - (X \cap A))$.

Etant donnée une projection g de P dans P' de centre A , la projection $g(L)$ d'une variété linéaire L de P est une variété linéaire de P' , et est égale à $g(M)$, M désignant la variété linéaire engendrée par A et L (qui est aussi la réunion des variétés linéaires de dimension $\dim(A)+1$ passant par A et s'appuyant sur L). Lorsque M contient le centre A , on a la formule :

$$(2) \quad \dim(g(M)) = \dim(M) - \dim(A) - 1$$

D'où dans le cas général, en utilisant (1) $(n^0 2)$:

$$(3) \quad \dim(g(L)) = \dim(L) - \dim(A \cap L) - 1.$$

Lorsque la variété linéaire L ne rencontre pas le centre de projection A ($A \cap L = \emptyset$), g induit un isomorphisme de L sur $g(L)$ (la formule (3) marche grâce à $\dim(\emptyset) = -1$). Conservation, par projection, de la notion de variété linéaire engendrée.

Etant donnée une variété linéaire A du projectif P , et une variété linéaire B de P de dimension $\dim(P) - \dim(A) - 1$ qui ne rencontre pas A (c'est le cas en général), alors $A \cup B$ engendre P $((1), n^0 2)$, et toute variété linéaire M de dimension $\dim(A)+1$ passant par A rencontre B en un point et un seul. On obtient ainsi une bijection de la gerbe

de A sur B , et cette bijection est un isomorphisme. En composant cet isomorphisme avec la projection canonique de P sur la gerbe de A , on obtient une projection g de P sur B , appelée la projection géométrique de P sur B de centre A . Cette projection induit un isomorphisme sur B de toute variété linéaire B' de dimension $\dim(P) - \dim(A) - 1$ qui ne rencontre pas A .

Réciproquement, étant données deux variétés linéaires B, B' de même dimension dans un espace projectif P et un isomorphisme i de B' sur B , on peut se demander si i est induit par une projection géométrique g de P sur B . Pour qu'il en soit ainsi il faut que l'on ait $i(x) = x$ pour tout $x \in B \cap B'$. Et cette condition est aussi suffisante (On remarque d'abord que, pour qu'une projection de P sur B soit géométrique, il suffit (et il faut, évidemment) qu'elle induise l'identité sur B , son centre ayant alors la bonne dimension par (3). Alors la condition implique que les relations $h(x) = x$ pour $x \in B$, $h(y) = i(y)$ pour $y \in B'$ définissent une projection géométrique h de la variété linéaire L engendrée par $B \cup B'$ sur B . Et on étend h à P , par exemple en la composant avec une projection géométrique de P sur L).

Lorsque P est l'espace projectif standard attaché au vectoriel V , et que $V(L)$ désigne le sous-espace vectoriel de V correspondant à la variété linéaire L de P , la projection géométrique de P sur B de centre A correspond au projecteur de V sur $V(B)$ relatif à la décomposition de V en somme directe de $V(A)$ et $V(B)$.

4 - Birapport.

On suppose ici que le corps de base K est commutatif.

Etant donnés trois points A, B, C d'une droite projective (D) et trois points A', B', C' d'une droite projective (D') il existe un isomorphisme f

- 16 -

de (D) sur (D') tel que $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$: il suffit, par exemple, de prendre A et B (resp. A' et B') pour points bases et C (resp. C') pour point unité.

On remarquera que la détermination d'un système de coordonnées par points bases et point unité ne marche que sur un corps commutatif : sur un corps non commutatif les coordonnées homogènes d'un point, dans un système où les coordonnées des points bases sont $(1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)$ et celles du point unité $(1,\dots,1)$, ne sont déterminées qu'à un facteur près, non seulement à gauche (ce qui n'est rien), mais encore à droite (ce qui est grave).

Il n'y a donc pas d'invariant projectif de trois points alignés. Par contre, étant donnés quatre points A,B,C,D de (D) , le rapport des coordonnées homogènes de D (première coordonnée/seconde) (C'est un élément du corps projectif K_∞) dans le système admettant A et B pour points bases (dans cet ordre) et C pour point unité est invariant par isomorphismes. On appelle ce rapport le birapport (ou rapport de l'âne à Monique ; au concours : est-ce celui qui trotte ?) de A,B,C,D (dans cet ordre), et on le note (A,B,C,D) .

Dans le cas non commutatif ce rapport de coordonnées (qui est, comme il se doit $(\text{seconde})^{-1}(\text{première})$) n'est déterminé qu'à un automorphisme intérieur près, étant donnée l'indétermination ci-dessus mentionnée du système de coordonnées.

Réciproquement une application f d'une droite projective D sur une droite projective D' qui conserve les birapports est un isomorphisme (comme $f(D)=D'$ et que D' a du moins 3 points, il existe a,b,c sur D tels que $b(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ soient distincts ; et on prend ces 6 points pour points bases et unités).

En particulier considérons quatre éléments a, b, c, d du corps projectif K . Comme K_∞ a une structure de droite projective ($n^0 1$), le birapport des quatre points a, b, c, d est défini ; on l'appelle le birapport des quatre nombres a, b, c, d , et on le note (a, b, c, d) . Pour le calculer remarquons que 0 et ∞ sont points bases et 1 point unité pour le système de coordonnées usuel de K_∞ considéré comme droite projective ; on passe au système de coordonnées utilisé dans la définition du birapport par l'automorphisme f de K_∞ (considéré comme droite projective) défini par $f(a)=0$, $f(b)=\infty$, $f(c)=1$; or un automorphisme de K est de la forme $x \rightarrow (xw+t)^{-1}(xu+v)$ (forme valable aussi dans le cas non commutatif) ; on a donc $f(x)=(c-b)(x-b)^{-1}(x-a)(c-a)^{-1}$.

Dans le cas non commutatif f n'est déterminée qu'à un automorphisme intérieur près par les conditions $f(a)=0, \dots$, - ce qu'on pouvait prévoir après les remarques ci-dessus. D'ailleurs un automorphisme intérieur de K_∞ est un automorphisme pour sa structure de droite projective.

D'où :

$$(4) \quad (a, b, c, d) = (c-b)(d-b)^{-1}(d-a)(c-a)^{-1}.$$

La vérification du fait que cette expression est invariante par les automorphismes $x \rightarrow (xw+t)^{-1}(xu+v)$ n'est pas méchante, mais elle est inutile.

Dans le cas non commutatif l'expression (4) n'est pas invariante, mais subit un automorphisme intérieur, comme de juste.

On remarquera que le birapport de quatre points alignés (ou de quatre nombres) n'est défini que si les trois premiers sont distincts.

Au moyen de (4) on étend cette définition au cas où trois quelconques

des quatre nombres (ou points) sont distincts : il y a douze cas à considérer (dont neuf nouveaux) du genre $(a,a,c,d)=1$, et que mon âne est en train d'écrire ; on n'obtient que les valeurs $0, 1, \infty$. Pour deux nombres distincts, il y a sept cas ; $(a,a,c,c)=1$, $(a,b,a,b)=0$, $(a,b,b,a)=\infty$, les autres indéterminés $((a,b,a,a), \text{etc.})$. Enfin (a,a,a,a) est indéterminé.

Etudions maintenant l'effet sur $t = (a,b,c,d)$ des permutations des 4 nombres a,b,c,d . Quatre des 24 permutations, à savoir (a,b,c,d) , (b,a,d,c) , (d,c,b,a) et (c,d,a,b) , laissent t invariant et ce sont les seules ; elles forment un sous-groupe abélien de type $(2,2)$, et évidemment invariant, du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Le quotient est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$; il opère sans point fixe sur t , et le transforme en : $t, 1-t, 1/t, t-1, t-1/t, 1/1-t$.

On a ainsi un groupe de 6 automorphismes $(X \rightarrow X, 1-X, \dots)$ de l'extension transcendante pure $K(X)$. La fonction rationnelle

$$(5) \quad r(X) = (X^2 - X + 1)^3 / (X+1)^2 (X-2)^2 (2X-1)^2$$

est invariante par ce groupe (AQT). Comme le degré de $K(X)$ sur $K(r(X))$ est 6, la théorie de Galois montre que $K(r(X))$ est le corps des invariants du groupe. Notons que ce groupe est le groupe de tous les K -automorphismes de $K(X)$ lorsque $K = \mathbb{F}_2$.

Certaines valeurs du birapport t sont égales à l'une de leurs 5 transformées ; ce sont : 0 et ses transformées 1 et ∞ , -1 et ses transformées 2 et $1/2$, - les racines de $X^2 - X + 1$, qui sont transformées l'une de l'autre. Dans le premier cas deux des 4 nombres sont confondus ; dans le second cas on dit qu'on a affaire à une division harmonique ; dans le troisième cas on dit qu'on a affaire à une division équi-harmonique.

remarquer que les valeurs du birapport donnant lieu à des divisions harmoniques (resp. équi-anharmoniques) sont les poles (resp. zéros), d'ailleurs doubles (resp. triples) lorsque lesdites valeurs sont répétées deux (resp. trois) fois, - de la miraculeuse fonction rationnelle $r(X)$. L'harmonie de tout ceci prouve l'existence de Dieu, et les canulars non commutatifs prouvent celle du diable. Les cas 1 et 2 (confusion et harmonie) se confondent en caractéristique 2.

Le fait que les variétés linéaires de dimension $r+1$ d'un espace projectif qui passent par une variété linéaire A donnée de dimension r forment un espace projectif (n^02) fait que l'on peut parler du birapport de 4 telles variétés linéaires L_i ($i=1,2,3,4$) si elles sont "alignées", c'est-à-dire contenues dans une même variété linéaire de dimension $r+2$. Alors, étant donnée une variété linéaire B de dimension $n-r-1$ sans point commun avec A , les traces des L_i sur B sont 4 points alignés P_i ; et, comme B est isomorphe à la gerbe de A (n^03), le birapport des P_i est égal à celui des L_i , et est donc indépendant du choix de B ("invariance du birapport par projection géométrique"). Cas particuliers avec hyperplans passant par une variété linéaire de dimension $r-2$, - avec droites concourrantes du plan, - avec plans de l'espace à 3 dimensions, - etc.

5 - Géométrie projective plane.

Le résultat le plus significatif de géométrie projective plane est le théorème de Pascal : soient D et D' deux droites d'un plan projectif sur le corps K , a,b,c trois points de D , a',b',c' trois points de D' , tous distincts du point d'intersection de D et D' ; pour que les points d'intersection p,q,r des couples de droites $(aa',b'b), (bb',c'c), (cc',a'a)$,

$(bb', c'a)$ soient alignés quels que soient a, b, c, a', b', c' , - il faut et il suffit que le corps K soit commutatif.

Démonstration. On prend des coordonnées homogènes (x, y, z) telles que D soit $x=0$, que D' soit $y=0$ et que pq soit $z=0$. Alors a, b, c ont des coordonnées de la forme $(0, a, 1), (0, b, 1), (0, c, 1)$, et a', b', c' des coordonnées de la forme $(a', 0, 1), (b', 0, 1), (c', 0, 1)$ (abus de notations). La droite joignant les points $(0, a, 1)$ et $(a', 0, 1)$ a pour équation $xu'^{-1} + yu'^{-1} - z = 0$. Pour que le point commun aux deux droites $xu'^{-1} + yu'^{-1} - z = 0$ et $xv'^{-1} + yv'^{-1} - z = 0$ soit sur $z=0$, il faut et il suffit que l'on ait $u'v'^{-1} = uv^{-1}$.

Donc les hypothèses "p sur $z=0$ et q sur $z=0$ " s'écrivent " $a'b'^{-1} = ac^{-1}$ et $c'a'^{-1} = cb^{-1}$ ", et la conclusion "r sur $z=0$ " s'écrit " $b'c'^{-1} = ba^{-1}$ ". Or l'hypothèse implique $b'c'^{-1} = ca^{-1}bc^{-1}$; donc la conclusion "p, q, r alignés" équivaut à " $ca^{-1}bc^{-1} = ba^{-1}$ " (quels que soient a, b, c dans K), c.à.d. à la commutativité de K .

Théorème de Desargues : soient a, b, c, a', b', c' 6 points d'un plan projectif ; pour que les droites aa', bb', cc' soient concourrantes, il faut et il suffit que les points d'intersection des couples de droites $(ab, a'b'), (bc, b'c'), (ca, c'a')$ soient alignés. (On remarque que "il suffit" est dual de "il faut" ; pour démontrer "il faut", le plus simple est de projeter une configuration de l'espace). L'intérêt de Desargues est qu'il équivaut à l'associativité de K , mais ceci nous amène en dehors de ce qui doit être fait ici (car nous n'avons jamais défini d'espace vectoriel sur un corps non associatif).

Soient A, B, C trois points non alignés du plan projectif (sur K commutatif), a, b, c des points de BC, CA, AB respectivement, (D) une droite du plan, ne passant pas par A, B ni C, A', B', C' les points

- 21 -

d'intersection de (D) avec BC, CA, AB. Alors ("théorème de Ménélaus") pour que les points a, b, c soient alignés, il faut et il suffit que $(A, B, C', c)(B, C, A', a)(C, A, B', b) = 1$. Et ("théorème de Ceva") pour que les droites Aa, Bb, Cc soient concourrantes, il faut et il suffit que $(A, B, C', c)(B, C, A', a)(C, A, B', b) = -1$.

Démonstrations de nécessité en prenant A, B, C pour points bases et (D) pour droite $x+y+z = 0$. Démonstrations de suffisance par coïncidence. Conséquence de Ménélaus et Ceva : en caractéristique 2, pour que a, b, c soient alignés, il faut et il suffit que Aa, Bb, Cc soient concourrantes. Autre application : construction "avec la règle seulement" du quatrième point d'une division harmonique.

6 - Grassmanniennes.

Etant donné un espace projectif P de dimension n, on appelle grassmannienne d'ordre r de P, et on note $G_r(P)$ (ou $G_r(P, n)$), l'ensemble des variétés linéaires de dimension r de P. Lorsque P est l'espace projectif standard attaché au vectoriel V, $G_r(P)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension r+1 de V. La grassmannienne $G_r(P)$ est en correspondance biunivoque avec l'espace homogène $G/G(A)$ (G : groupe des automorphismes de P ; G(A) sous-groupe des éléments de G laissant une variété linéaire A de dimension r globalement invariante) ou encore avec $G_1(V)/G_{1W}(V)$ ($G_1(V)$: groupe des automorphismes du vectoriel V ; $G_{1W}(V)$: sous-groupe des éléments de $G_1(V)$ qui laissent un sous-espace vectoriel W de dimension r+1 globalement invariant).

- 22 -

Application : lorsque le corps de base K est fini et a q éléments, le nombre d'éléments de la grassmannienne $G_r(P, n)$ est :

$$(q^{n+1}-1)(q^n-1)\dots(q^{n-r+1}-1)/(q^{r+1}-1)\dots(q^2-1)(q-1)$$

(regarder où peut aller une base de V adaptée à W), ou encore :

$$(q^{n+1}-1)(q^n-1)\dots(q^{r+2}-1)/(q^{n-r}-1)(q^{n-r-1}-1)\dots(q-1).$$

C'est un polynôme de degré $(n-r)(r+1)$. Pour n fixé il ne change pas lorsqu'on change r en $n-r-1$ (par dualité).

La grassmannienne $G_r(P, n)$ contient une famille de sous-ensembles qui sont des espaces projectifs à gauche de dimension $n-r$, à savoir les gerbes $G(A)$ où A est une variété linéaire de dimension $r-1$, -et une famille de sous-ensembles qui sont des espaces projectifs à droite de dimension $r+1$, à savoir les espaces $H(B)$ d'hyperplans des variétés linéaires B de dimension $r+1$. L'intersection $H(B) \cap G(A)$ n'est non vide que si $A \subset B$; c'est alors une droite projective (à la fois à gauche et à droite, comme toute droite projective qui se respecte). Les intersections $G(A) \cap G(A')$ (resp. $H(B) \cap H(B')$) sont aussi des espaces projectifs gauches (resp. droits), de dimensions variées et aisément calculables au moyen des formules (1), (2), (3).

Lorsque le corps K est commutatif la grassmannienne $G_r(P, n)$ se plonge aisément dans un espace projectif. En effet considérons le vectoriel V auquel P est attaché ; à tout $(r+1)$ -vecteur décomposable non nul x sur V (élément de la puissance extérieure $\bigwedge^{r+1} V$) correspond un sous-espace vectoriel $W = W(x)$ de dimension $r+1$ de V ; pour que $W(x) = W(y)$ il faut et il suffit que les $(r+1)$ -vecteurs décomposables x et y soient proportionnels ; enfin tout sous-espace de dimension $r+1$ de V est de la forme $W(x)$ (où x est un $(r+1)$ -vecteur décomposable) (cf. *Alg. III*).

- 23 -

Par conséquent la grassmannienne $G_r(P, n)$ est en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble de l'espace projectif standard E_r^n attaché à la puissance extérieure $\bigwedge^{r+1} V$, et ce sous-ensemble est l'image canonique de l'ensemble des $(r+1)$ -vecteurs décomposables non nuls. L'espace projectif E_r^n dans lequel $G_r(P, n)$ est ainsi plongée est de dimension $\binom{n+1}{r+1} - 1$. Les gerbes $G(A)$ et les espaces d'hyperplans $H(B)$ (cf. ci-dessus) sont par ce plongement isomorphes à des sous-variétés linéaires de E_r^n ($G(A)$ est image canonique d'un vectoriel $x_0 \wedge \dots \wedge x_r \wedge V$; pour le vectoriel correspondant à $H(B)$ on obtient une représentation paramétrique au moyen d'une base de B , et il y a aussi une histoire plus intrinsèque de produits intérieurs).

Lorsqu'on a un système de coordonnées dans P , celui-ci détermine (à un facteur près) une base de V , d'où, canoniquement, une base de $\bigwedge^{r+1} V$ (à un facteur près), et donc un système de coordonnées dans E_r^n . Etant donnée une variété linéaire L de dimension r de P , les coordonnées homogènes du point correspondant de E_r^n s'appellent les coordonnées pluckériennes de L ; elles sont au nombre de $\binom{n+1}{r+1}$. Lorsqu'on a une représentation paramétrique $x_i = \sum_{j=0}^r t_j a_{ji}$ ($0 \leq i \leq n$) de L , un système de coordonnées pluckériennes de L est formé par les déterminants d'ordre $r+1$ extraits de la matrice (a_{ji}) ; par exemple pour la droite $x_i = ta_i + ub_i$ ($0 \leq i \leq n$) celles-ci sont les $p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$ ($0 \leq i < j \leq n$). Notation $p_{i_0, \dots, i_r}$ ($0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n$) des coordonnées pluckériennes dans le cas général.

La condition de décomposabilité d'un $(r+1)$ -vecteur $\underline{x}$ (Alg. III) se traduit par un système d'équations homogènes en les coordonnées $p_{i_0, \dots, i_r}$ ($0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n$) de ce $(r+1)$ -vecteur. Donc la grassmannienne $G_r(P, n)$ est l'ensemble des points de E_r^n dont les coordonnées

- 24 -

homogènes $p_{i_0}, \dots, p_{i_r}$ satisfont un certain système d'équations algébriques homogènes. Système vide pour $r=0, n-1, n$. Pour $n=3$ et $r=1$ le système se réduit à une seule équation : $p_{01}p_{23} + p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$.

On retrouve les coordonnées pluckériennes d'une variété linéaire L de dimension r de P quand on cherche à quelle condition $r+1$ hyperplans $H^{(j)}$ de P , d'équations $(\sum_i x_i u_i^{(j)} = 0)$, ont une intersection non vide avec L (c.à.d. quand $L \cap \bigcap_j H^{(j)} \neq \emptyset$). Cette condition s'obtient en écrivant que le système linéaire obtenu en portant les $x_i = \sum_{k=0}^r t_k a_{ki}$ d'une représentation paramétrique de L dans les équations des $H^{(j)}$ a une solution (t_k) non triviale. C'est donc $\det_{0 \leq k, j \leq r} (\sum_{i=0}^n a_{ki} u_i^{(j)}) = 0$. Par linéarité cette condition s'écrit :

$$(6) \quad \sum_{0 \leq j_0 < \dots < j_r \leq n} p_{j_0, \dots, j_r} \cdot \det_{0 \leq j, s \leq r} (u_{j_s}^{(j)}) = 0$$

Le premier membre de (6) est une forme multilinéaire alternée de degré $r+1$ en les $u_i^{(j)}$; on l'appelle la forme associée de L .

7 - Variétés de Segre et de Veronese.

Un produit d'espaces projectifs n'est pas muni, de façon structurale (c.à.d. "universelle") d'une structure d'espace projectif ; par exemple, sur un corps fini, il n'a pas le nombre de points qu'il faut (sur un algèbriquement clos les géomètres algébriques sont canulés par le fait que deux horizontales n'ont pas de point commun, malgré leur dimension ; et, sur R et C , les topologues sont canulés par les nombres de Betti). Cependant un tel produit peut être plongé, et de façon satisfaisante pour tous les intéressés, dans un espace projectif.

Soient P et P' les espaces projectifs standard attachés à K^{n+1} et à $K^{n'+1}$, K étant commutatif. Etant donnés deux points de P et P' , de coordonnées homogènes (x_i) et $(x'_{i'})$, associons-leur le point de coordonnées homogènes $z_{i,i'} = x_i x'_{i'}$, de l'espace projectif standard E attaché à $K^{(n+1)(n'+1)}$. On obtient ainsi une application de $P \times P'$ dans E , et l'on vérifie aisément qu'elle est biunivoque (une suite de nombres $(x_i x'_{i'})$ ($0 \leq i \leq n$) où $x'_{i'}$ est non nul détermine les x_i à un facteur près). Ainsi $P \times P'$ est en correspondance biunivoque canonique avec un sous-ensemble $S(n, n')$ de E ; ce sous-ensemble est défini par la "représentation paramétrique" :

$$(7) \quad z_{i,i'} = x_i x'_{i'} ;$$

on l'appelle la variété de Segre (standard) d'ordres (n, n') . Les horizontales $(P \times (a'))$, $a' \in P'$ et les verticales de $P \times P'$, qui sont munies de structures d'espaces projectifs transportées de celles de P et P' , sont isomorphes, au moyen de l'application de $P \times P'$ dans E , à des sous-variétés linéaires de E (contenues dans Segre) (AQT).

On démontre que ce sont les variétés linéaires maximales contenues dans Segre : il suffit de montrer que toute droite contenue dans Segre est soit horizontale, soit verticale ; pour cela on considère la représentation paramétrique d'une droite D joignant deux points de Segre, et l'on exprime qu'elle est sur Segre au moyen des équations (3) ci-dessous ; d'où facilement la conclusion.

Il est clair que les coordonnées $z_{i,i'}$ des points de $S(n, n')$ satisfont aux équations :

$$(8) \quad z_{i,i'} z_{j,j'} - z_{i,j'} z_{j,i'} = 0 \quad (0 \leq i, j \leq n, 0 \leq i', j' \leq n') .$$

Réciproquement les relations (8) sont suffisantes pour que le point $(z_{i,i'})$ de E soit sur $S(n, n')$: en effet elles impliquent que, pour i', j'

- 25 -

fixes (resp. i, j fixes) les rapports $z_{i,i'}/z_{i,j'}$ (resp. $z_{i,i'}/z_{j,i'}$) ne dépendent pas de i (resp. i') ; d'où $z_{i,i'} = z_{i,0} \cdot x_{i'}$. Cas $n=n'=1$: une seule équation ; $S(1,1)$ est un beau paraboloides hyperbolique.

Plus généralement on représente un produit fini $P_1 \times \dots \times P_r$ d'espaces projectifs de dimensions $n_1, \dots, n_r$ par la variété de Segre généralisée $S(n_1, \dots, n_r)$, sous-ensemble de représentation paramétrique

$$(7') \quad z_{i_1, \dots, i_r} = x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_r}^{(r)} \quad (0 \leq i_j \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq r)$$

de l'espace projectif standard de dimension $(n_1+1) \dots (n_r+1) - 1$.

Propriétés analogues à celles de $S(n, n')$.

Supposons maintenant que les espaces projectifs $P_1, \dots, P_r$ soient tous égaux à un même espace projectif P de dimension n . Alors la diagonale du produit $(P)^r$ correspond biunivoquement au sous-ensemble D de $S(n, \dots, n)$ de représentation paramétrique $z_{i_1, \dots, i_r} = x_{i_1} \dots x_{i_r}$ ($0 \leq i_j \leq n$). Or il existe une projection évidente de l'espace projectif E (de dimension $(n+1)^r - 1$) sur un espace projectif de dimension $\binom{n+r}{r} - 1$ (symétriser). La restriction de cette projection à D est biunivoque et applique D sur l'ensemble de représentation paramétrique

$$(9) \quad y_s = m_s(x) \quad (0 \leq s \leq \binom{n+r}{r}), \quad m_s(x) : \text{monômes de degré } r \text{ en } x_0, \dots, x_n$$

Cet ensemble est appelé la variété de Veronese d'ordre r de P et est noté V_r^n . Il est en correspondance biunivoque avec P .

Aux droites de P correspondent sur V_r^n des courbes unicursales de degré r . Il résulte de la généralisation de la propriété ci-dessus démontrée des droites de Segre, que Veronese ne contient pas de droites pour $r \geq 2$. Comme pour Segre, un système d'équations de Veronese est formée par celles qui sont évidentes.

§ 3 - GÉOMÉTRIE AFFINE.

1 - Opérations dans un espace affine.

Soit V un vectoriel. Les applications $x \rightarrow a+u(x)$ ($a \in V$, u : automorphisme de V) de V sur V forment un groupe G . Les translations $x \rightarrow a+x$ en constituent un sous-groupe invariant. Un espace affine E attaché à V est défini par la donnée d'une famille non vide R de bijections de V sur E telle que $R = R \circ G$ (repères).

La dimension de V est un invariant structural de G ; on l'appelle la dimension de l'espace affine E . Droite et plan affines.

Le groupe fondamental G' de E (transporté de G par R) s'appelle le groupe des transformations affines de E . Comme le groupe des translations est un sous-groupe invariant de G , son transporté $T \subset G'$ est un terme intrinsèque ; on l'appelle le groupe des translations de E ; il est isomorphe (canoniquement) à V ; on appelle aussi ses éléments des vecteurs libres de E .

Le vectoriel V est muni d'une structure affine canonique (prendre $R=G$). Réciproquement (cf. § 1, n°3) il existe, sur un espace affine E , une famille de structures d'espaces vectoriels dont les structures affines canoniques sont égales à la structure donnée : ce sont les structures vectorielles transportées de celle de V par les repères $r \in R$. Une telle structure ne dépend que du point $r(0)$ (si $r(0)=r'(0)$, r et r' ne diffèrent que par un automorphisme de G) ; et $r(0)$ peut être n'importe quel point P de E . On appelle l'espace vectoriel obtenu l'espace vectoriel de centre P défini par E . Tous ces vectoriels sont isomorphes à V (non canoniquement).

Nous utiliserons désormais les notations suivantes : $P, Q, \dots$ pour les points de E , $\underline{x}, \underline{y}, \dots$ pour les translations (ou vecteurs libres,

ou éléments de T), $a, b, \dots$ pour les éléments de K . Sont déjà définies les opérations : $\underline{x} + \underline{y}$ (correspondant à la composée des translations) ; $a \cdot \underline{x}$; $\underline{x} + P$ (transformé de P par la translation $\underline{x}$). Associativité des deux additions.

Etant donnés deux points P, Q de E il existe une translation et une seule amenant P en Q ; on la note $Q-P$, et on l'appelle le vecteur libre déterminé par P et Q . Le couple (P, Q) s'appelle vecteur lié d'origine P et extrémité Q . Equipollence de vecteurs libres et liés ($Q'-P' = Q-P$). Le point $(Q-P)+R$ est défini ; on a $(Q-P)+P = P$. Parallélogramme et 4^{ème} sommet $Q' = (Q-P)+P'$.

Lorsque $\sum a_i = 0$, le vecteur libre $\sum a_i (P_i - P)$ ne dépend pas de P ; on le note $\sum a_i P_i$. Associativité et distributivité. Considérons alors l'espace vectoriel F produit de T et de l'espace vectoriel des combinaisons linéaires formelles d'éléments de E (éléments formellement écrits $(\sum a_i P_i, \underline{x})$). Les éléments $(\sum a_i P_i, \underline{x})$ tels que :

a) $\sum_i a_i = 0$

b) le vecteur libre $\sum_i a_i P_i$ soit égal à $-\underline{x}$

forment un sous-espace vectoriel N de F . Formons le quotient F/N .

Comme $T \cap N = (0)$, T s'identifie à un sous-espace de ce quotient. La notation $\sum a_i P_i + \underline{x}$ se rapporte à ce quotient (et contient celle du cas où $\sum a_i = 0$ et donc aussi la notation $\underline{x} + P$). Lorsque $a = \sum a_i$ est non nul, on peut écrire $\sum a_i P_i + \underline{x} = \sum a_i P_i + a \underline{y} = \sum a_i P_i + a(P-Q) = \underline{y}' + aP = a(\underline{y}'' + P) = aP'$. Ainsi tout élément de F/N se met sous la forme aP ($a \neq 0$) ou sous la forme $\underline{x}$, et cette représentation est unique (les deux cas s'excluent, et si $aP = a'P'$ (a, a' non nuls), on a $a-a'=0$, d'où $a(P-P')=0$ et $P=P'$). D'autre part la condition a) montre que l'application linéaire $(\sum a_i P_i, \underline{x}) \rightarrow \sum a_i$ définit une

une application linéaire $(\sum a_i P_i + x \rightarrow \sum a_i)$ de E/N sur K , et le noyau de celle-ci est T ; donc la dimension de E/N est $\dim(E)+1$.

Le calcul fait ci-dessus montre que, lorsque $\sum a_i = 1$, la somme $\sum a_i P_i$ (dans E/N) s'écrit $1.P$ et s'identifie ainsi à un point P de E .

Commutativité et associativité (évidemment). Cas particulier de $(P-P')+Q$, d'ailleurs égal à $(Q-P')+P$.

Dans la structure vectorielle de E de centre P la somme des éléments Q, Q' est $Q+Q'-P$ ("règle du parallélogramme"), et le produit de l'élément Q par le scalaire a est $aQ+(1-a)P$.

Etant donnés m points $P_1, \dots, P_m$ de E tels que m ne soit pas multiple de la caractéristique de K , on appelle centre de gravité de $P_1, \dots, P_m$ le point $\sum_{i=1}^m m^{-1} P_i$. Formule d'associativité $G = m^{-1} P_1 + m^{-1} (m-1) G'$ (quand ni m , ni $m-1$ ne sont multiples de la caractéristique). Lorsque m est multiple de la caractéristique, l'expression $\sum_{i=1}^m P_i$ est un vecteur libre, qui peut jouer le rôle de centre de gravité.

Cas particulier : milieu de deux points (caract. $\neq 2$). Diagonales du parallélogramme.

Etant donnés deux points P, Q , on dit que le point $P' = (1-a)^{-1}(P-aQ)$ ($a \neq 1$) divise (P, Q) dans le rapport a . En effet l'on a $P'-P = a(P'-Q)$. Pour le milieu, on a $a = 1/2$.

Par permutations des trois points P, Q, P' , le rapport a se change en $a, 1-a, a^{-1}, 1-a^{-1}, (1-a)^{-1}, a(a-1)^{-1}$ (cf. § 2, n° 4).

2 - Variétés linéaires affines.

On dit qu'un sous-ensemble L d'un espace affine E est une variété linéaire affine si, quels que soient les points $P_1, \dots, P_m$ de L et les nombres $a_1, \dots, a_m$ tels que $\sum a_i = 1$, le point $\sum a_i P_i$ appartient à L .

Lorsque K a au moins 3 éléments, la condition " $P, Q \in L, a+b=1$ entraîne $aP=bQ \in L$ " suffit pour que L soit une variété linéaire affine. En effet la démonstration de $\sum_{i=1}^n a_i P_i \in L$ par récurrence sur le nombre n de points P_i , ne présente de canular dans le passage de $n-1$ à n que si toutes les sommes partielles $\sum_{i \neq j} a_i = 1 - a_j$ sont nulles, c.à.d. si les a_i sont tous égaux à 1 ($n-1$ étant alors multiple de la caractéristique). On décanule ce cas en introduisant un élément b ($\neq 0, 1$) et le point $(1-b)^{-1}(\sum_{i=1}^n P_i - bP_1)$, pour lequel la récurrence marche.

Dans la structure vectorielle de E de centre P , la combinaison linéaire $\sum a_i * P_i$ est le point $\sum a_i P_i + (1 - \sum a_i)P$. Donc, pour tout point P d'une variété linéaire affine L , L est un sous-espace vectoriel pour la structure vectorielle de centre P . Réciproquement, si L est un sous-ensemble de E pour lequel il existe un point P tel que L soit un sous-espace vectoriel pour la structure de centre P , alors L est une variété linéaire affine non vide, comme il résulte aussitôt de la formule ci-dessus (avec $\sum a_i = 1$).

D'autre part, si P est un point de la variété linéaire affine L , ce qui vient d'être vu montre que l'on a $L = P+U$, où U est un sous-espace vectoriel de l'espace V des translations de E , - et que, réciproquement, tout ensemble de la forme $P+U$ est une variété linéaire affine. Et même le sous-espace U de V est indépendant de P : $P \in L, P' \in L$ et $P+\underline{x} \in L$ entraînent $\underline{x} \in U$, $P'-P \in U$ d'où $P'+\underline{x} = P+(P'-P) + \underline{x} \in P+U = L$. Le sous-espace vectoriel U est appelé la direction de L .

On voit aussitôt que, si $L = P+U$ ($P \in E, U$ sous-espace de V) est une variété linéaire affine de E , L admet une structure d'espace affine attaché au vectoriel U (repères faciles à décrire). On dit que cette

- 31 -

structure affine est induite par celle de E . Dimension : c'est celle de U . Codimension - Droites, plans, hyperplans. Traduction de la remarque relative au cas $K \neq F_2$.

Lorsqu'on considère la structure affine d'un vectoriel V , les variétés linéaires affines de V ne sont autres que les translatés des sous-espaces vectoriels de V . Ces sous-espaces prennent alors le nom de variétés linéaires homogènes.

La direction d'une variété linéaire affine L est évidemment l'ensemble des translations de E laissant L invariante (globalement). On dit que deux variétés linéaires affines L, L' sont complètement parallèles (resp. parallèles) si elles ont même direction (resp. si la direction de l'autre est contenue dans la direction de l'une).

Noter que la relation " L et L' sont complètement parallèles" est transitive, mais que la relation " L et L' sont parallèles" ne l'est pas. Dans de nombreux cas on laisse tomber le "complètement", surtout en dimension finie, car deux variétés linéaires affines parallèles de même dimension finie ne peuvent être que complètement parallèles ; il n'y a, par exemple, aucune confusion possible, lorsqu'on parle de droites parallèles ou de plans parallèles.

Postulat d'Euclide. Variétés parallèles à L et passant par un point de L . "Complètement parallèles" = "translatées l'une de l'autre" ($\underline{x}+P+U$ est de la forme $P'+U$ et réciproquement).

Toute intersection de variétés linéaires affines de E est une variété linéaire affine. En particulier : variété linéaire affine engendrée par une famille P_i de points de E . C'est aussi l'ensemble des points $\sum a_i P_i$ ($\sum a_i = 1$). Variété linéaire affine L engendrée par une famille

- 32 -

(L_i) de variétés linéaires affines ; si les L_i ont un point commun P , et si l'on écrit $L = P+U$, $L_i = P+U_i$, U est le sous-espace vectoriel engendré par les U_i ; d'où la formule de dimension :

$$(1) \quad \dim(L) + \dim(L') = \dim(L \cap L') + \dim(N) \quad (L \cap L' \neq \emptyset, N \text{ engendré})$$

Si $L \cap L' = \emptyset$, on a :

$$(2) \quad \dim(L) + \dim(L') + 1 = \dim(\text{direc.}(L) \cap \text{direc.}(L')) + \dim(N).$$

(Considérer, au lieu de L , la variété L_1 engendrée par L et un point de L' ; N est inchangée, ainsi que l'intersection des directions).

Variété linéaire engendrée par des points (P_i) et des vecteurs $(\underline{x}_j)$: c'est l'ensemble des points de la forme $\sum_i a_i P_i + \sum_j b_j \underline{x}_j$ ($\sum_i a_i = 1$). Familles libres et familles totales de "pointsvecteurs" ; correspondent aux familles $(P_i, \underline{x}_j)$ qui sont libres (resp. totales) dans l'espace E/N des " aP ou $\underline{x}$ " ; cas particulier des familles affinement libres (resp. totales) de points de E . Notion de base affine $(P_i, \underline{x}_j)$ de E : est libre et totale ; contient alors au moins un point ; sorte de "libre maximale", "totale minimale", existence, th. d'échange. En dimension finie n une base affine a $n+1$ éléments ; resorite.

Coordonnées barycentriques par rapport à une base $(P_0, \dots, P_m)$.

Représentation paramétrique $P = \sum_i a_i P_i + \sum_j b_j \underline{x}_j$ de la variété linéaire engendrée par la famille libre $(P_i, \underline{x}_j)$ ($\sum_i a_i = 1$). Cas particulier : rapport de 3 points alignés.

Lorsque l'espace affine E est attaché à K^n la donnée d'un repère r équivaut à celle d'une base $(P, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$.

Formules pour le passage des coordonnées par rapport à une base aux coordonnées par rapport à une autre. Equations d'une variété linéaire affine par rapport à une base $(P_i, \underline{x}_j)$; cas de $(P_0, \dots, P_m)$ et de $(P, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$.

3 - Produits et quotients d'espaces affines.

Soient E et F des espaces affines attachés aux vectoriels V et W (sur le même corps) par les familles de repères R et S . La donnée d'un couple (r,s) dans $R \times S$ définit une bijection de $V \times W$ sur $E \times F$, et donc une famille T de repères pour une structure affine sur $E \times F$. La famille T est indépendante du couple (r,s) choisi (et contient $R \times S$, c.à.d. les applications produits). La structure affine qu'elle définit sur $E \times F$ est appelée la structure affine produit des structures données, et $E \times F$, muni de cette structure, prend le nom d'espace affine produit de E et F . Lorsque $P \in E$ et $Q \in F$, l'espace vectoriel de centre (P,Q) ($\in E \times F$) défini par $E \times F$ est le produit des espaces vectoriels de centres P et Q définis par E et F . Donc un produit de variétés linéaires affines est une variété linéaire affine. $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Soient E un espace affine, D un sous-espace vectoriel de son espace T des translations ; la relation " $P-Q \in D$ " est une relation d'équivalence dans E ; notons E/D l'ensemble quotient correspondant. Pour tout point P de E notons V_P l'espace vectoriel de centre P défini par E . Alors les ensembles E/D et $V_P/P+D$ sont en correspondance biunivoque canonique. Comme $V_P/P+D$ est un espace vectoriel, il admet une structure affine, que nous transportons à E/D . La structure affine obtenue sur E/D est indépendante du choix de P : en effet la structure vectorielle de V_{P_1}/P_1+D s'obtient à partir de celle de $V_P/P+D$ par la translation P_1-P , et celle-ci ne change pas la structure affine sous-jacente. L'ensemble E/D , muni de cette structure affine, est appelé l'espace affine quotient de E par la direction D . Il résulte aussitôt de ce qui vient d'être vu que l'espace des translations de E/D s'identifie

s'identifie canoniquement à T/D . D'autre part l'Algèbre linéaire montre que, si L est une variété linéaire affine de E dont la direction D' est supplémentaire de D dans T , la restriction à L de la surjection canonique de E sur E/D est un isomorphisme de L sur E/D ; on en déduit que deux variétés linéaires affines de directions supplémentaires ont un point commun et un seul (ceci résulte aussi des formules de dimension (1) et (2) du n°2). Enfin un facteur E du produit $E \times E'$ de deux espaces affines s'identifie canoniquement à un quotient de $E \times E'$.

4 - Applications affines.

Etant donnés deux espaces affines E, E' sur un même corps K , on dit qu'une application u de E dans E' est une application affine si, quels que soient les points P_i de E et les éléments a_i de K de somme 1, on a

$$(3) \quad u\left(\sum_i a_i P_i\right) = \sum_i a_i u(P_i) .$$

Lorsque K a au moins 3 éléments, la condition " $P, Q \in E, a+b=1$ entraîne $u(aP+bQ) = au(P) + bu(Q)$ " suffit pour que u soit une application affine. Démonstration comme pour les variétés linéaires (n°2).

La formule $\sum_i a_i * P_i = \sum_i a_i P_i + (1 - \sum_i a_i)P$ donnant les combinaisons linéaires dans l'espace vectoriel de centre P défini par E ($P \in E$) et son analogue pour $u(P)$ montrent que, pour tout P dans E , une application affine u de E dans E' est une application linéaire du vectoriel de centre P dans le vectoriel de centre $u(P)$. Réciproquement, s'il existe P dans E tel que u soit une application linéaire du vectoriel de centre P dans le vectoriel de centre $u(P)$, alors u est une application affine.

Il résulte de ceci que, pour qu'une bijection de E sur E' soit un isomorphisme, il faut et il suffit que ce soit une application affine. Alors u^{-1} est aussi une application affine.

Exemples d'applications affines : injection d'une variété linéaire affine, surjection sur un quotient E/D . Composée de deux applications affines (d'où projection $E \rightarrow E/D \rightarrow L$, L étant une variété linéaire affine de direction supplémentaire de D). Applications $x \rightarrow f(x) + a'$ d'un vectoriel V dans un vectoriel V' (f étant linéaire) ; toutes les applications affines de V dans V' sont de cette forme ; celles telles que $a' = 0$ sont dites homogènes.

L'image (resp. image réciproque) d'une variété linéaire affine de E (resp. E') par application affine u de E dans E' est une variété linéaire affine. Le rapport de trois points alignés est conservé par application affine, lorsque les images de ces trois points sont distinctes ("théorème de Thalès").

Le corps de base K possède une structure vectorielle, et donc une structure affine. Une application affine de E dans K s'appelle une fonction affine sur E . Pour tout point P de E une telle fonction affine est de la forme $\varphi_u = u(P) + u'$, où u' est une forme linéaire sur l'espace vectoriel V_P de centre P ; ainsi les fonctions affines sur E forment un espace vectoriel à droite de dimension $\dim(E) + 1$ sur K . Un hyperplan de E est défini par l'annulation d'une fonction affine sur E , ou, ce qui revient au même, par une équation de la forme $u(P) - a = 0$ (u : fonction affine) ; une variété linéaire affine de E est définie par un système de telles équations.

- 36 -

5 - Homothéties.

Un automorphisme u d'un espace affine E est appelé une homothétie-transformation s'il transforme toute variété linéaire affine de E en une variété linéaire affine parallèle. Il est clair que les homothéties-translations forment un sous-groupe distingué du groupe des automorphismes de E . Leur non est justifié par le résultat suivant : si une homothétie-transformation h de E n'est pas une translation, et si $\dim(E) \geq 2$, il existe un point P et un seul de E tel que $h(P)=P$, et l'on a, pour tout Q dans E , $h(Q)-h(P) = a(Q-P)$, où a est un élément ($\neq 0,1$) du centre de K . Réciproquement toute translation et tout automorphisme de cette forme de E sont des homothéties translations.

Démonstration : comme h n'est pas une translation, il existe Q, Q' tels que $h(Q)-Q \neq h(Q')-Q'$; on peut supposer ces vecteurs non nuls, sinon P est tout trouvé. Ils sont alors non parallèles, sinon $Q, Q', h(Q'), h(Q)$ est un parallélogramme et $h(Q)-Q = h(Q')-Q'$. Alors les droites $Qh(Q), Q'h(Q')$ (qui sont coplanaires) ont un point commun P et l'on a $h(P)=P$ puisque $h(P)-h(Q)$ et $h(P)-h(Q')$ sont parallèles à $P-Q$ et $P-Q'$ respectivement. Ainsi h est un automorphisme du vectoriel de centre P , et conserve les droites passant par P ; il est donc de la forme indiquée (cf. Alg. II).

Et ceci montre l'unicité de P . La réciproque est immédiate.

Un automorphisme h de E pour lequel il existe P dans E et a dans le centre de K tels que $h(Q)-h(P) = a(Q-P)$ s'appelle une homothétie de E . Le point P (qui est uniquement déterminé par h lorsque $a \neq 1$, c.à.d. lorsque $h \neq 1$) s'appelle le centre de h ; le nombre a s'appelle le rapport de h . Une homothétie qui est aussi une translation est l'identité.

- 37 -

Le produit des homothéties $(a, P), (a', P')$ est l'homothétie $(aa', (1-a)P + aP')$ si $aa' \neq 1$, et la translation $(1-a)(P-P')$ si $aa' = 1$.
 Donc, si l'on convient d'appeler rapport d'une translation le nombre 1, l'application $h \rightarrow \text{rapport}(h)$ est un homomorphisme du groupe des homothéties translations sur le groupe multiplicatif du centre de K .

Nombre d'éléments du groupe des homothéties-translations pour un espace affine de dimension n sur un corps fini à q éléments :

$$q^n + (q-2)q^n = q^n(q-1).$$

6 - Immersion de l'espace affine dans l'espace projectif.

Étant donné un espace affine E , considérons l'espace vectoriel F/N des " aP ou $\underline{x}$ " (cf. n°2) ; l'espace affine E s'identifie canoniquement à l'hyperplan des éléments $\sum a_i P_i + \underline{x}$ de F/N tels que $\sum a_i = 1$.
 Or, étant donné un vectoriel W et un hyperplan H de W ne passant pas par 0 , l'application canonique de W sur l'espace projectif standard P associé à W applique bijectivement H sur le complément dans P de l'hyperplan (de P) image canonique de l'hyperplan homogène de W parallèle à H . En particulier l'espace affine E s'identifie canoniquement au complément, dans l'espace projectif standard P attaché à F/N , d'un hyperplan H_∞ de P . L'espace projectif P s'appelle la clôture projective de l'espace affine et l'hyperplan H_∞ s'appelle l'hyperplan à l'infini de cette clôture projective. On a $\dim(P) = \dim(E)$ puisque $\dim(F/N) = \dim(E) + 1$. Les points de H_∞ (ou points à l'infini) s'identifient aux directions de droites de E .

Réciproquement, étant donné un espace projectif P attaché au vectoriel W et un hyperplan H de P , on peut munir canoniquement $P-H$ d'une structure affine. En effet notons $f(x)=0$ une équation de l'hyperplan U

de W correspondant à H au moyen du repère r ; alors les équations des hyperplans de W correspondant à H au moyen de repères sont celles qui sont de la forme $f'(x) = f(g(x)) = 0$ ($g \in G_1(W)$). Les structures affines des hyperplans U'_g de U d'équations $f(g(x)) = 1$ sont toutes transformées l'une de l'autre par $G_1(W)$. Comme il existe une bijection canonique $b(g)$ de U'_g sur $P-H$, et que l'on a $b(g') = b(g) \circ g'^{-1} \circ g$, les structures affines transportées sur $P-H$ de celles des U'_g sont toutes égales. On se mord évidemment la queue dans le cas de la clôture projective.

Par exemple l'espace affine K^n s'identifie au complément de l'hyperplan $x_0 = 0$ dans l'espace projectif standard P associé à K^{n+1} : le point $(x_1, \dots, x_n)$ de K^n s'identifie au point de coordonnées homogènes $(1, x_1, \dots, x_n)$ de P .

Etant donnée une variété linéaire affine L de $E = P-H$, la variété linéaire projective $\bar{L}$ engendrée par L s'appelle la fermeture projective de L dans P . Le passage au vectoriel auquel P est associé montre aussitôt que L et $\bar{L}$ ont même dimension et que L est la trace de $\bar{L}$ sur $P-H$. D'autre part la trace sur $P-H$ de n'importe quelle variété linéaire projective $\bar{L}$ de P est une variété linéaire affine de E , et $\bar{L}$ est la fermeture projective de L .

Lorsque l'espace affine E est plongé dans sa clôture projective P , la fermeture projective de la variété linéaire affine L de E s'obtient en adjoignant à L les directions des droites contenues dans L . Lorsque L est la variété linéaire affine de K^n définie par les équations $(\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} - b_j = 0)$, sa fermeture projective dans l'espace projectif standard associé à K^{n+1} est définie par les équations "rendues homogènes" $(\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} - x_0 b_j = 0)$.

Etant donnés deux espaces affines E, E' de la forme $P-H, P'-H'$ (projectif - hyperplan) et une application affine u de E dans E' , celle-ci se prolonge d'une façon et d'une seule en une application projective $\bar{u}$ de P dans P' : on peut, par isomorphismes, supposer que P et P' sont les clôtures projectives de E et E' ; on passe alors aux "aP ou $\underline{x}$ ", l'on considère l'application linéaire

$$u'(\sum a_i P_i + \underline{x}) = u'(\sum a_i P_i + P-Q) = \sum a_i u(P_i) + u(P) - u(Q),$$
 et on la passe aux quotients. Il résulte de la définition de $\bar{u}$ que l'image par $\bar{u}$ d'un point à l'infini, c'est-à-dire d'une direction D de droites de P , est aussi un point à l'infini (ou n'est pas définie), à savoir la direction du vecteur $u(P) - u(Q)$, PQ étant une droite de direction D . En d'autres termes le centre de $\bar{u}$ est à l'infini, et l'on a $\bar{u}^{-1}(H') \subset H$. Si u est un automorphisme, il en est de même de $\bar{u}$. Réciproquement, étant donnée une application projective $\bar{u}$ de P dans P' telle que :

- 1) Le centre de $\bar{u}$ soit contenu dans H
- 2) $\bar{u}^{-1}(H') \subset H$

alors la restriction de $\bar{u}$ à l'espace affine $E = P-H$ est partout définie, applique E dans $E' = P'-H'$, et est une application affine (Passer au vectoriel des "aP ou $\underline{x}$ ").

En particulier les automorphismes de $E = P-H$ sont induits par les automorphismes de P qui laissent l'hyperplan à l'infini H globalement invariant, les homothéties-translations sont induites par ceux qui laissent chaque point de H invariant, et enfin les translations ($\neq 1$) sont induites par ceux dont l'ensemble des points invariants est juste H .

- 40 -

§ 4 - GÉOMÉTRIE AFFINE SUR UN CORPS ORDONNÉ. ORIENTATION.

1 - Espaces affines sur un corps ordonné.

Soit E un espace affine sur un corps ordonné K . Etant donné un système $(P_i, \underline{x}_j)$ de points-et-vecteurs de E , on appelle région positive fermée (resp. ouverte) déterminée par ce système, et l'on note $R(P_i, \underline{x}_j)$ l'ensemble des points P de E de la forme $\sum a_i P_i + \sum b_j \underline{x}_j$ où $\sum a_i = 1, a_i \geq 0$ et $b_j \geq 0$ (resp. $a_i > 0, b_j > 0$). Cas particuliers : a) segments (avec deux points P et Q) ; b) demi-droites (avec un point P et un vecteur $\underline{x}$, dit vecteur directeur de la demi-droite) ; c) demi-espaces ((P_i) étant l'ensemble des points d'un hyperplan H , et $\underline{x}$ un vecteur non parallèle à H) d) simplexes (avec (P_i) affinement libre), triangles, tétraèdres. Remarquer que $R(P_i, \underline{x}_j)$ ne change pas si l'on remplace $\underline{x}_j$ par $c_j \underline{x}_j$ où $c_j > 0$.

Deux demi-droites parallèles $R(P, \underline{x}), R(P', \underline{x}')$ sont dites de même sens s'il existe une translation amenant l'une sur l'autre. Il revient au même de dire qu'il existe $a > 0$ tel que $\underline{x}' = a \cdot \underline{x}$.

Etant donné un hyperplan H et un vecteur $\underline{x}$ non parallèle à H , tout point P de E s'écrit, et de façon unique, sous la forme $p(P) + a(P) \cdot \underline{x}$, où $p(P) \in H$ et où $a(P) \in K$; le point $p(P)$ est la projection de P sur H parallèlement à $\underline{x}$, et $P \rightarrow a(P)$ est une fonction linéaire affine telle que $a(P) = 0$ soit équation de H . Le demi-espace fermé (resp. ouvert) $R(H, \underline{x})$ est défini par $a(P) \geq 0$ (resp. $a(P) > 0$). Demi-espaces opposés (définis par H et $-\underline{x}$) ; justification du nom "demi-espace" (un demi-espace ouvert est complètement du demi-espace fermé opposé). Réciproque : une fonction linéaire affine $P \rightarrow a(P)$ telle que $a(P) = 0$ soit équation de H définit un demi-espace fermé

- 41 -

(resp. ouvert) au moyen de $a(P) \geq 0$ (resp. $a(P) > 0$) (Démonstration : prendre un point Q tel que $a(Q)=1$, et un vecteur $\underline{x}=Q-Q'$, où $Q' \in H$; on a alors $P-a(P).\underline{x} \in H$ pour tout P). D'après la proportionnalité de deux fonctions linéaires affines nulles sur H , la paire de demi-espaces $R(H, \underline{x}), R(H, -\underline{x})$ est déterminée de façon unique par H . Deux points P, Q de E sont dits être du même côté de H (resp. strictement du même côté de H) s'ils appartiennent à un même demi-espace fermé (resp. ouvert) déterminé par H .

Une partie C de E est dite convexe si, pour tout couple (P, Q) de points de C , le segment fermé $R(P, Q)$ est contenu dans C . Les régions positives ci-dessus définies sont convexes. Renvoyer alors aux EVT (Bourbaki ne pouvant décemment se répéter).

Pour les régions polyédrales et polyèdres (convexes ou non) j'ai l'impression que leur théorie (qui, dans l'état 2, est basée sur la subdivision par section) est une introduction à la Topologie Combinatoire et n'a pas sa place ici.

Etant données, sur un espace affine de dimension n , n fonctions linéaires affines non constantes et linéairement indépendantes (f_i) ainsi que n couples de nombres (a_i, b_i) tels que $a_i < b_i$, on appelle parallélotope fermé (resp. ouvert) défini par ces formes et des nombres l'ensemble des points P de E tels que $a_i \leq f_i(P) \leq b_i$ pour tout i (resp. $a_i < f_i(P) < b_i$ pour tout i).

2 - Orientation.

Soient E un espace affine de dimension n sur un corps (commutatif quelconque) K et T son espace des translations. Donnons-nous un sous-groupe multiplicatif G de K^* tel que $-1 \notin G$. Le groupe G opère sur l'ensemble des éléments non nuls de la puissance extérieure n -ème $\bigwedge^n T$;

on appelle orientation de E par rapport à G toute classe d'intransitivité de G (pour cette représentation) ; les orientations de E par rapport à G sont ainsi en correspondance biunivoque (non canonique) avec les éléments de K^*/G . On dit que deux orientations $\underline{o}, \underline{o}'$ de E sont opposées si $\underline{o}' = (-1) \cdot \underline{o}$ (elles sont alors distinctes puisque $-1 \notin G$).

Etant donnée une base affine $(P_1, \underline{x}_j)$ de E, formée de poinzovecteurs on appelle orientation de cette base la classe d'intransitivité du n-vecteur $(P_2 - P_1) \wedge \dots \wedge (P_m - P_1) \wedge \underline{x}_1 \wedge \dots \wedge \underline{x}_{n-m+1}$; ce n-vecteur est d'ailleurs indépendant de P_1 ; cas où $m=1$ (1 point, n vecteurs).

Etant donné un élément s du groupe des transformations affines de E, l'application $t \rightarrow sts^{-1}$ est un automorphisme de l'espace des translations T ; son déterminant s'appelle le déterminant de s et se note D(s). Les transformations affines s de E qui "conservent l'orientation" (c'est-à-dire qui laissent chaque orientation invariante) ne sont autres que celles telles que $D(s) \in G$; celles telles que $D(s) \in -G$ sont celles qui changent toute orientation en son opposée. Exemple : la transformation affine s consistant à effectuer une permutation π sur les indices des vecteurs $\underline{x}_i$ d'une base $(P, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ de E conserve l'orientation si la signature ϵ_π de π est égale à 1, et change chaque orientation en son opposée si $\epsilon_\pi = -1$; application aux orientations des bases $(P, \underline{x}_i)$ et $(P, \underline{x}_{\pi(i)})$.

Considérons deux variétés linéaires affines E' et E'' de E (prises dans cet ordre) ; notons T', T'' leurs espaces de translations, n' et n'' leurs dimensions. L'application $(x', x'') \rightarrow x' \wedge x''$ de $(\bigwedge^{n'} T') \times (\bigwedge^{n''} T'')$ dans $(\bigwedge^n T)$ définit par passage aux quotients, une application, notée $(\underline{o}', \underline{o}'') \rightarrow \underline{o}' \wedge \underline{o}''$, du produit des ensembles des orientations de E' et E''

- 43 -

dans l'ensemble des orientations de E . Comme, pour $\underline{o}'$ (resp. $\underline{o}''$) fixé, l'application $\underline{o}'' \rightarrow \underline{o}' \wedge \underline{o}''$ (resp. $\underline{o}' \rightarrow \underline{o}' \wedge \underline{o}''$) est une bijection, la donnée de deux des orientations $\underline{o}, \underline{o}', \underline{o}''$ sur E, E', E'' détermine la troisième de façon unique si elles sont assujetties à la relation $\underline{o} = \underline{o}' \wedge \underline{o}''$.

Lorsque l'une au moins des deux dimensions n' et n'' est paire, l'on n'a pas à se préoccuper de l'ordre dans lequel E' et E'' sont donnés.

Le cas le plus important où l'on étudie les orientations d'un espace affine est celui où le corps de base K est ordonné et où l'on prend $G = K_+^*$. Alors il existe deux orientations sur E , d'ailleurs opposées. Etant donnée une droite affine D , elle est susceptible de deux structures d'ensemble totalement ordonné (opposées) transportées de celle de K ; chacune de ces structures détermine une orientation de D , à savoir la classe des vecteurs $P-Q$ où $P > Q$; en d'autres termes la donnée d'une demi-droite portée par D définit une orientation de D , à savoir la classe de n'importe quel vecteur directeur de D . Par conséquent la donnée d'un des demi-espaces déterminés par un hyperplan H définit une orientation sur toute droite supplémentaire de H ; il en résulte, d'après ce qui a été vu plus haut, que la donnée d'une orientation sur H détermine de façon unique une orientation sur E , et réciproquement. Enfin, (règle du bonhomme d'Ampère) pour que deux bases affines $(P_0, \dots, P_n)$ et $(P'_0, \dots, P'_n)$ de E , qui ne diffèrent que par un élément $P_k \neq P'_k$, aient la même orientation, il faut et il suffit que P_k et P'_k soient du même côté de l'hyperplan H engendré par les P_i pour $i \neq k$ (par permutation l'on peut supposer $k=n$, et l'on est ramené à la propriété précédente).

3 - Secteurs angulaires.

Considérons un plan affine E sur un corps ordonné K , et une orientation o de E , que nous appellerons directe; un bivecteur non nul $\underline{x} \wedge \underline{y}$ de E sera dit direct si sa classe est o , et rétrograde dans le cas contraire. Etant donnée une suite (D, D', D'') de demi-droites de même origine dans E , on dit que cette suite est directe s'il existe des vecteurs directeurs $\underline{x}, \underline{x}', \underline{x}''$ de D, D', D'' tels que deux au moins des trois bivecteurs $\underline{x} \wedge \underline{x}', \underline{x}' \wedge \underline{x}'', \underline{x}'' \wedge \underline{x}$ soient directs ou nuls (cette propriété est alors vérifiée quels que soient les vecteurs directeurs $\underline{x}, \underline{x}', \underline{x}''$). Une permutation paire de (D, D', D'') transforme une suite directe en une suite directe, et une permutation impaire en une suite non directe.

Etant données deux demi-droites D, D' de même origine O , on appelle secteur angulaire fermé de sommet O , d'origine D et d'extrémité D' la réunion $S(D, D')$ des demi-droites U d'origine O telles que la suite (D, U, D') soit directe (NB : je ne sais pas si le secteur angulaire doit être un ensemble de demi-droites ou une réunion de demi-droites). Soient $\underline{x}, \underline{y}$ des vecteurs directeurs de D et D' ; pour que la demi-droite U de vecteur directeur $\underline{ax+by}$ soit contenue dans le secteur $S(D, D')$ il faut et il suffit

- a) Si $\underline{x} \wedge \underline{y}$ est direct, que l'on ait $a \geq 0$ et $b \geq 0$. (AQT)
(sect. saillant).
- b) Si $\underline{x} \wedge \underline{y}$ est rétrograde, que l'on ait $a \geq 0$ ou $b \geq 0$. (AQT)
(sect. rentrant).

Si D et D' sont opposées, $S(D, D')$ est un demi-plan. Si $D=D'$, $S(D, D')$ est le plan tout entier.

- 45 -

Les secteurs opposés $S(D, D')$ et $S(D', D)$ (pour $D \neq D'$) ; réunion E ; intersection $D \cap D'$. Secteurs supplémentaires. Secteurs angulaires ouverts.

Etant donné un secteur $S(D, D')$ ((où $D \neq D'$)), la relation "la suite (D, U, U') est directe" entre deux demi-droites U, U' d'origine O et contenues dans le secteur, est une relation d'ordre total (AQT). Alors $S(U, U')$ est réunion des demi-droites V telles que $U \leq V \leq U'$.

§ 5 - FIGURES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE.

1 - Définition de la géométrie euclidienne.

Soit V un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ et B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V ; notons f la forme quadratique associée à B :

$$(1) \quad f(x) = B(x, x), \quad f(ax + by) = a^2 f(x) + b^2 f(y) + 2ab B(x, y).$$

Les permutations de V qui sont de la forme $x \rightarrow y + u(x)$ ($y \in V$, u : automorphisme de V laissant B (ou f) invariante) forment un groupe G , qui contient le groupe des translations de V comme sous-groupe invariant. Un espace euclidien attaché à V (et à B ou f) est défini par la donnée d'une famille non vide R de bijections de V sur E telle que $R = R \circ G$ (repères).

Comme le groupe G est un sous-groupe de celui servant à définir les structures d'espaces affines, un espace euclidien E est muni d'une structure d'espace affine (dite sous-jacente) (cf. § 1, n° 3) ; c'est de cette structure qu'il s'agira lorsque nous appliquerons à un espace euclidien E la terminologie et les résultats du § 2.

- 46 -

Définition de la forme métrique $e(P,Q)$, et du produit scalaire de deux vecteurs libres (x,y) . Ce sont des invariants structuraux. On a

$$(2) \quad e(P,Q) = e(Q,P) = (Q-P, Q-P), \quad e(Q,Q') = e(Q,P) + e(Q',P) - 2(Q-P, Q'-P).$$

Par centrage d'un espace euclidien, on obtient un vectoriel muni d'une forme quadratique.

2 - Perpendicularité.

On dit que deux vecteurs liés $PQ, P'Q'$ de E sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si $(Q-P, Q'-P')=0$. On dit que deux variétés linéaires V, V' de E sont orthogonales (ou perpendiculaires) si, pour tous $P, Q \in V$ et $P', Q' \in V'$, les vecteurs liés $PQ, P'Q'$ sont orthogonaux.

Remarquer : si V et V' ont un point commun R , cette notion se réduit à celle de sous-espaces orthogonaux dans le vectoriel de centre R (muni de sa forme quadratique). Aussi : l'espace des translations de E est muni d'une forme quadratique et, pour que V et V' soient orthogonales, il faut et il suffit que leurs directions le soient.

Condition d'orthogonalité de PQ et PQ' : $e(Q,Q') = e(P,Q) + e(P,Q')$
("th. de Pythagore").

Extension de la terminologie "vectorielle" par passage aux directions (ou par centrage) : une variété linéaire V est dite isotrope (resp. tot. isotrope) si elle contient une variété linéaire V' de $\dim. \geq 1$ qui lui est orthogonale (resp. si elle est orthogonale à elle-même). Condition de totale isotropie : $e(P,Q)=0$ pour tous $P, Q \in V$.

Soit V une variété linéaire de l'espace euclidien E , et soit P un point de E . Par passage aux directions l'on voit que le lieu des points Q de E tels que PQ soit orthogonal à V est une variété linéaire V'

passant par P et de dimension égale à $\text{codim}(V)$. Pour que V soit non isotrope, il faut et il suffit que la somme des directions de V et V' soit directe ; alors V et V' sont supplémentaires ; et V' est non isotrope. Lorsqu'il en est ainsi la projection de E parallèle à V' applique E sur V ; on l'appelle la projection orthogonale de E sur V , et on la note p_V . Pour tout point P de E l'on pose $e(P,V) = e(P,p_V(P))$.

3 - Sorite.

Sous-espace : soit V une variété linéaire de E . Par centrage on obtient sur V une structure d'espace euclidien (cf. cas affine, § 3, n°2) ; dite induite. Sa forme métrique est induite par celle de E .

Produit. Défini par "centrage" et par définition d'une forme quadratique dans un vectoriel produit. Exemple : V et V' lorsque V est non isotrope (ceci étant juste un rappel).

Quotient. Soit D une direction non isotrope de E , et soit V une variété linéaire supplémentaire de D et orthogonale à D (une telle V est déterminée à une translation près). La restriction à V de l'application canonique de E sur E/D est un isomorphisme de l'espace affine V sur l'espace affine E/D . En transportant à E/D la structure euclidienne de V , on obtient une structure euclidienne sur E/D , dite structure quotient de celle de E (celle-ci est, évidemment, indépendante du choix de V).

Application : Considérons deux variétés linéaires non isotropes V et W de E , et soit D l'intersection (non isotrope) de leurs directions. On dit que V et W sont faiblement perpendiculaires si, dans l'espace euclidien quotient E/D , les images canoniques $\bar{V}$ et $\bar{W}$ de V et W sont perpendiculaires. Dans le cas où $D=(0)$ on retrouve la notion de perpendicularité (n°2). Dans le cas

général la faible perpendicularité de V et W veut dire que V (considéré comme sous-variété linéaire d'une supplémentaire orthogonale D' de D) est perpendiculaire à W , - et implique que V est parallèle à une variété perpendiculaire à W . Lorsque V et W sont faiblement perpendiculaires, les projections P_V, P_W sont permutables : on a en effet $P_V \circ P_W = P_W \circ P_V = P_D$ (D désignant ici $V \cap W$) ; la réciproque est vraie.

4 - Hyperplans médiateurs et bissecteurs.

Etant donnés deux points distincts P, P' de E et un élément a de K l'ensemble des points Q de E tels que $e(Q, P) - e(Q, P') = a$ est un hyperplan orthogonal à PP' (La formule $e(Q, P) - e(Q, P') = e(P, P') - 2(Q - P', P - P)$ (cf. (2), n°1) montre que $e(Q, P) - e(Q, P')$ est une fonction linéaire non nulle de Q ; d'où l'hyperplan ; perpendicularité facile). Si $a=0$ cet hyperplan passe par le milieu de PP' , et s'appelle l'hyperplan médiateur de PP' .

Déterminons maintenant la "distance d'un point P à un hyperplan" non isotrope H . Soit $f(Q)=0$ une équation de H , et soit $\underline{t}$ un vecteur orthogonal à H . La projection $p_H(P)$ est de la forme $P + a.\underline{t}$; la condition $f(P + a.\underline{t})=0$ détermine $a : a = -f(P)/f'(\underline{t})$ (f' : extension de f à l'espace des translations). D'où $e(P, H) = k.(f(P))^2$ où $k = e(\underline{t})/(f'(\underline{t}))^2$ est indépendant de P .

Etant donnés deux hyperplans non isotropes H et H' , cherchons maintenant le lieu L des points P tels que $e(P, H) = e(P, H')$. Notons $f(Q)=0$, $f'(Q)=0$ des équations de H et H' . Les points de L sont caractérisés par $k(f(P))^2 = k'(f'(P))^2$. Si H et H' sont non parallèles, les fonctions affines $1, f, f'$ sont linéairement indépendantes, et deux choses

peuvent se produire : ou bien k/k' (c.à.d. $e(\underline{t})/e(\underline{t}')$) n'est pas un carré dans K et c'est pas intéressant car la relation ci-dessus entraîne $f(P)=f'(P)=0$, et $L = H \cap H'$; si c'est un carré b^2 l'équation s'écrit $(f'(P)+bf(P)).(f'(P)-bf(P))=0$, et deux choses peuvent se produire, L se composant de deux hyperplans, contenant tous deux $H \cap H'$. Dans ce dernier cas ces hyperplans M, M' sont faiblement perpendiculaires.

Démonstration : $\underline{t}$ désignant un vecteur perpendiculaire à H et Q un point de $H \cap H'$, une équation de H s'écrit $f(P)=(\underline{t}, P-Q)=0$; on a alors $e(P, H) = e(\underline{t})^{-1}(\underline{t}, P-Q)^2$ (cf. ci-dessus) ; idem pour H' . Les équations de M et M' s'écrivent alors $(\underline{t}'-b\underline{t}, P-Q)=0$, $(\underline{t}'+b\underline{t}, P-Q)=0$ où $b^2=e(\underline{t}')/e(\underline{t})$. Ainsi les vecteurs $\underline{t}'-b\underline{t}$ et $\underline{t}'+b\underline{t}$ sont respectivement perpendiculaires à M et M' . Or, pour que deux hyperplans soient faiblement perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs vecteurs orthogonaux soient perpendiculaires. Il suffit donc de montrer que $(\underline{t}'-b\underline{t}, \underline{t}'+b\underline{t})=0$, ce qui est trivial vu la valeur de b .

On dit alors que M et M' sont les hyperplans bissecteurs de H et H' . Reste enfin le cas où H et H' sont parallèles : alors L est un hyperplan parallèle à H et H' , qui est aussi le lieu des milieux des couples (Q, Q') où $Q \in H$ et $Q' \in H'$ (passer à E /direction de H).

5 - Sphères.

Etant donnés un point P de E et un élément a de K , on appelle sphère de centre P et d'extension a , et on note $S(P, a)$, l'ensemble des points Q tels que $e(P, Q)=a$. Une sphère peut être vide ; mais, si $S(P, a) \neq \emptyset$, on a, par translation, $S(Q, a) \neq \emptyset$ pour tout Q . La sphère d'extension nulle $S(P, 0)$ est la réunion des droites isotropes passant par P .

Si $Q \in S(P, a)$, le symétrique $Q' = 2P - Q$ de Q par rapport à P appartient aussi à $S(P, a)$.

Lorsque E est une droite non isotrope, une sphère $S(P, a)$ est vide, ou se compose de deux points symétriques par rapport à P , ou se réduit à P . Dans les deux derniers cas le centre et l'extension de $S(P, a)$ sont déterminés de façon unique.

Etant donnée une variété linéaire non isotrope V de E , l'intersection $S(P, a) \cap V$ est la sphère $S(p_V(P), a - e(P, V))$ de l'espace euclidien V : en effet, pour tout $Q \in V$, on a $e(P, Q) = e(P, p_V(P)) + e(p_V(P), Q)$ d'après le vieux Pythagore. Pour que cette sphère soit d'extension nulle (relativement au centre $p_V(P)$), il faut et il suffit que $e(P, V) = a$, c'est-à-dire que $e(P, p_V(P)) = a$, ou encore que $p_V(P)$ soit sur $S(P, a)$; alors le "rayon" $Pp_V(P)$ est perpendiculaire à V ; on dit alors que V est tangente à $S(P, a)$. Les droites non isotropes passant par un point Q de $S(P, a)$ et tangentes à $S(P, a)$ sont celles qui ne rencontrent $S(P, a)$ qu'en Q .

On déduit de là que le centre et l'extension d'une sphère non vide sont déterminés de façon unique. Soient en effet Q un point de cette sphère et P et P' ses centres. D'après ce qui vient d'être vu les relations " D est perpendiculaire à PQ " et " D est perpendiculaire à $P'Q$ " sont équivalentes pour une droite non isotrope D passant par Q ; et cette équivalence s'étend aux droites isotropes passant par Q , parce qu'alors chacune des deux conditions veut dire que D est située sur la sphère en question. Par conséquent les points P, P' et Q sont alignés. Si $P \neq P'$, l'un au moins de ces points, soit P , doit être distinct de Q ; alors la sphère S doit passer par le symétrique $2P - Q$, ce qui contredit le fait que S admet aussi P' pour centre, ceci dans le cas où la droite

- 51 -

$PP'Q$ est non isotrope. Dans le cas contraire ce raisonnement montre que S est d'extension nulle (à la fois par rapport à P et à P' et se réduit à la droite PP' ; alors la direction de PP' est la seule direction isotrope de E ; notons $\underline{x}$ un vecteur porté par D , $\underline{y}$ un vecteur non parallèle à $\underline{x}$ (et donc non isotrope) ; on a $e(a\underline{x}+b\underline{y}) = 2ab(\underline{x},\underline{y}) + b^2e(\underline{y})$ puisque $e(\underline{x})=0$; or, par hypothèse, $e(a\underline{x}+b\underline{y})=0$ équivaut à $b=0$; ceci implique $e(\underline{x},\underline{y})=0$, en contradiction avec le fait que nous avons affaire à une forme quadratique non dégénérée.

On fait alors trotter notre âne sur les chemins suivants :

- 1) $S(P,a) \cap S(P',a')$ est contenu dans l'hyperplan H défini par $e(Q,P)-e(Q,P')=a-a'$ (qui est perpendiculaire à la ligne des centres).
- 2) Le nombre $e(Q,P)-a$ s'appelle la puissance de Q par rapport à la sphère $S(P,a)$. Equation quadratique donnant les points d'intersection de $S(P,a)$ avec la droite de représentation paramétrique $Q+b\underline{t}$; s'il y a deux points d'intersection M,M' , on a $(M-Q,M'-Q)=e(Q,P)-a$; cas où D est tangente à la sphère. L'hyperplan H de 1) est le lieu des points ayant même puissance par rapport à $S(P,a)$ et $S(P',a')$ (hyperplan radical des deux sphères).
- 3) Sphères orthogonales si $e(P,P')=a+a'$; l'extension de l'une est la puissance de son centre par rapport à l'autre ; orthogonalité des rayons en un point commun (par Pythagore).
- 4) Existence et unicité d'une sphère passant par $n+1$ points P_i formant une base affine de E (remarquer que les hyperplans médiateurs des couples (P_0,P_i) ($i \neq 0$) ont des directions linéairement indépendantes, et ont donc un point commun et un seul).
- 5) Théorie de l'hyperparabololoïde de révolution, et de ses hyperplans de Monge.

§ 6 - TRANSFORMATIONS EN GEOMETRIE EUCLIDIENNE.

(N-B : C'est naturellement ici qu'il faudra héberger le groupe orthogonal, expulsé du chap. VIII).

1 - Isométries et symétries.

Etant donné un espace euclidien E , on appelle isométrie de E toute permutation u de E qui "conserve les distances" (c.à.d. telle que $e(u(P), u(Q)) = e(P, Q)$ quels que soient P et Q). Une isométrie est une transformation linéaire affine ; en effet :

Lemme - Une permutation u de E pour laquelle il existe $\alpha \neq 0$ dans K tel que $e(u(P), u(Q)) = \alpha \cdot e(P, Q)$ est une transformation linéaire affine.

Démonstration : en composant u avec une translation, l'on peut supposer qu'il existe un point O tel que $u(O) = O$. Prenons O pour centre, et notons $x, y, z, \dots$ des vecteurs d'origine O . On a $(u(x), u(x)) = \alpha(x, x)$, d'où, par application de ceci à x, y et $x+y$, $(u(x), u(y)) = \alpha(x, y)$ (caract. $\neq 2$). D'où $(u(x)+u(x'), u(y)) = (u(x), u(y)) + (u(x'), u(y)) = \alpha(x, y) + \alpha(x', y) = \alpha(x+x', y) = (u(x+x'), u(y))$. Comme u est surjective et comme la forme bilinéaire est non dégénérée, on en déduit $u(x)+u(x') = u(x+x')$. Idem. pour la multiplication par les éléments de K (NB : ça se fait d'ailleurs d'un seul coup, en transformant comme ci-dessus $(bu(x)+b'u(x'), u(y))$).

Par conséquent, l'ensemble des isométries de E n'est autre que le groupe fondamental G de E (cf. § 1). Il contient le groupe T des translations de E comme sous-groupe invariant. Le sous-groupe de G laissant invariant un point P de E est isomorphe au groupe orthogonal $O_n(K, f)$;

plus précisément toute isométrie u se met, d'une façon et d'une seule sous forme d'un produit d'une translation et d'une isométrie laissant P invariant.

Le groupe G agit sur l'espace des translations (par $u^0: t \rightarrow utu^{-1}$), et y laisse invariante la forme bilinéaire non dégénérée e . On a donc $D(u^0) = \pm 1$; le déterminant $D(u^0)$ s'appelle le déterminant de l'isométrie u , et se note $D(u)$. Les isométries de déterminant 1 forment un sous-groupe d'indice 2 de G ; on les appelle les déplacements de E ; les autres s'appellent antidéplacements.

Une classe importante d'isométries est la suivante: soit V une variété linéaire non isotrope de E ; on appelle symétrie par rapport à V et on note s_V l'application $s_V(P) = 2p_V(P) - P$. Il est clair que s_V est une application affine d'ordre 2, donc surjective, et V est l'ensemble des points invariants de s_V (caract. $\neq 2$). Un petit calcul montre que toute symétrie est une isométrie (le plus simple est de prendre, brutalement, une origine dans V et une base orthogonale adaptée à V).
Calcul intrinsèque: $e(s(P), s(P')) = e(2(p(P') - p(P)) - (P' - P)) =$
 $= e(P' - P) + 4e(p(P') - p(P)) - 4(P' - P, p(P') - p(P))$; or, pour tout vecteur $\underline{x}$, on a $e(p(\underline{x})) = (\underline{x}, p(\underline{x}))$ d'après l'orthogonalité de $\underline{x} - p(\underline{x})$ et $\underline{x}$.

Réciproquement toute isométrie u d'ordre 2 est une symétrie. En effet le lieu des milieux des couples $(P, u(P))$ est l'ensemble des points invariants de u ; c'est donc une variété linéaire V ; si Q est un point de V , on a $e(P, Q) = e(u(P), Q)$, donc Q est dans le plan médiateur de $(P, u(P))$, et V est orthogonale à la droite $(P, u(P))$; ainsi tout point P de E admet une projection orthogonale sur V , à savoir le milieu de $(P, u(P))$; ceci montre que V est non isotrope, et que u est la symétrie par rapport à V .

- 54 -

Pour que la symétrie s_V soit un déplacement, il faut et il suffit que $\dim(E) - \dim(V)$ soit paire.

Dans un espace euclidien E de dimension finie n , toute isométrie u est un produit d'au plus $n+1$ symétries par rapport à des hyperplans.

Démonstration : prenons une base affine $(P_0, \dots, P_n)$ de E telle que la variété linéaire engendrée par $(P_0, \dots, P_j)$ soit non isotrope pour tout j (orthogonalisation). Montrons, par récurrence sur j , l'existence d'un produit v_j d'au plus j symétries par rapport à des hyperplans tel que uv_j^{-1} laisse invariants les points P_i pour tout $i < j$. C'est trivial pour $j=0$. On passe de j à $j+1$ en multipliant v_j par la symétrie par rapport à l'hyperplan médiateur de $(P_j, uv_j^{-1}(P_j))$ (lequel contient les P_i pour $i < j$), ou par rien du tout. Il suffit alors de prendre $j=n+1$.

(PS : j'ai l'impression que l'isotropie n'a pas été assez bien exercisée).

Lorsque n est pair, et que u est un déplacement, u ne peut être produit de $n+1$ symétries (un tel produit étant un antidéplacement) ; c'est donc un produit d'un nombre pair $2m \leq n$ de symétries par rapport à des hyperplans $H_1, \dots, H_{2m}$. Lorsque ceux-ci sont linéairement indépendants, leur intersection est non vide, et u admet au moins un point invariant. Sinon soit D l'intersection des directions des H_i ; les variétés linéaires supplémentaires-orthogonales de V sont laissées globalement invariantes par u ; et u est compatible avec le passage au quotient E/D (en termes imagés "l'effet de u sur E ne dépend que de son effet sur E/D " et " u est essentiellement un déplacement dans l'espace euclidien E/D ").

Conclusions analogues lorsque n est impair et que u est un antidéplacement.

2 - Similitudes.

On appelle similitude d'un espace euclidien E toute permutation u de E pour laquelle il existe $a \neq 0$ dans K tel que $e(u(P), u(Q)) = e(P, Q)$ pour tous points P, Q de E . Le nombre a , qui est déterminé de façon unique par u , s'appelle le multiplicateur de u . Le lemme démontré au n°1 montre qu'une similitude est une transformation linéaire affine.

Une caractérisation des similitudes est la suivante : ce sont les transformations linéaires affines qui conservent l'orthogonalité.

Démonstration : on passe à l'espace des translations et on note $B(\underline{x}, \underline{y})$ le produit scalaire de deux vecteurs libres. L'hypothèse faite sur la transformation linéaire u veut dire que $B(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ implique $B(u(\underline{x}), u(\underline{y})) = 0$; posons $B'(\underline{x}, \underline{y}) = B(u(\underline{x}), u(\underline{y}))$; c'est une forme bilinéaire non dégénérée. Comme les formes linéaires $\underline{x} \rightarrow B(\underline{x}, \underline{y})$ et $\underline{y} \rightarrow B'(\underline{x}, \underline{y})$ ont le même noyau, elles sont proportionnelles et on a $B'(\underline{x}, \underline{y}) = a(\underline{x}) \cdot B(\underline{x}, \underline{y})$ ($a(\underline{x}) \in K$). En calculant $B'(\underline{x} + \underline{x}', \underline{y})$ de deux façons différentes on obtient

$$(1) \quad a(\underline{x} + \underline{x}') (B(\underline{x}, \underline{y}) + B(\underline{x}', \underline{y})) = a(\underline{x}) B(\underline{x}, \underline{y}) + a(\underline{x}') B(\underline{x}', \underline{y}).$$

Prenons alors $\underline{x} \neq \underline{x}'$, et $\underline{y}$ orthogonal à $\underline{x}$ mais non à $\underline{x}'$; (1) donne $a(\underline{x} + \underline{x}') = a(\underline{x})$. De même $a(\underline{x} + \underline{x}') = a(\underline{x}')$. Donc $a(\underline{x})$ est constante.

Les similitudes de E forment un groupe $\underline{S}(E)$. L'application $u \rightarrow m(u)$ ($m(u)$ = multiplicateur) est un homomorphisme de $\underline{S}(E)$ dans K dont le noyau est le groupe G des isométries de E (Remarquer que ce n'est pas en général une surjection). Le groupe des symétries contient aussi le groupe des homothéties-translations (§ 3, n°5), le multiplicateur d'une homothétie-translation étant le carré de son rapport.

- 56 -

Une similitude u de E agit sur l'espace T des translations de E et donc aussi sur sa puissance extérieure n -ième ($n = \dim(E)$). On en déduit aisément que l'on a $(D(u))^2 = (m(u))^n$. Donc, si n est impair, le multiplicateur $m(u)$ est un carré b^2 et l'on a $D(u) = \pm b^n$. Si $n=2q$ est pair, on a $D(u) = \pm (m(u))^q$; les similitudes u de déterminant égal à $(m(u))^q$ sont dites directes, et forment un sous-groupe distingué d'indice 2 de $S(E)$; les autres sont dites inverses.

Toute similitude u dont le multiplicateur $m(u)$ est un carré (en particulier toute similitude d'un espace euclidien de dimension impaire) est le produit d'une homothétie et d'une isométrie.

On se ramène par translation au cas où u a un point fixe P ; on compose alors u avec l'homothétie de centre P et de rapport a^{-1} , où $a^2 = m(u)$; on obtient une isométrie.

Remarque - Dans le cas où $n=2q$ est pair et où la forme quadratique f est d'indice q , il y a deux classes de variétés linéaires totalement isotropes de dimension q (plus précisément deux classes de directions d'icelles). Et les similitudes directes sont celles qui laissent ces classes globalement invariantes, tandis que les similitudes inverses les échangent. Mais est-ce plus qu'un exercice ?

Une similitude s de multiplicateur $\neq 1$ admet un point invariant et un seul (Remarquer que l'extension de s à l'espace des translations n'admet pas 1 pour valeur propre; cf. état 2, p. 126).

3 - Inversions.

Soient O un point de l'espace euclidien E , et a un élément non nul de K . On appelle inversion de pôle O et de puissance a et on note $I(O, a)$ la permutation du complémentaire du "cône isotrope" de sommet O qui, à tout point P fait correspondre le point P' défini par

- 57 -

$$P' \neq 0 = a \cdot e(0, P)^{-1} \cdot (P - 0).$$

Une telle inversion est une permutation d'ordre 2. On a $e(0, P)e(0, P') = a^2$, et $(P - 0, P' - 0) = a$.

Le rédacteur se refuse à définir le (ou les ?) inverses d'un point du cône isotrope.

L'inverse d'une sphère S ne passant pas par 0 est une sphère (modulo le cône isotrope). En effet, p désignant la puissance de 0 par rapport à S, S est globalement invariante par $I(0, p)$; on se ramène alors à $I(0, a)$ par homothétie de centre 0 et de rapport a/p .

L'inverse d'une sphère S de centre A passant par 0 est un hyperplan H perpendiculaire à OA (modulo le cône isotrope). En, après calcul de $(P - 0 + 0 - A, P - 0 + 0 - A)$ ($= e(P, A)$) l'équation " $e(P, A) - e(0, A) = 0$ " de S se transforme en $1 + 2 \left(\frac{P - 0}{e(0, P)}, 0 - A \right) = 0$; d'où $a + 2(P' - 0, 0 - A) = 0$ pour équation du lieu de P' . C.Q.F.D.

Lorsque E ne contient pas de droites isotropes, la restriction de l'inversion précédente est une application biunivoque du complément de 0 dans S sur l'hyperplan H. Par abus de langage cette application s'appelle la projection stéréographique de S sur H. Aux "sous-sphères" de S correspondent par projection stéréographique les "sous-sphères" et les variétés linéaires de H.

Application : par inversion de pôle P_0 la recherche d'une sphère passant par $n+1$ points $(P_0, \dots, P_n)$ (formant une base affine de E et tels que les droites $P_0 P_i$ soient non isotropes) se ramène à celle d'un hyperplan passant par n points affinement indépendants. D'où (par une seconde méthode) l'existence et l'unicité de la solution.

§ 7 - ESPACES EUCLIDIENS PARFAITS.

1 - Généralités.

On appelle espace euclidien parfait un espace euclidien tel que, pour tous points P, Q de E , $e(P, Q)$ soit un carré dans K . Alors, dans le vectoriel servant à définir E (et dans tout vectoriel obtenu à partir de E par centrage), les valeurs prises par la forme quadratique f sont toutes des carrés. De même pour la forme quadratique $e(\underline{x})$ sur l'espace des translations T de E . Si l'on rapporte l'un de ceux-ci à une base orthogonale $(\underline{x}_i)$, le fait que $f(\underline{x}_i)$ est un carré a_i^2 montre que la base $(a_i^{-1} \underline{x}_i)$ est une base orthonormale. Donc toute somme de carrés d'éléments de K est un carré dans K (si $\dim(E) \geq 2$) ; en d'autres termes K est un corps pythagoricien (Exemples : algébriquement clos, ordonné maximal). Ceci montre aussi que tout carré dans K est un $e(P, Q)$.

Lorsque E est un espace euclidien parfait, le multiplicateur de toute similitude est un carré. Donc toute similitude est produit d'une homothétie et d'une isométrie.

Dans un espace euclidien parfait les sphères non vides sont celles dont l'extension est un carré.

Si V et V' sont deux variétés linéaires affines de même dimension et non isotropes d'un espace euclidien parfait, il existe un déplacement (dans E) transformant V en V' . (Par translation on peut supposer que V et V' ont un point commun, et centrer ; alors les restrictions de la forme quadratique à V' et V sont équivalentes (par orthonormalisation) ; on conclut au moyen du th. de Witt).

Considérons les orientations de E correspondant au sous-groupe de K^* réduit à l'élément unité (cf. § 4, n° 2), c'est-à-dire les éléments non nuls de $\bigwedge^n T$. L'orientation d'une base orthonormale de E n'est susceptible que de deux valeurs, d'ailleurs opposées. D'où deux classes de bases

orthonormales de E ; les déplacements les conservent et les antidéplacements les échangent. Orienter E, c'est choisir une de ces orientations (ou une de ces classes), et appeler directes (resp. rétrogrades) les bases de cette classe (resp. de l'autre).

2 - Cas d'un corps ordonné pythagoricien (en particulier maximal).

Considérons un espace euclidien parfait E sur un corps ordonné pythagoricien ; alors la forme quadratique f est strictement positive (orthonormalisation). Les $e(P,Q)$, extensions de sphères non vides et multiplicateurs de similitudes sont alors positifs. Distance $d(P,Q)$ de deux points $(= \sqrt{e(P,Q)})$; norme euclidienne $\|x\|$ d'un vecteur x $(= \sqrt{e(x)})$. Point de droites isotropes. Inégalité de Cauchy-Schwartz $((x,y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2)$ et inégalité du triangle. Si V est une variété linéaire quelconque, la projection orthogonale $p_V(P)$ est le point de V qui est le plus proche de P. Rayon d'une sphère non vide (c.à.d. dont l'extension est un carré) intérieur, extérieur, boules. On appelle rapport d'une similitude s de multiplicateur b^2 (où $b > 0$) le nombre $\text{sgn}(D(s)) \cdot b$.

Les orientations des bases orthonormales de E (n^01) correspondent aux deux orientations définies au moyen du sous-groupe K_+^* (§ 4, n^02). Les similitudes de rapport > 0 les conservent, les autres les échangent.

Supposons de plus que K soit un corps ordonné maximal. Alors toute sphère d'extension positive est non vide. D'où : condition de rencontre d'une sphère et d'une variété linéaire, et condition de rencontre de deux sphères (distance des centres entre la somme et la différence des rayons).

§ 8 - GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE. ANGLES.

1 - Rotations et similitudes.

Soit E un plan euclidien sur un corps K . Nous étudierons d'abord les similitudes et isométries de E laissant fixe un point O de E . Par centrage en O , E devient un espace vectoriel, muni d'une forme quadratique notée e . Par orthogonalisation supposons choisie une base de E telle que $e(\underline{x}) = ax_1^2 + bx_2^2$ (x_1 et x_2 étant les composantes du vecteur $\underline{x}$). Alors E s'identifie à K^2 , que nous identifierons lui-même à l'algèbre quadratique $K' = K + Ki$, où $i^2 = -b/a$. Etant donné un élément $\underline{x} = x_1 + x_2 i$ de K' , nous noterons $\underline{x}^0 = x_1 - x_2 i$ son conjugué, $N(\underline{x}) = \underline{x}\underline{x}^0$ sa norme et $\text{Tr}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{x}^0$ sa trace. On a

$$(1) \quad e(\underline{x}) = aN(\underline{x}), \quad (\underline{x}, \underline{y}) = a \cdot \text{Tr}(\underline{x}\underline{y}^0).$$

Lorsque $-b/a$ n'est pas un carré, K' est un corps, et y'a point de droites isotropes. Lorsque $-b/a$ est un carré c^2 , y'a des diviseurs de zéro dans K' ; ceux-ci forment les deux droites isotropes (d'équations $cx_1 \pm x_2 = 0$); forme rapportée à la base $c+1, c-1$.

Une similitude s de E laissant O fixe est une application K -linéaire telle que $N(s.\underline{x}) = m(s).N(\underline{x})$ ($m(s)$: multiplicateur); posons $\underline{y} = s.\underline{1}$; l'application $s': \underline{x} \rightarrow \underline{y}\underline{x}$ est une similitude (multiplicativité des normes) de même multiplicateur $N(\underline{y})$ que s , et telle que $s.\underline{1} = s'.\underline{1} = \underline{y}$. Alors $u = ss'^{-1}$ est une isométrie laissant $\underline{1}$ invariant; comme, d'après (1), on a $\text{Tr}(u.\underline{x}) = \text{Tr}(\underline{x})$, on doit avoir $u.\underline{i} = \pm \underline{i}$; c'est donc l'identité ou la conjugaison. Ainsi les similitudes laissant O fixe sont de la forme (2) $\underline{x} \rightarrow \underline{y}\underline{x}$ ou $\underline{x} \rightarrow \underline{y}\underline{x}^0$, où $\underline{y}$ est non isotrope (afin que le multiplicateur $N(\underline{y})$ soit $\neq 0$); les premières sont les similitudes directes (car $\det(s) = N(\underline{y})$; cf. § 6, n°2), et forment

- 61 -

un sous-groupe d'indice 2 ; les autres sont les similitudes inverses.

La matrice de $\underline{x} \rightarrow \underline{y}\underline{x}$ est $\begin{pmatrix} y_1 & -(b/a)y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$ (où $\underline{y} = y_1 + y_2 \underline{i}$)

Les isométries sont de la forme (2) avec $N(\underline{y})=1$, les premières étant les déplacements (ou rotations), les autres les antidéplacements. Ces derniers ne sont d'ailleurs autres que les symétries par rapport aux droites non isotropes.

Ceci nous donne aussitôt la structure des groupes S^+ et O^+ des similitudes directes et des rotations laissant 0 invariant :

a) si e est d'indice 0, S^+ est isomorphe à K^* et O^+ au groupe des éléments de norme 1 (c.à.d. des éléments $\underline{z}/\underline{z}^0$ d'après Hilbert).

b) Si e est d'indice 1, on passe à la base $(c+\underline{i}, c-\underline{i})$; on a $N(y_1(c+\underline{i})+y_2(c-\underline{i})) = 4c^2 y_1 y_2$; alors S^+ est isomorphe à $K^* \times K^*$ et O^+ à K^* .

En tout cas tout ce beau monde est abélien.

Remarque - Tout élément $\underline{y}$ de norme 1 est de la forme $\underline{z}/\underline{z}^0$

(ça marche aussi dans le cas d'indice 1), où $\underline{z}$ est déterminé à un élément de K^* près. Prenant $\underline{z} = \underline{1} + t\underline{i}$ (le cas laissé de côté s'arrangeant en prenant t infini), la matrice de la rotation

$\underline{x} \rightarrow \underline{y}\underline{x}$ s'écrit, après un petit calcul :

$$(1 + (b/a)t^2) \begin{pmatrix} 1-(b/a)t^2 & -2(b/a)t \\ 2t & 1-(b/a)t^2 \end{pmatrix}$$

On retrouve ceci à la "tangente de l'arc moitié".

Pour que toute similitude de E soit le produit d'une homothétie et d'une isométrie, il faut et il suffit que E soit parfait (On a vu le "il suffit" au § 7 ; pour le "il faut" on remarque que les multiplicateurs de similitudes sont les nombres de la forme $N(\underline{y})$, c.à.d. les "extensions").

2 - Angles de droites. Tangente.

La formule $s \cdot x = yx$ pour une similitude directe s montre que le groupe S^+ opère transitivement sur l'ensemble des vecteurs non isotropes de E , donc sur l'ensemble des droites non isotropes passant par O . Les similitudes directes laissant invariante (globalement) une droite non isotrope passant par O sont les homothéties (car on doit avoir $y \in K$) ; elles laissent alors invariantes toutes les droites passant par O ; notons H le groupe des homothéties de centre O .

Etant données deux droites non isotropes D, D' passant par O , les similitudes s telles que $s(D)=D'$ sont bien déterminées mod. H ; on appelle l'élément correspondant du groupe quotient S^+/H l'angle du couple de droites (D, D') , ou l'angle que fait D' avec D , ou l'angle des similitudes s amenant D sur D' ; on le note $\widehat{(D, D')}$. En notant additivement le groupe $A_0 = S^+/H$ (qu'on appelle le groupe des angles de droites) on a les formules :

$$(3) \quad \widehat{(D, D)}=0, \quad \widehat{(D, D')}=-(\widehat{D', D}), \quad \widehat{(D, D'')}=(\widehat{(D, D')}+(\widehat{D', D''})).$$

Remarque : le groupe A_0 est isomorphe à K^*/K^* si la forme est d'indice 0, à $(K^* \times K^*)/\text{Diag.}$ si elle est d'indice 1.

Les relations $\widehat{(D_1, D_2)}=(\widehat{D_1', D_2'})$ et $\widehat{(D_1, D_1')}=(\widehat{D_2, D_2'})$ sont équivalentes puisque A_0 est abélien ; elles expriment qu'il existe une similitude directe amenant D_1 en D_2 et D_1' en D_2' .

Comme l'orthogonalité est conservée par similitude l'angle $\widehat{(D, D')}$ d'un couple de droites orthogonales est indépendant de ce couple. On l'appelle l'angle droite. C'est l'unique solution non nulle de l'équation $2\theta = 0$ dans A_0 .

- 63 -

En effet une similitude $s(\underline{x}) = \underline{y}\underline{x}$ dont l'angle satisfait à $2\theta = 0$ a pour carré une homothétie ; autrement dit $\underline{y}^2 \in K$; d'où $\underline{y} \in K$ ou $\underline{y} \in K_i$. Dans le premier cas son angle est nul, dans le second il est droit.

Définition de l'angle de deux droites quelconques de E par translation.

Une classe de similitudes mod.H détermine de façon unique une similitude de la forme $\underline{x} \rightarrow (1+t\underline{i})\underline{x}$ (si son angle n'est pas droit ; sinon l'on pose $t = \infty$). On appelle t la tangente de l'angle α égal à cette classe de similitudes (par rapport à la base orthogonale choisie dans E), et on le note $\text{tg } \alpha$; c'est un élément de K_∞ . Deux bases orthogonales se déduisant l'une de l'autre par similitude donnent les mêmes tangentes. Tangente=pente. Le calcul de $(1+t\underline{i})(1+t'\underline{i})$ donne :

$$(4) \quad \text{tg}(\alpha + \alpha') = (\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha') / (1 - (b/a) \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \alpha')$$

(avec les précautions d'usage sur ∞).

Lorsque la forme est d'indice 1, $-b/a$ est un carré c^2 , et les droites isotropes I et J ont pour pentes $1/c$ et $-1/c$; étant donnée une droite non isotrope D faisant l'angle α avec l'axe "réel" D_0 , le birapport (I, J, D_0, D) est égal à $(1 - c \cdot \text{tg } \alpha) / (1 + c \cdot \text{tg } \alpha)$.

Transport à K_∞ (ou K_∞ moins les deux points $1/c, -1/c$), au moyen de l'application $\alpha \rightarrow \text{tg } \alpha$, de l'addition sur Λ_0 .

3 - Angles de droites pointées. Sinus et cosinus.

Le groupe O^+ des rotations laissant O invariant n'opère pas en général transitivement sur l'ensemble des droites non isotropes passant par O : en effet, si D rencontre certain cercle C de centre O, toutes ses transformées par rotations doivent rencontrer C, ce qui n'est pas le cas de toutes les droites si E n'est pas un espace euclidien parfait.

- 64 -

Par contre O^+ opère transitivement sur tout cercle C de centre O (la rotation $\underline{x} \rightarrow (\underline{z}'/\underline{z}) \cdot \underline{x}$ amenant le point $\underline{z}$ de C au point $\underline{z}'$ de C , et celle-ci est unique).

Etant donné un cercle C de centre O , on appelle droite pointée (relative à C) tout couple $(D, \underline{x})$ où D est une droite passant par O et rencontrant C , et où $\underline{x}$ est l'un de ses deux points de rencontre avec C ; on note $D_{\underline{x}}$ une telle droite pointée, et l'on dit qu'elle est portée par D ; la droite D porte deux droites pointées $D_{\underline{x}}$ et $D_{-\underline{x}}$. L'ensemble des droites pointées est en correspondance biunivoque avec C au moyen de $D_{\underline{x}} \rightarrow \underline{x}$.

Relation d'équivalence $(D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}}) \sim (D_{\underline{x}'}, D_{\underline{y}'})$ (resp. $(\underline{x}, \underline{y}) \sim (\underline{x}', \underline{y}')$) entre couples de droites pointées (resp. de points de C) définie par "une rotation amène un couple sur l'autre". Les ensembles quotients correspondant A^+ et A_C sont appelés l'ensemble des angles de droites pointées et l'ensemble des écarts circulaires (sur C); la classe du couple $(D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}})$ (resp. $(\underline{x}, \underline{y})$) se note $\widehat{(D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}})}$ (resp. $\widehat{(\underline{x}, \underline{y})}$) et s'appelle l'angle des droites pointées $D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}}$ (resp. l'écart circulaire des points $\underline{x}, \underline{y}$ de C). Les ensembles A^+ et A_C sont en correspondance biunivoque canonique avec le groupe O^+ des rotations, $\widehat{(D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}})}$ et $\widehat{(\underline{x}, \underline{y})}$ correspondant à l'unique rotation $\underline{z} \rightarrow (\underline{y}/\underline{x}) \cdot \underline{z}$ amenant $\underline{x}$ en $\underline{y}$; cette rotation est dite la rotation d'angle $\widehat{(D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}})}$. On transporte à A^+ et à A_C la structure de groupe de O^+ , ce qui en fait des groupes abéliens, qu'on note additivement. Formules analogues aux formules (3) (n^02).

Angle plat $\widehat{(D_{\underline{x}}, D_{-\underline{x}})}$, unique solution non nulle de $2\theta = 0$ dans A^+ .

L'application $\widehat{(D_{\underline{x}}, D_{\underline{x}'})} \rightarrow \widehat{(D, D')}$ est un homomorphisme de A^+ dans A_O , faisant correspondre un angle de droites θ à un angle θ de droites pointées

Son noyau est $(0, \text{plat})$. Il est obtenu par transport de l'homomorphisme canonique $0^+ \rightarrow S^+/H$. Son image A_0^+ est isomorphe à $0^+ / (\text{identité, symétrie})$.

Etant donnée un angle $\theta \in A^+$, la rotation d'angle θ est déterminée de façon unique ; si nous l'écrivons $\underline{x} \rightarrow \underline{y} \cdot \underline{x}$, où $\underline{y} = y_1 + y_2 \underline{i}$, l'on appelle y_1 et y_2 le cosinus et le sinus de θ , (par rapport à la base choisie) et on les note $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Le fait que $N(\underline{y})=1$ donne la relation :

$$(5) \quad \cos^2 \theta + (b/a) \sin^2 \theta = 1$$

(qui est d'ailleurs nécessaire et suffisante pour que deux nombres de K soient le cosinus et le sinus d'un même angle). Notons $\underline{r}(\theta)$ l'élément $\underline{y} = \cos \theta + \underline{i} \sin \theta$; formule de Moivre $\underline{r}(\theta + \theta') = \underline{r}(\theta) \cdot \underline{r}(\theta')$; application aux formules d'addition des sinus et cosinus. Les sinus et cosinus ne changent pas si l'on change de base orthogonale par rotation.

Relations entre $\sin \theta$, $\cos \theta$ et $\text{tg } \tilde{\theta}$ ($\tilde{\theta}$: angle de droites correspondant à l'angle θ de droites pointées ; on note souvent $\text{tg } \theta$ au lieu de $\text{tg } \tilde{\theta}$) : $\text{tg } \theta = \sin \theta / \cos \theta$, $1 + (b/a) \text{tg}^2 \theta = \cos^{-2} \theta$.

Exercice : retrouver la formule d'addition des tangentes à partir de celles des sinus et cosinus.

Considérons la rotation $\underline{x} \rightarrow \underline{r}(\theta) \underline{x}$ d'angle θ ; elle amène l'axe "réel" pointé par $\underline{1}$, soit D_1 , sur la droite pointée $D_{\underline{r}}$ (θ étant ici le cercle unité). On peut écrire (th. 90) $\underline{r}(\theta) = \underline{z} / \underline{z}^0$, où $\underline{z}$ est déterminé à un élément de K^* près. Il correspond donc à θ une droite bien déterminée $B(\theta)$ (lieu des points $\underline{z}$). En notant t sa pente (c.à.d. la tangente de l'angle que fait $B(\theta)$ avec l'axe réel), on a (cf. n°1) les formules :

$$(6) \quad \cos \theta = (1 - (b/a)t^2) / (1 + (b/a)t^2), \quad \sin \theta = 2t / (1 + (b/a)t^2).$$

$$(7) \quad t = \sin \theta / (1 + \cos \theta).$$

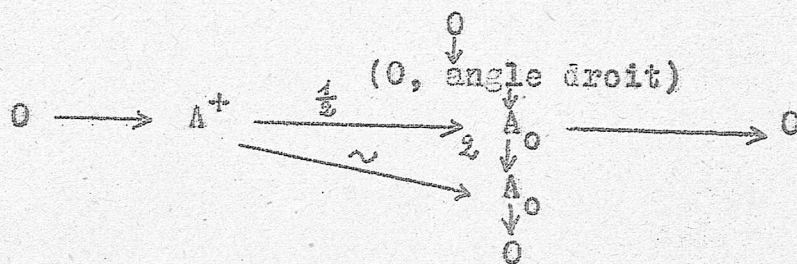
- 66 -

La multiplicativité de l'application $\underline{z} \rightarrow \underline{z}/\underline{z}^0$ montre que l'application biunivoque (qu'on note $\theta \rightarrow \frac{1}{2} \theta$), qui fait correspondre à l'angle θ de droites pointées l'angle (de droites) que fait $B(\theta)$ avec l'axe réel, est un isomorphisme de A^+ sur A_0 . La formule $\underline{x}(\theta) = \underline{z}/\underline{z}^0$ montre aussitôt que l'on a $\gamma = 2.(\frac{1}{2} \theta)$. Les points $\underline{1}$ et $\underline{x}(\theta)$ sont symétriques par rapport à la droite $B(\theta)$, ladite symétrie étant $\underline{x} \rightarrow (\underline{z}/\underline{z}^0)\underline{x}^0$; donc $B(\theta)$ est l'une des deux bissectrices des droites portant $\underline{D}_1$ et $\underline{D}_r$; on l'appelle la bissectrice intérieure des droites pointées $\underline{D}_1$ et $\underline{D}_r$.

On remarquera que c'est là le seul cas où deux droites ont des bissectrices non réduites à 0 : le cas où elles rencontrent les mêmes cercles (de centre 0).

On remarquera aussi que la droite $B(\theta)$ est parallèle à la droite joignant les points $\underline{1}$ et $\underline{x}(\theta)$ (c'est ce qu'exprime la formule (7)).

Pour ceux qui n'auraient pas compris, voici un diagramme :



4 - Cas d'un corps ordonné. Angles de demi-droites. Secteurs angulaires.

Soit E un plan euclidien sur un corps ordonné K (mêmes notations qu'au n°1). On voit aussitôt (comme ci-dessus) que le groupe S^+ des similitudes directes laissant O fixe opère transitivement sur l'ensemble des demi-droites non isotropes d'origine O , et que le sous-groupe de S^+ laissant une demi-droite invariante les laisse toutes invariantes; c'est le sous-groupe H^+ des homothéties de rapport > 0 .

Relation d'équivalence entre couples de demi-droites. Angle $\widehat{(D,D')}$ des demi-droites D,D' comme élément du quotient ; ouverture du secteur angulaire $S(D,D')$. Le groupe A des angles de demi-droites ; il est canoniquement isomorphe à S^+/H^+ .

Angles saillants et rentrants (cf. secteurs angulaires, § 4, n°3)

Angle plat. Les deux angles droits.

Angle de droites correspondant à un angle de demi-droites ; homomorphisme $A \rightarrow A_0$ transporté de l'homomorphisme canonique $S^+/H^+ \rightarrow S^+/H$; son noyau est $(0, \text{angle plat})$. D'où la tangente d'un angle de demi-droites (qui ne le détermine pas).

Pour le sinus et le cosinus, ça va moins bien, car il faut extraire des racines carrées. Lorsqu'une demi-droite D rencontre un cercle C de centre O , elle le rencontre en un seul point x , et ceci associe une droite pointée D_x à D . On pourra donc parler de l'angle des demi-droites D,D' prises en tant que droites pointées (et donc définir son sinus et aussi son cosinus) ~~à condition~~ à condition que D et D' rencontrent un (et donc les) même(s) cercle (s). Il y a donc un sous-groupe de A qui s'identifie à A^+ (0^+ s'identifiant à un sous-groupe de S^+/H^+ car $0^+ \cap H^+ = (1)$), et ses éléments possèdent (les veinards!) un sinus et un cosinus.

Voici un diagramme :



Etant donné un vecteur non isotrope $\underline{z}$ de E (c.à.d. un élément inversible de l'algèbre quadratique K') on appelle amplitude de $\underline{z}$ et on note $Am(\underline{z})$ l'angle que fait la demi-droite d'origine O passant par $\underline{z}$ avec la demi-droite réel positif. Représentation $\underline{z} \rightarrow Am(\underline{z})$ du groupe multiplicatif de K' sur le groupe additif A . On a $Am(\underline{z}^0) = -Am(\underline{z})$ si $\underline{z}\underline{z}^0 > 0$, et $Am(\underline{z}^0) = Am(\underline{z})$ si $\underline{z}\underline{z}^0 < 0$.

Etant donnés deux points $\underline{x}, \underline{y}$ d'un même cercle C de centre O , on appelle arc d'origine $\underline{x}$ et d'extrémité $\underline{y}$ l'intersection de C et du secteur angulaire $S(D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}})$; noté $\widehat{\underline{xy}}$; amplitude de cet arc (égale à l'écart circulaire, ou à l'angle des demi-droites $D_{\underline{x}}, D_{\underline{y}}$ après identification); angle au centre.

Définition de l'angle de deux demi-droites quelconques de E (par translation). Somme des angles d'un triangle (oui), d'un polygone connexe (??).

5 - Angle inscrit et angle au centre.

Considérons un cercle C de centre O , deux points P, Q de C , et un troisième point M de C . Dans le cas général on ne peut considérer que l'angle (MP, MQ) des droites MP, MQ . La considération du diamètre de C passant par M , l'utilisation d'une propriété démontrée aux bissectrices (n°3) et un petit calcul d'angles $((MP, MQ) = (MP, MO) + (MO, MQ), \dots)$ montrent que l'angle de droites (MP, MQ) est égal à $\frac{1}{2}(OP, OQ)$ ((OP, OQ) étant un angle de droites pointées). Réciproquement le lieu des points M d'où "l'on voit" deux points donnés P et Q sous un angle constant (de droites) est un cercle (non vide, et tout entier) passant par P et Q .

Démonstration. On remarque que, sur une droite passant par P , il ne peut y avoir plus d'un point du lieu (en dehors de P). On construit alors un point M du lieu sur une telle droite

- 69 -

($\neq$ PQ, et $\neq$ la droite faisant l'angle donné avec PQ). Le cercle par PQM fait partie du lieu. Et y'a rien d'autre d'après la remarque faite en premier lieu.

Cas de l'angle droit : cercle de diamètre PQ.

Lorsque le corps K est ordonné, on peut parler de l'angle de demi-droites (MP, MQ). On a $2(MP, MQ) = (OP, OQ)$; si M est sur celui des deux arcs PQ qui correspond à un secteur rentrant (resp. saillant) (MP, MQ) reste constant et égal à (OP, OB) (resp. (OP, OB)+plat), OB désignant la bissectrice intérieure de OP et OQ (si y'en a une).

Démonstration. Y'en a marre.

5 - Angles dans les espaces euclidiens parfaits.

Les choses se simplifient beaucoup. Toutes les droites (par O) rencontrent tous les cercles de centre O. Tout le monde a un sinus, un cosinus, une bissectrice intérieure.

Si le corps pythagoricien K est, en plus, ordonné, on reconnaît les angles saillants par le signe de leur sinus ; parmi eux on peut encore distinguer les angles aigus et obtus d'après le signe de leur cosinus.

Dans un espace euclidien parfait de dimension $n > 2$, les déplacements (et similitudes naturellement aussi) opèrent transitivement sur l'ensemble des plans. L'ennui est que certains déplacements échangent entre elles les droites, droites pointées ou demi-droites dont on voudrait chercher l'angle. Celui-ci ne peut donc être défini qu'au signe près, et ça ne donne pas de groupe. On a tout de même un cosinus ; formules au moyen du produit scalaire.

On peut aussi faire la théorie des angles dièdres, ou angles d'hyperplans. Mais il n'y a pas besoin de supposer E parfait, car c'est trivial: on s'induit sur le plan perpendiculaire aux deux hyperplans donnés.

7 - Généralisation quaternionique et multidimensionnelle.

Nous avons vu au n°1 comment les similitudes de la géométrie plane s'interprètent comme multiplications de "nombres complexes", et nous en avons été fort aise. Notre but est de faire ici le même coup aux espaces de dimension 4, et ceci au moyen des quaternions.

Considérons une forme quadratique sur E, rapportée à une base orthonormale, soit $e(\underline{x}) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2$. Comme la norme du quaternion $y_1 + y_2\underline{i} + y_3\underline{j} + y_4\underline{k}$ (relatif au couple (c,d)) est $y_1^2 - cy_2^2 - dy_3^2 + cdy_4^2$, son discriminant est un carré c^2d^2 . Afin que $e(\underline{x})$ soit proportionnel à $N(\underline{x})$, nous devons donc supposer que son discriminant $a_1a_2a_3a_4$ est un carré.

S'il n'en est pas ainsi, l'on étend quadratiquement le corps K ce qui complique un peu les choses.

Alors a_1a_4/a_2a_3 est un carré, et, en remplaçant l'un des x_i par un multiple convenable, l'on peut supposer que $a_1a_4 = a_2a_3$. Alors, si l'on associe au vecteur $\underline{x}$ le quaternion $x_1 + x_2\underline{i} + x_3\underline{j} + x_4\underline{k}$ (relatif au couple $(-a_2/a_1, -a_3/a_1)$), on a $e(\underline{x}) = N(\underline{x}) \cdot a_1$. Pour étudier les isométries et similitudes de E (laissant 0 fixe) on peut donc supposer que l'on a $e(\underline{x}) = N(\underline{x})$.

La multiplicativité des normes montre que les applications $\underline{x} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{x}$ et $\underline{x} \rightarrow \underline{x} \cdot \underline{a}$ (où $\underline{a}$ est non isotrope, c'est-à-dire inversible) sont des similitudes de E. Réciproquement toute similitude directe s de E (telle que $s(0)=0$) est de la forme $\underline{x} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{x} \cdot \underline{b}$ ($\underline{a}, \underline{b}$ inversibles).

- 71 -

Démonstration. On se ramène aussitôt au cas où $s(\underline{1})=\underline{1}$ (s est alors une isométrie). L'espace des quaternions "purs" est invariant par s , en tant que supplémentaire orthogonal de l'axe réel ; pour un tel quaternion $\underline{x}$, on a $\underline{x}^2 \in K$, d'où $s(\underline{x}^2)=\underline{x}^2$, et $s(\underline{x}^2)=s(\underline{x}).s(\underline{x})$ puisque s conserve les normes. D'autre part, si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des quaternions purs, $\underline{x}.\underline{y}$ est un quaternion pur orthogonal à $\underline{x}$ et $\underline{y}$; donc $s(\underline{x}.\underline{y})$ est de la forme $a.s(\underline{x}).s(\underline{y})$ ($a \in K$) ; comme s conserve les normes on doit avoir $a=1$ ou $a=-1$; le second cas est exclus du fait que s est une similitude directe. Par conséquent s est multiplicative sur la base $(1, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. C'est donc un automorphisme de l'algèbre de quaternions K' . Et le th. de Skolem-Noether montre que c'est un automorphisme intérieur : $s(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x}.\underline{a}^{-1}$. On remarquera que $\underline{a}$ est déterminé à un facteur scalaire non nul près (et de même $\underline{a}$ et $\underline{b}$ dans le cas général) ; n'y aurait-il pas une certaine parenté entre le th. de Skolem-Noether et le th. 90 ?

Les déplacements sont caractérisés par $N(\underline{a}.\underline{b})=1$. Ceci donne la structure des groupes des déplacements et des similitudes directes de E .

Le cas où cette méthode quaternionniqu est la mieux adaptée est celui où $e(\underline{x})$ est d'indice 0 et de déterminant carré (en particulier dans le cas "classique") ; sinon l'on a à tenir compte des droites isotropes (qui fournissent des bases plus commodes), et aussi de l'extension quadratique du corps de base. Mais sont-ce là plus que des exercices ?

Le cas d'un espace euclidien E de dimension 3 se ramène à celui de la dimension 4. Par multiplication par une constante on ramène la forme $e(\underline{x})$ sur E à être de la forme $e(\underline{x}) = a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_2 a_3 x_4^2$, et l'on

plonge E dans un espace euclidien E' de dimension 4 muni de la forme quadratique $e'(\underline{x}) = x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_2 a_3 x_4^2$. L'on a alors $e'(\underline{x}) = N(\underline{x})$, si l'on identifie $\underline{x}$ au quaternion $x_1 + x_2 \underline{i} + x_3 \underline{j} + x_4 \underline{k}$ (relatif au couple $(-a_2, -a_3)$).

On peut comparer comme suit les indices de $e(\underline{x})$ et de $e'(\underline{x})$: on remarque que, si $\underline{x}$ est un élément non nul de K' , l'idéal $K'\underline{x}$ est au moins de dimension 2 sur K (écrivons $\underline{x} = \underline{a} + \underline{v}$ avec $\underline{a} \in K$, $\underline{v} \in E$; il existe $\underline{w}$ dans E non isotrope et orthogonal à $\underline{v}$; alors $\underline{w}(\underline{a} + \underline{v})$ est linéairement indépendant de $\underline{a} + \underline{v}$, comme on le voit en mettant $\underline{w}$ dans une base du type $(\underline{1}, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$). Or, si $\underline{x}$ est isotrope, tout élément de $K'\underline{x}$ est aussi isotrope. Donc, si e est d'indice 1, e' est d'indice au moins 2, donc 2. Et si e est d'indice 0, e' est aussi d'indice 0, car, si $\underline{x} \in K'$ était isotrope, $K'\underline{x}$ aurait en commun avec E (qui est de dimension 3) un vecteur non nul et isotrope.

Le groupe des rotations de E s'identifie alors au groupe des rotations de E' laissant $\underline{1}$ invariant, donc aux rotations de la forme $\underline{x} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}^{-1}$, c'est-à-dire à K'^*/K^* (K'^* : éléments inversibles de K'). Pour les similitudes s , elles sont de la forme $s(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x} \cdot \underline{b}$, où $s(\underline{1}) = c \cdot \underline{1} \in K$; donc $\underline{b} = c \cdot \underline{a}^{-1}$, et $s(\underline{x}) = c \cdot \underline{a} \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}^{-1}$ est produit d'une homothétie et d'un déplacement, (comme il se doit en dimension impaire).

La "partie vectorielle" $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{a}^0)$ du quaternion $\underline{a}$ définissant la rotation $\underline{x} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{x} \cdot \underline{a}^{-1}$ est portée par l'axe de cette rotation (c.à.d. le lieu de ses points fixes, ou encore l'ensemble des éléments de E permutant avec $\underline{a}$). L'angle θ de cette rotation vérifie $\operatorname{tg}^2(\frac{1}{2} \theta) = N(\underline{a} + \underline{a}^0) / N(\underline{a} - \underline{a}^0)$. Lorsque $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des éléments de E , leur produit $\underline{x} \cdot \underline{y}$ est la somme du produit scalaire et du produit vectoriel de $\underline{x}$ et $\underline{y}$.

DIVERS, A AJOUTER OU A NE PAS AJOUTER.

Interprétation projective de la Géométrie Euclidienne.

Chacun sait que, si l'on plonge un espace euclidien E (considéré comme espace affine) dans un espace projectif P , les similitudes de E ne sont autres que les transformations projectives de P qui laissent invariante la variété à l'infini des cônes isotropes, dite ombilicale. On sait aussi que les variétés linéaires isotropes de E correspondent aux génératrices rectilignes de cette quadrique. Mais il y a deux canulars. 1) L'ombilicale est vide dans le cas d'une forme d'indice 0 ; si l'on veut s'en tenir au point de vue ensembliste, il faut alors passer à la clôture algébrique du corps de base, et ce n'est pas ici le lieu ; l'on peut aussi considérer l'ombilicale comme un système de deux équations, et dire, par exemple que les équations des sphères sont les équations quadratiques qui se trouvent dans l'idéal engendré par les deux équations définissant l'ombilicale, et c'est encore moins ici le lieu ; remarquons aussi que la formule de Lapaix, reliant angle et birapport, a été démontrée au § 8, n°2, ce qui ne laisse que des tûpinades. 2) La donnée de l'ombilicale ne définit la forme quadratique de la Géométrie Euclidienne qu'à un facteur près ce que le rédacteur juge ennuyeux.

Géométrie non euclidienne.

On considère un espace projectif P_n , une quadrique Q dedans (l'absolu), ou plutôt son équation (à un facteur près), et les transformations projectives de P_n laissant Q globalement invariante (ou plutôt son équation invariante à un facteur près) ; ça fait un groupe, et les classes

d'intransitivité d'icelui sont dites "espaces non euclidiens". Il revient au même de considérer P_n comme quotient d'un vectoriel V_{n+1} muni d'une forme quadratique, et de passer au quotient projectif les similitudes de V laissant l'origine fixe (c.à.d. considérer S_0/H_0 ; S_0 : groupe des similitudes laissant 0 fixe ; H_0 : homothéties de centre 0). Le rédacteur de l'état 1 a distingué la géométrie elliptique (quand V est un espace euclidien parfait), et la géométrie hyperbolique (quand V a un corps de base ordonné maximal, et que sa forme quadratique est d'indice 1), et a défini distances et angles dans ces deux géométries ; je me dispense de le recopier. Je ne m'oppose pas à ce que ceci figure dans Bourbaki. Cependant, si l'on vide l'interprétation projective de la géométrie euclidienne, la méthode précédente d'introduction des géométries non euclidiennes n'est rattachée à rien ; et, si l'on ne vide pas cette interprétation, il faudra dire comment l'absolu non euclidien vient "dégénérer" (tangentielllement) en l'ombilicale euclidienne, ce qui sera horrible.

Géométrie pentasphérique, cyclides de Dupin, transformation de Lie.

Pour qui me prenez-vous, Madame ? Je ne suis pas un ^{lie} exhibitioniste.

Géométrie euclidienne de dimension 6 et de forme d'indice 3 .

Le rédacteur s'aperçoit que ça figurait tout à la fin de l'état 1, et pense que ça fera un très bel exercice.

Octaves de Cayley, géométrie des groupes exceptionnels, principe de trialité.

Ce sont les cyclides de Dupin de l'an 2.000. Voir plus haut.

Géométrie hermitienne.

Voici enfin quelque chose de sérieux (et de facile). On a un corps K ,

- 75 -

extension quadratique séparable de K_0 , un vectoriel V sur K , et une forme hermitienne sur V (relative à l'automorphisme non identique de K sur K_0). On considère les permutations de V de la forme (transformation unitaire + translation). Et l'on fait trotter son âne comme dans le cas euclidien. Forme métrique. Produit scalaire.

Similitudes hermitiennes. Ce sont les transformations affines de l'espace hermitien E qui conservent l'orthogonalité hermitienne.

On remarquera qu'un espace hermitien E^n sur K a son espace affine sous-jacent E_0^{2n} sur K_0 muni d'une structure d'espace euclidien. Les permutations de E qui conservent la forme métrique à un facteur près sont donc (lemme du n°1, § 6) des transformations affines sur K_0 . Mais on ne prend comme similitudes hermitiennes que celles qui sont affines sur K .

Multiplicateur d'une similitude ; c'est un élément de K_0 ; pour une homothétie-translation c'est une norme ; même histoire de parité de dimension qu'au n°2, § 6 (avec "normes" au lieu de "carrés"). Isométries hermitiennes ; ce sont les similitudes de multiplicateur 1 ; en dimension impaire toute similitude hermitienne est produit d'une homothétie et d'une isométrie.

C'est ici qu'il faut héberger le groupe unitaire, chassé du chap.VIII.

Le cas où E est de dimension 2 est amusant. On prend une origine et une base orthogonale telle que la forme hermitienne s'écrive (à un facteur près) $y_1 \bar{y}_1 + a y_2 \bar{y}_2$ ($a \in K_0$). Ecrivons $K = K_0 + K_0 i$, ($i^2 \in K_0$)
 $y_m = x_m + x'_m i$, $\bar{y}_m = x_m - x'_m i$ ($m=1,2$). Si l'on identifie le point $\underline{y} = (y_1, y_2)$ de E au quaternion $x_1 + x'_1 i + x_2 j + x'_2 k$ (où $i^2 =$ ce qu'il faut, $j^2 = -a$, $k = i \cdot j$), la forme hermitienne s'écrit $N(\underline{y})$. Les similitudes hermitiennes de E (laissant 0 fixe) sont alors des permutations

- 76 -

de E de la forme $Y \rightarrow \underline{a} \cdot Y \cdot \underline{b}$ ($\underline{a}, \underline{b}$: quaternions) (§ 8, n° 7), et, comme ce sont des applications K -linéaires, elles doivent commuter avec la multiplication (à gauche) par $\underline{i}$; on doit donc avoir $\underline{a} \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot \underline{a}$ (tiens, voilà notre âne !), c'est-à-dire $\underline{a} \in K_0 + K_0 \underline{i}$. L'élément $\underline{a}$ (qui doit être inversible) n'est déterminé qu'à un facteur non nul de K_0 près (car on s'arrange alors avec $\underline{b}$). D'où le groupe des similitudes de E (isomorphe à $(K^* \times K'^*_{\text{opposé}})/K_0^*$). Le multiplicateur de la similitude $Y \rightarrow \underline{a} \cdot Y \cdot \underline{b}$ est $N(\underline{a}) \cdot N(\underline{b})$, et son déterminant (sur K) est $\underline{a}^2 \cdot N(\underline{b})$ ($\underline{a} \in K$). Pour que ce soit une similitude propre (c'est-à-dire de déterminant égal à $(\text{multiplicateur})^{\dim(E)/2}$), il faut et il suffit que l'on ait $\underline{a}^2 = N(\underline{a})$, c'est-à-dire $\underline{a} \in K_0$; ainsi l'on peut prendre $\underline{a} = \underline{1}$, et le groupe des similitudes propres de E est isomorphe au groupe multiplicatif de l'algèbre de quaternions opposée de K' .

Le théorème fondamental de la Géométrie Projective.

C'est celui qui dit qu'une bijection d'un projectif dans un autre qui conserve la coplanarité (ou la collinéarité) est une "semi-projectivité" (=projectivité + isomorphisme des corps de base). Ceci figurait en Appendice dans l'état 1. Et c'est un joli résultat. Mais, comme on a vidé les semi-projectivités de l'état 1, il semble difficile à garder.

Un joli résultat (fort éculé) du même genre est le suivant : une permutation d'une droite projective qui conserve les divisions harmoniques est composée d'une projectivité et d'un automorphisme (caract. $\neq 2$, bien sûr). Démonstration : on se ramène aussitôt au cas où $0, 1$ et ∞ sont invariants ; alors l'on constate que la permutation f satisfait $f(1/x) = 1/f(x)$, $f(\frac{1}{2}(x+y)) = \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$, $f(-x) = -f(x)$;

- 77 -

donc f est additive et $f(1/x) = 1/f(x)$; on conclut que f est un automorphisme au moyen de l'identité de Hua. Le théorème fondamental de la Géométrie Projective se ramène à ce résultat au moyen des th. de Ménélaüs et de Céva (construction du 4^{ème} harmonique par la règle seulement ; cf. § 2, n°5)

Sont-ce là plus que de plaisans exercices ?

Géométrie symplectique.

Il va falloir héberger quelque part le groupe symplectique. Le plus naturel serait de faire un petit paragraphe de géométrie symplectique sur le modèle des §§ euclidien et hermitien. Mais, à part les trivialités asinitrottantes, et à part ce qu'il y a dans le bouquin de Dieudonné sur la simplicité du groupe symplectique (et ce n'est pas ici le lieu), le rédacteur se demande ce qu'on pourrait y mettre.