

David Hilbert (1862-1943)

Grundlagen der Geometrie (1899)

Axiomatisches Denken (1917)



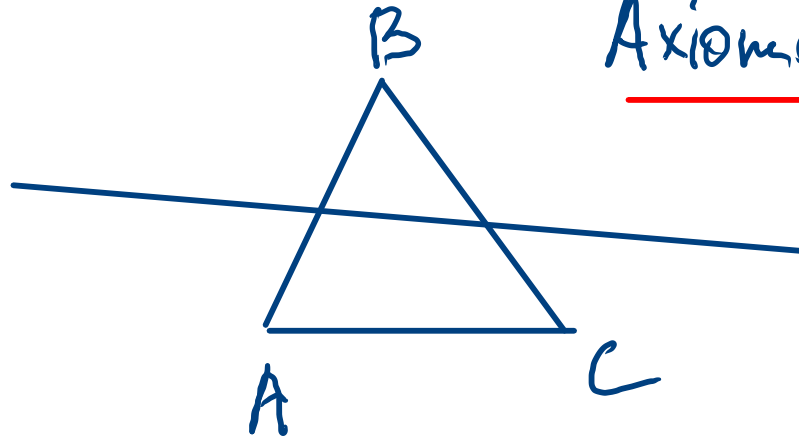
D'Alembert sur
les axiomes,
l'Encyclopédie, 1751

Pour venir donc à l'usage qu'on fait de ces maximes, 1°. elles peuvent servir dans la méthode qu'on emploie ordinairement pour enseigner les sciences jusqu'au terme où elles ont été poussées : mais elles ne servent que fort peu, ou point du tout, pour porter plus avant les sciences ; elles ne peuvent servir qu'à marquer les principaux endroits par où l'on a passé ; elles deviennent inutiles à ceux qui veulent aller en avant. Ainsi que le fil d'Ariane, elles ne font que faciliter les moyens de revenir sur nos pas.

Moritz Pasch (1843-1930)

Vorlesungen über neuere Geometrie 1882

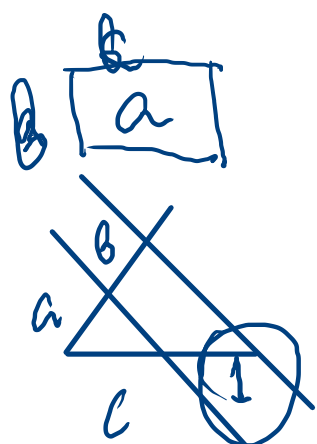
Axiome de Pasch



Giuseppe Peano (1858-1932)

Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre

di H. Grassmann
(1888)



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{1}$$

$$a = b \times c$$

$$x + iy + jz + kt$$

G. Leibniz (1646-1716)

Characteristica geometrica
Calculus

Hermann Grassmann (1809-1877)

Ausdehnungslehre 1844 / 1862

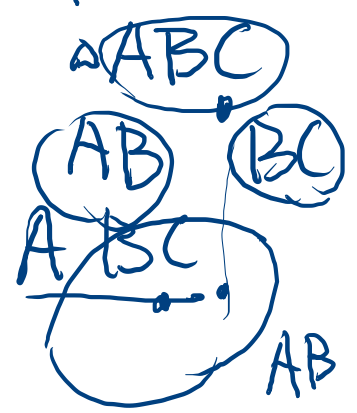
William Hamilton (1827-1865)

Quaternions

$$x + iy \in \mathbb{C}$$

J. W. Gibbs, E. B. Wilson, Vector Analysis (1901)

Analysis situs



$$x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$$

Le cercle de Peano : → 1900 Paris

B. Russell

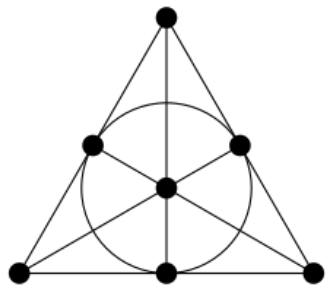
Mario Pieri (1860-1913)

Cesare Burali-Forti (1861-1931)

Alessandro Padoa (1868-1937)

Giino Fano (1871-1952)

Principles
of Mathematics
1903



le plan (fini) de Fano
projectif

« Toute science humaine commence par les intuitions, de là passe aux notions et finit par les idées. »

KANT, *Critique de la raison pure*
(Théorie élémentaire, Partie II,
Section II).

INTRODUCTION.

La Géométrie, de même que l'Arithmétique, n'exige, pour sa construction logique, qu'un petit nombre de principes fondamentaux simples. Ces principes fondamentaux sont dits les AXIOMES de la Géométrie. L'exposition de ces axiomes et leur examen approfondi est un problème qui, depuis Euclide, a fait l'objet de nombreux Mémoires remarquables de la Science mathématique ('). Ce problème revient à l'analyse logique de notre intuition de l'espace.

La recherche qui suit est un nouvel essai dont le but est d'établir

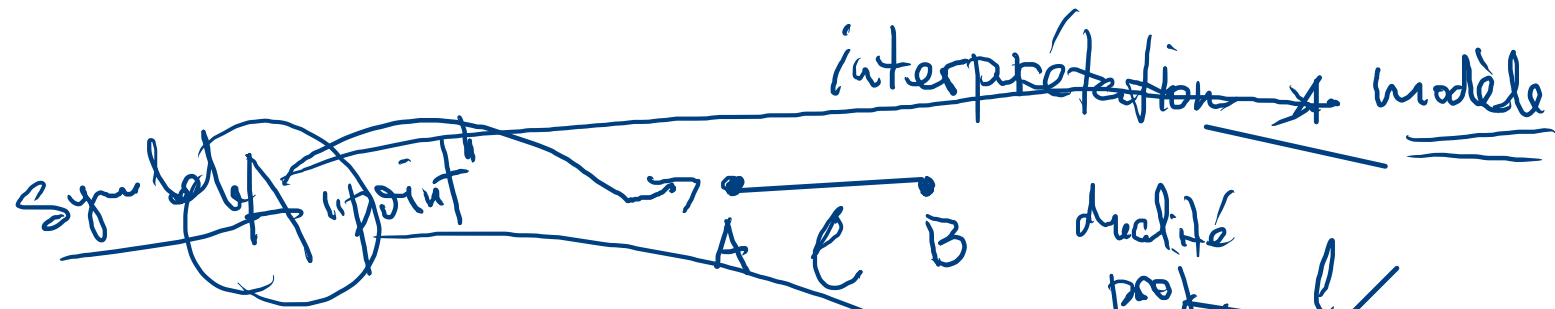
et d'indépendance.

la Géométrie sur un système SIMPLE et COMPLET d'axiomes INDÉPENDANTS]
et de déduire de ceux-ci les principaux théorèmes géométriques, de
telle sorte que le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée des
conclusions que l'on tire des axiomes individuels soient mis en pleine
lumière autant qu'il est possible.

§ 1.

Les éléments de la Géométrie et les cinq groupes d'axiomes.

Convention. — Concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du PREMIER système, nous les nommerons *points* et nous les désignerons par $A, B, C, \dots$; les êtres du DEUXIÈME système, nous le nommerons *droites* et nous les désignerons par $a, b, c, \dots$; les êtres du TROISIÈME système, nous les nommerons *plans* et nous les désignerons par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; les points seront aussi nommés *éléments de la Géométrie linéaire*; les points et les droites, *éléments de la Géométrie plane*; et les points, les droites et les plans, *éléments de la Géométrie de l'espace* ou *éléments de l'espace*.



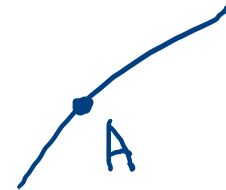
Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT », « CONTINU » ; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des *axiomes de la Géométrie*.

Syntax
Sémantique

Ch. Peirce

$A(x_A, y_A)$
 $B(x_B, y_B)$

Les axiomes de la Géométrie se partagent en cinq groupes ; chacun de ces groupes, pris individuellement, exprime certaines vérités fondamentales de même catégorie qui dérivent de notre intuition. Nous désignerons ces groupes comme il suit :



LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA GEOMETRIE.

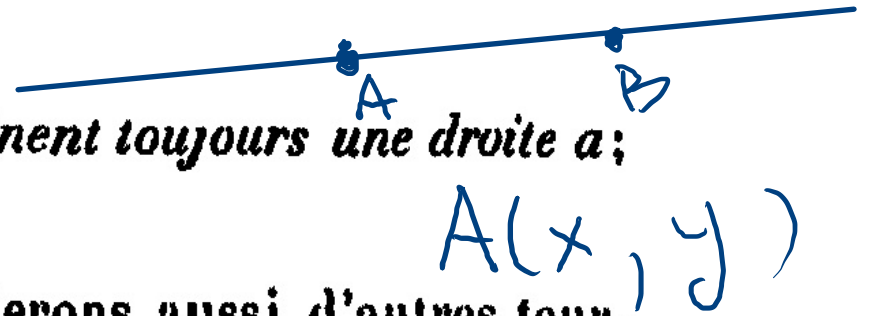
- I, 1 – 7. Axiomes d'*association*.
- II, 1 – 5. Axiomes de *distribution*.
- III. Axiome des *parallèles* (*Postulat d'Euclide*).
- IV, 1 – 6. Axiomes de *congruence*.
- V. Axiome de la *continuité* (*Axiome d'Archimède*).

Le groupe d'axiomes I : Axiomes d'association.

Les axiomes de ce groupe établissent une *association* entre les notions précédemment indiquées, points, droites et plans. Ces axiomes sont les suivants :

I, 1. Deux points distincts, A, B, déterminent toujours une droite a ; nous poserons $AB = a$ ou $BA = a$.

Au lieu de « DÉTERMINENT », nous emploierons aussi d'autres tournures de phrase; par exemple : A « EST SITUÉ SUR » a ; A « EST UN POINT DE » a ; a « PASSE PAR » A « ET PAR B »; « a JOINT A ET B » ou « JOINT A A B ». Lorsque A est situé sur a et, en outre, sur une autre droite b , nous emploierons aussi le mode d'expression : « LES DROITES a ET b ONT LE POINT A EN COMMUN », et ainsi de suite.



Une théorie (axiomatique) et ses modèles
Théorie de modèles | Alfred Tarski c. 1953 | Hilbert
G. Frege

§ 9.

La non-contradiction des axiomes.

Les axiomes des cinq groupes d'axiomes dont nous avons parlé dans le Chapitre I ne sont pas en contradiction, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'en déduire par un raisonnement logique une proposition qui soit en contradiction avec un de ces axiomes. Pour le prouver il suffit d'assigner une géométrie où l'ensemble des cinq groupes soit vérifié.

A cet effet, considérons le domaine D de tous les points P d'un plan.

§ 10.

Indépendance de l'axiome des parallèles (Géométrie non euclidienne).

Maintenant que l'on a reconnu la non-contradiction des axiomes, il est intéressant de rechercher s'ils sont tous indépendants.

Or, nous allons voir, en effet, qu'aucun des axiomes ne peut être déduit des autres au moyen de raisonnements logiques.

$$\begin{array}{ll}
 GA + AP \not\vdash E & \text{si } GA \vdash AP \\
 \text{consist} \rightarrow \boxed{GA + \neg AP} = GL & GA(AP) \neq \neg \neg AP \\
 & AP \wedge \neg AP \quad \square
 \end{array}$$

depuis c. 1918: Programme de Hilbert; cf. die Ignorabimusstreit
A. Tarski, What Is Elementary Geometry? (1959) | Emil de Bois-Regnoud
Hilbert 1900: Für uns gibt es kein ignorabimus | à partir de 1839
1930: Wir müssen wissen, wir werden wissen!

In colloquial language the term *elementary geometry* is used loosely to refer to the body of notions and theorems which, following the tradition of Euclid's *Elements*, form the subject matter of geometry courses in secondary schools. Thus the term has no well determined meaning and can be subjected to various interpretations. If we wish to make elementary geometry a topic of metamathematical investigation and to obtain exact results (not within, but) about this discipline, then a choice of a definite interpretation becomes necessary. In fact, we have then to describe precisely which sentences can be formulated in elementary geometry and which among them can be recognized as valid; in other words, we have to determine the means of expression and proof with which the discipline is provided.

Nicolas Bourbaki (depuis 1939)



Henri Cartan



André Weil



René de Possel



Charles Ehresmann



Laurent Schwartz



Jean Dieudonné



Claude Chevalley



Pierre Samuel



Jean-Pierre Serre



Adrien Douady

N. Bourbaki (J. Denoué)

L'architecture des mathématiques 1950

Ce que se propose pour but essentiel l'axiomatique, ce que le formalisme logique, à lui seul, est incapable de fournir, la intelligibilité profonde des mathématiques.

www.bourbaki.fr

[La méthode Sémantique]
(P. Suppes)

$ZF \models \langle G, \otimes \rangle \models$
Eléments de mathématique
(depuis 1939 à nos jours!)

une ébauche de 1956, une partie d'un volume
sur l'algèbre!

- 1 -

CONDENSÉ de GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

§ 1 - NOTION de STRUCTURE GÉOMÉTRIQUE.

1 - Définitions et exemples.

Un profond penseur a dit un jour que "la Géométrie est de l'Algèbre qu'on connaît bien", mais, malgré la justesse de cette définition, il faut à Bourbaki une définition de caractère moins psychologique, et qui puisse, si possible, s'énoncer en termes mathématiques, ou, au moins, métamathématiques.

Une première définition possible est : une géométrie élémentaire est la théorie d'un espace homogène d'un groupe linéaire (cf. état 1). Dans certains cas simples (espaces projectifs, affines et euclidiens) ça marche très bien. Mais le groupe est déjà un peu plus caché lorsqu'on se propose d'étudier une grassmannienne, ou la paire formée d'un plan projectif et

While several important changes have taken place since 1900 in our conception of mathematics or in our points of view concerning it, the one which truly involves a revolution in ideas is the discovery that mathematics is entirely independent of the physical world.

New Math

Marshall Stone 1961,

The Revolution in Mathematics

It is awful to think what kind of pressure the Bourbakists put on (evidently nonsilly) students to reduce them to formal machines!

Mathematics is a part of Physics. Physics is an experimental empirical science, a part of Natural Science. Mathematics is a part of Physics where experiments are cheap

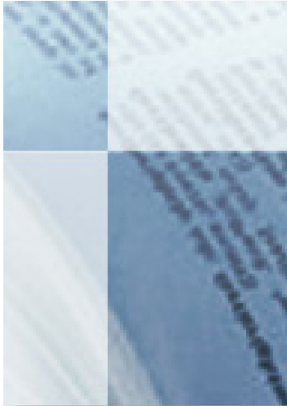
Vladimir Arnold (1937-2010)

Synthese Library 364

Andrei Rodin

Axiomatic Method and Category Theory

 Springer



2014, V, 270 p.

 Printed book**Hardcover**

- 99,99 € | £90.00 | \$129.00
- *106,99 € (D) | 109,99 € (A) | CHF 133.50

 eBook

For individual purchases buy at a lower price on springer.com.

Also available from libraries offering Springer's eBook Collection.

- springer.com/ebooks

 MyCopy

Printed eBook exclusively available to patrons whose library offers Springer's eBook Collection.***

- € | \$ 24.95
- springer.com/mycopy

A. Rodin, State University of Saint-Petersburg, Saint-Petersburg, Russia

Axiomatic Method and Category Theory

Series: Synthese Library, Vol. 364

- Offers readers a coherent look at the past, present and anticipated future of the Axiomatic Method
- Provides a deep textual analysis of Euclid, Hilbert, and Lawvere that describes how their ideas are different and how their ideas progressed over time
- Presents a hypothetical New Axiomatic Method, which establishes closer relationships between mathematics and physics

This volume explores the many different meanings of the notion of the axiomatic method, offering an insightful historical and philosophical discussion about how these notions changed over the millennia.

The author, a well-known philosopher and historian of mathematics, first examines Euclid, who is considered the father of the axiomatic method, before moving onto Hilbert and Lawvere. He then presents a deep textual analysis of each writer and describes how their ideas are different and even how their ideas progressed over time. Next, the book explores category theory and details how it has revolutionized the notion of the axiomatic method. It considers the question of identity/equality in mathematics as well as examines the received theories of mathematical structuralism. In the end, Rodin presents a hypothetical New Axiomatic Method, which establishes closer relationships between mathematics and physics.

Lawvere's axiomatization of topos theory and Voevodsky's axiomatization of higher homotopy theory exemplify a new way of axiomatic theory building, which goes beyond the classical Hilbert-style Axiomatic Method. The new notion of Axiomatic Method that emerges in categorical logic opens new possibilities for using this method in physics and other natural sciences.

This volume offers readers a coherent look at the past, present and anticipated future of the Axiomatic Method.



Order online at springer.com ► or for the Americas call (toll free) 1-800-SPRINGER ► or email us at: orders-ny@springer.com. ► For outside the Americas call +49 (0) 6221-345-4301 ► or email us at: orders-hd-individuals@springer.com.

The first € price and the £ and \$ price are net prices, subject to local VAT. Prices indicated with * include VAT for books; the €(D) includes 7% for Germany, the €(A) includes 10% for Austria. Prices indicated with ** include VAT for electronic products; 19% for Germany, 20% for Austria. All prices exclusive of carriage charges. Prices and other details are subject to change without notice. All errors and omissions excepted.

*** Regional restrictions apply.