

L1 PC – Soutien mathématique. Intégrales de fractions rationnelles. Systèmes linéaires

EXERCICE 1:

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$.

EXERCICE 2: Soit $f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$ avec $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

EXERCICE 3: Déterminer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{(x-1)^2}$ sur $]1, +\infty[$ 2. $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ sur $] -1, +\infty[$
3. $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$ sur $]2, +\infty[$ 4. $f(x) = \frac{24x^3 + 18x^2 + 10x - 9}{(3x-1)(2x+1)^2}$ sur $] -1/2, 1/3[$.

EXERCICE 4: Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ 2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+4x+5}$ 3. $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
4. $x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+x+1}$ 5. $x \mapsto \frac{2x}{x^2-x+1}$ 6. $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x-3}$.

EXERCICE 5: Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x+2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2z = 1 \\ -x-6z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 5y-5z = 13 \\ 4y+z = 18. \end{cases}$$

EXERCICE 6: Soit m un réel. Résoudre le système

$$\begin{cases} x+my = -3 \\ mx+4y = 6 \end{cases}$$

(on pourra discuter en fonction de m). Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat ?