



Algèbre de Boole

Introduction



Aristote

*Comme toute science, la logique a pour tâche la poursuite de la vérité. Ce qui est **vrai** (ce sont certains énoncés) et la poursuite de la vérité (c'est l'effort pour séparer les énoncés vrais des autres, ceux qui sont faux).*

Ainsi s'exprime Willard V.O. QUINE en tête de son ouvrage (*Méthode en Logique*, 1972, Armand Colin Éditions), montrant par là que la logique fut d'abord étudiée par les **philosophes**, **ARISTOTE** (384-322 avant J.C.) et d'autres fort nombreux.

Plus tard, **LEIBNIZ** (1646-1716) commença à la dédoubler (R. BLANCHE, *La Logique et son Histoire*, 1970, Armand Colin Éditions) : ... la logique classique, regardée comme relevant de la **philosophie**, se contentera de prolonger les doctrines reçues centrées sur le **sylogisme** ... mais, dans le même temps, quelques **mathématiciens** introduisent des idées et des méthodes nouvelles ... La rupture ne se consommera que dans la moitié du XIX^{ème} siècle ...

Sylogisme : Type de déduction telle que 2 propositions étant posées (majeure, mineure), on en tire une troisième (conclusion) qui est logiquement impliquée par les deux précédentes (ex : Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel).



Leibniz

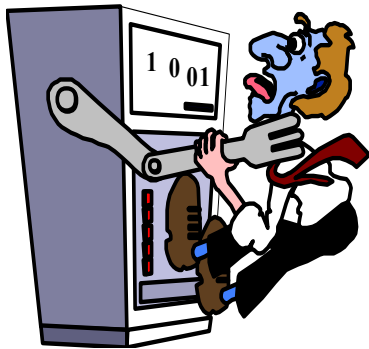
Introduction



G. BOOLE

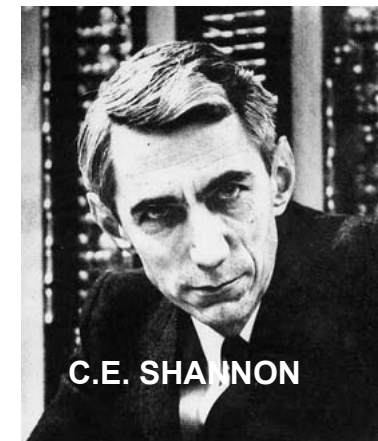
C'est au mathématicien **George BOOLE** (1815-1864) que l'on fait généralement l'honneur d'être initiateur de la **Logique Mathématique** (BOOLE G., *The Mathematical Analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, 1847 / *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, 1854).

L' **ALGÈBRE DE BOOLE** est un **formalisme mathématique** exploitant, dans toutes leurs conséquences logiques, des **axiomes et définitions** en vue de l' étude de circuits et de systèmes n'ayant que deux états d'équilibre.



Pour arriver à la technique, il fallut encore attendre près d' un siècle avec **C.E. SHANNON** (*A symbolic analysis of relay and switching circuits*, *Trans. Amer. Inst. Electrical Eng.*, n° 57, pp. 713-723, 1938).

L' avènement de l' Informatique et des Ordinateurs, après 1950, consacra les qualités de l' **ALGÈBRE DE BOOLE** et de ses annexes pour l' élaboration des **schémas des circuits électroniques** que l' on nomme **circuits logiques**



C.E. SHANNON

Algèbre de Boole



Définition

- On appelle **algèbre de Boole** tout quadruplet $(\mathcal{B}, \bar{}, +, \cdot)$
 - constitué d'un ensemble $\mathcal{B}$ non vide muni d'au moins deux éléments sur lequel sont définies deux lois de composition interne **binaires** notées $(+, \cdot)$ et une loi de composition interne **unaire** notée $(\bar{})$,
 - qui satisfait les neuf axiomes suivants pour tout élément x, y, z de $\mathcal{B}$:

$x + y = y + x$	[1]	$x \cdot y = y \cdot x$	[2]	Commutativité
$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	[3]	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	[4]	Distributivité
$x + 0 = x$	[5]	$x \cdot 1 = x$	[6]	Élément neutre
$x + \bar{x} = 1$	[5]	$x \cdot \bar{x} = 0$	[8]	Complémentaire
$0 \neq 1$	[9]			

- De manière générale, cette définition peut s'appliquer pour des ensembles **infinis**.

Exemple d'algèbre de Boole : algèbre des parties d'un ensemble

L'ensemble support de cette algèbre est l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ des sous-ensembles d'un ensemble $\mathcal{U}$ donné. Les éléments neutres sont $\emptyset$ et $\mathcal{U}$. Les trois lois de composition interne sont l'union ($\cup$), l'intersection ($\cap$) et le complément à $\mathcal{U}$ d'un sous-ensemble donné ($\neg$). En s'appuyant sur les définitions de ces trois lois de composition, il est possible de démontrer que $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \cup, \cap, \neg)$ a une structure d'algèbre de Boole.

Algèbre de Boole



Algèbre de Boole des variables booléennes

- On s'intéresse à l'algèbre de Boole définie sur un **ensemble à deux éléments**.
- On appelle **booléen** tout élément de $B = \{0, 1\}$. Soit $x \in B$, on note $\bar{x}$ le booléen défini par:

$$\bar{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Soient $x \in B$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$. On note x^ε , le booléen défini par :

$$x^\varepsilon = \begin{cases} x & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \bar{x} & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

- Deux lois de composition interne binaires (**ET logique** $\wedge$ noté et **OU logique** noté $\vee$) et une loi de composition interne unaire (**complément logique** noté $\neg$)

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1	0

- $(B, \neg, \vee, \wedge)$ est une algèbre de Boole (*Algèbre de Boole des variables booléennes*).

Fonctions booléennes



Fonctions booléennes : définition

- On appelle **fonction booléenne d'ordre n** , toute fonction f de B^n dans B qui, à tout n -uplet de variables booléennes $(b_1, \dots, b_n)$, associe la variable booléenne $f(b_1, \dots, b_n)$:

$$\begin{aligned} f: \quad & B^n \longrightarrow B \\ & (b_1, \dots, b_n) \mapsto f(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

- On note F_n l'ensemble des fonctions booléennes d'ordre n et $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ l'ensemble des fonctions booléennes.
- Soit $f \in F_n$, on dit que f est **complète** ssi $\nexists i \in [1, n], \forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in B^{n-1}$:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

autrement dit ssi tous les arguments de f « jouent un rôle » dans l'évaluation de f .

Fonctions booléennes



Fonctions booléennes usuelles

- Fonctions de F_0

Fonctions constantes 1 et 0

$$1: \begin{array}{l} \rightarrow B \\ \mapsto 1 \end{array}$$

$$0: \begin{array}{l} \rightarrow B \\ \mapsto 0 \end{array}$$

- Fonctions de F_1

Deux fonctions constantes

$$1: \begin{array}{l} B \rightarrow B \\ x \mapsto 1 \end{array}$$

$$0: \begin{array}{l} B \rightarrow B \\ x \mapsto 0 \end{array}$$

Fonctions identité et négation

$$\text{Identité: } \begin{array}{l} B \rightarrow B \\ x \mapsto x \end{array}$$

$$\text{Négation: } \begin{array}{l} B \rightarrow B \\ x \mapsto \neg x \end{array}$$

- Fonctions de F_2

- Deux fonctions constantes
- Deux fonctions de projections et deux fonctions de négation des projections

$$x_1: \begin{array}{l} B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \end{array}$$

$$x_2: \begin{array}{l} B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto x_2 \end{array}$$

$$\text{Négation de } x_1: \begin{array}{l} B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto \neg x_1 \end{array}$$

$$\text{Négation de } x_2: \begin{array}{l} B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto \neg x_2 \end{array}$$

- Fonctions « somme » et « produit »

$$\vee: \begin{array}{l} B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 1 \text{ si } x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

$$\wedge: \begin{array}{l} B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 \text{ si } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Fonctions booléennes



Fonctions booléennes usuelles

- Fonctions de F_2 (suite)

- Fonctions « implique », « est impliqué par », « n'implique pas » et « n'est pas impliqué par »

$$\Rightarrow: \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto \neg x_1 \vee x_2$$

$$\Leftarrow: \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \vee \neg x_2$$

$$\nRightarrow: \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 \wedge \neg x_2$$

$$\Leftarrow: \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto \neg x_1 \wedge x_2$$

- Fonctions « équivalent »

$$\Leftrightarrow: \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$$

- Fonctions « non OU » (NOR), « non ET » (NAND)

$$\text{NOR:} \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto \neg(x_1 \vee x_2)$$

$$\text{NAND:} \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto \neg(x_1 \wedge x_2)$$

- Fonction « OU exclusif » (XOR) notée $\oplus$

$$\oplus: \quad B^2 \rightarrow B \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$$

Fonctions booléennes



Définitions

- On appellera *False* (respectivement *True*) la fonction booléenne d'ordre n qui associe à tout n -uplet de variables booléennes $(x_1, \dots, x_n)$ la variable booléenne 0 (respectivement 1) :

$$\mathcal{False} : \quad \begin{array}{l} B^n \rightarrow B \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto 0 \end{array}$$

$$\mathcal{True} : \quad \begin{array}{l} B^n \rightarrow B \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto 1 \end{array}$$

- On appellera *OU*, *ET* et *NON*, les trois lois de composition interne de F_n définies de la manière suivante :

$$\text{OU} : \quad \begin{array}{l} F_n \times F_n \rightarrow F_n \\ (f, g) \mapsto f + g \end{array}$$

$$\text{ET} : \quad \begin{array}{l} F_n \times F_n \rightarrow F_n \\ (f, g) \mapsto f \cdot g \end{array}$$

$$\text{NON} : \quad \begin{array}{l} F_n \rightarrow F_n \\ f \mapsto \overline{f} \end{array}$$

où

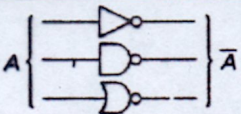
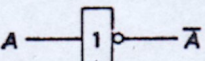
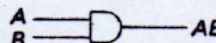
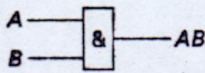
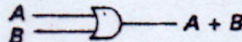
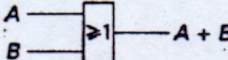
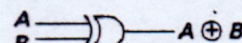
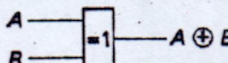
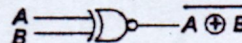
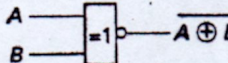
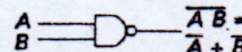
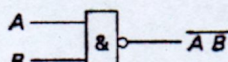
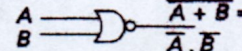
$$\begin{aligned} (f + g)(b_1, \dots, b_n) &= (f(b_1, \dots, b_n) \vee g(b_1, \dots, b_n)) \\ (f \cdot g)(b_1, \dots, b_n) &= (f(b_1, \dots, b_n) \wedge g(b_1, \dots, b_n)) \\ \overline{f}(b_1, \dots, b_n) &= \neg f(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

- $(F_n, \overline{}, +, \cdot)$ a une structure d'algèbre de Boole (*Algèbre de Boole des fonctions booléennes*)

Représentation des fonctions booléennes



Représentation graphique

Opérations logiques élémentaires.																							
Opération	Symboles		Table d'implication																				
Complémentation ou inversion ou NON			<table><tr><th>A</th><th>$\bar{A}$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	$\bar{A}$	0	1	1	0														
A	$\bar{A}$																						
0	1																						
1	0																						
Produit ou intersection ou ET			<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>AB</th><th>$A + B$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	AB	$A + B$	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
A	B	AB		$A + B$																			
0	0	0	0																				
0	1	0	1																				
1	0	0	1																				
1	1	1	1																				
Produit ou réunion ou OU inclusif																							
Comparateur de différence ou OU exclusif			<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \oplus B$</th><th>$\overline{A \oplus B}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	A	B	$A \oplus B$	$\overline{A \oplus B}$	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
A	B	$A \oplus B$		$\overline{A \oplus B}$																			
0	0	0	1																				
0	1	1	0																				
1	0	1	0																				
1	1	0	1																				
Comparateur d'égalité																							
ET-NON			<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$\overline{AB}$</th><th>$\overline{A + B}$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A + B}$	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
A	B	$\overline{AB}$		$\overline{A + B}$																			
0	0	1	1																				
0	1	1	0																				
1	0	1	0																				
1	1	0	0																				
OU-NON																							

Représentation des fonctions booléennes



Table de vérité

La **Table de Vérité** d'une fonction booléenne $f \in F_n$ est un tableau comportant **$n+1$ colonnes** :

- les n premières colonnes représentent la valeur prise par les arguments $x_1, \dots, x_n$ (**entrées**)
- la dernière colonne représente l'évaluation de la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ (**sortie**).

Le nombre de ligne du tableau est de **2^n lignes**.

Exemple

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Définition

Une fonction booléenne ne peut prendre que deux valeurs 0 ou 1, elle est donc connue dès que l'on connaît les n -uplets booléens où elle prend la valeur 1.

Le **support $S_n(f)$** d'une fonction $f \in F_n$ est l'ensemble des n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$, tels que $f(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Exemple

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On a donc $S_2(f) = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Ecriture des fonctions booléennes



Définitions

- On appelle **monôme conjonctif** de F_n tout **produit** de projections ou de négations de projections, autrement dit tout élément pouvant s'écrire :

$$m = \prod_{i \in I} x_i^{\varepsilon_i} \quad \text{avec } I \subseteq [1, n] \text{ et } \varepsilon \in \{0, 1\}$$

Exemple

$$m = \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$$

- On appelle **monôme disjonctif** de F_n tout **somme** de projections ou de négations de projections, autrement dit tout élément pouvant s'écrire :

$$m = \sum_{i \in I} x_i^{\varepsilon_i} \quad \text{avec } I \subseteq [1, n] \text{ et } \varepsilon \in \{0, 1\}$$

Exemple

$$m = x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + \bar{x}_4$$

- Un monôme (conjonctif ou disjonctif) est dit **canonique** pour une fonction f de F_n si chacun des n arguments de la fonction f intervient exactement une fois dans le monôme.
 - Un monôme conjonctif canonique est appelé **MINTERME**
 - Un monôme disjonctif canonique est appelé **MAXTERME**
- En connaissant le support S_n d'une fonction booléenne f , on peut de manière automatique, en déduire une écriture algébrique de cette fonction :
 - sous la forme d'une « **SOMME DE PRODUITS** » (à base de **MINTERMES**),
 - sous la forme d'un « **PRODUIT DE SOMMES** » (à base de **MAXTERMES**).

Ecriture des fonctions booléennes



Première forme normale de Lagrange (ou forme canonique disjonctive)

- Toute fonction booléenne de f de F_n peut s'écrire comme une **somme de monômes conjonctifs canoniques** de F_n . Cette écriture, appelée première forme normale de Lagrange est déterminée à partir du support de la fonction :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in Sn(f)} x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

Le **MINTERME** est le **PRODUIT LOGIQUE** (ET) de tous les états logiques des variables indépendantes. Pour une fonction logique donnée, il existe autant de MINTERMES que de combinaisons possibles de variables indépendantes. Lorsqu'une variable est à l'état logique **1** dans une de ces combinaisons, elle est remplacée par **son nom**, et, quand elle est à l'état logique **0**, elle est remplacée par la **négation de son nom**.

L'expression logique de la fonction est alors la **SOMME LOGIQUE** (OU) de tous les **MINTERMS** pour lesquels le résultat de la fonction est **égal à 1**.

Dans l'exemple, cela donne :

$$\begin{aligned} f &= m_3 + m_5 + m_6 + m_7 \\ &= (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \end{aligned}$$

a	b	c	f	Minterms
0	0	0	0	$m_0 = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$
0	0	1	0	$m_1 = \neg a \wedge \neg b \wedge c$
0	1	0	0	$m_2 = \neg a \wedge b \wedge \neg c$
0	1	1	1	$m_3 = \neg a \wedge b \wedge c$
1	0	0	0	$m_4 = a \wedge \neg b \wedge \neg c$
1	0	1	1	$m_5 = a \wedge \neg b \wedge c$
1	1	0	1	$m_6 = a \wedge b \wedge \neg c$
1	1	1	1	$m_7 = a \wedge b \wedge c$

Ecriture des fonctions booléennes



Deuxième forme normale de Lagrange (ou forme canonique conjonctive)

- Toute fonction booléenne de f de F_n peut s'écrire comme un **produit de monômes disjonctifs canoniques** de F_n . Cette écriture, appelée première forme normale de Lagrange est déterminée à partir du support de la fonction :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \overline{Sn(f)}} \overline{x_1^{\varepsilon_1}} + \overline{x_2^{\varepsilon_2}} + \dots + \overline{x_n^{\varepsilon_n}}$$

Le **MAXTERME** est une **ADDITION LOGIQUE** (OU) de toutes les variables indépendantes d'une fonction logique. Pour une fonction logique donnée, il existe autant de MAXTERMS que de combinaisons possibles de ces variables dans la table de vérité de la fonction. Lorsque la variable est à l'état logique **0**, elle est remplacée par **son nom**, et, quand elle est à l'état logique **1**, elle est remplacée par la **négation de son nom**.

En fait, le MAXTERME est l'inverse du MINTERME correspondant à la même combinaison de variables.

L'expression logique de la fonction est alors le **PRODUIT LOGIQUE** (ET) de tous les **MAXTERMES** pour lesquels le résultat de la fonction est **égal à 0**.

Dans l'exemple, cela donne :

$$f = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

$$= (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$$

a	b	c	f	Maxterms
0	0	0	0	$M_0 = a \vee b \vee c$
0	0	1	0	$M_1 = a \vee b \vee \neg c$
0	1	0	0	$M_2 = a \vee \neg b \vee c$
0	1	1	1	$M_3 = a \vee \neg b \vee \neg c$
1	0	0	0	$M_4 = \neg a \vee b \vee c$
1	0	1	1	$M_5 = \neg a \vee b \vee \neg c$
1	1	0	1	$M_6 = \neg a \vee \neg b \vee c$
1	1	1	1	$M_7 = \neg a \vee \neg b \vee \neg c$

Propriétés des fonctions booléennes



POSTULATS

(1) $\bar{0} = 1$

(6) $\bar{1} = 0$

(2) $0 + 0 = 0$

(7) $0 \cdot 0 = 0$

(3) $0 + 1 = 1$

(8) $0 \cdot 1 = 0$

(4) $1 + 0 = 1$

(9) $1 \cdot 0 = 0$

(5) $1 + 1 = 1$

(10) $1 \cdot 1 = 1$

THÉORÈMES POUR UNE SEULE VARIABLE

(11) $a + 1 = 1$

(15) $a \cdot 1 = a$

(12) $a + 0 = a$

(16) $a \cdot 0 = 0$

(13) $a + a = a$

(17) $a \cdot a = a$

(14) $a + \bar{a} = 1$

(18) $a \cdot \bar{a} = 0$

(19) $\bar{\bar{a}} = a$

Propriétés des fonctions booléennes



THÉORÈMES POUR PLUSIEURS VARIABLES

Loi de Commutativité (ou Loi d'Échange)

$$(20) \ a + b = b + a$$

$$(21) \ a \cdot b = b \cdot a$$

Loi d'Associativité (ou Loi de Liaison)

$$(22) \ a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(23) \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Loi de Distributivité (ou Loi de Répartition)

$$(24) \ (a + b) \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) + (b \cdot b) + (b \cdot c)$$

$$(25) \ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

LOIS DE MORGAN

$$(26) \ \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

$$(27) \ \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

LOIS D'ABSORPTION LOGIQUE

$$(28) \ a + a \cdot b = a$$

$$(29) \ a \cdot (a + b) = a$$

LOIS D'ADJACENCE LOGIQUE

$$(30) \ a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$$

$$(31) \ (a + b) \cdot (a + \overline{b}) = a$$

Propriétés des fonctions booléennes



Composition de fonctions booléennes

- Soient $f \in F_n$ et $g_1, \dots, g_n \in F_m$. On note $f(g_1, \dots, g_n)$ la fonction booléenne d'ordre m définie par :

$$\begin{aligned} f(g_1, \dots, g_n) : \quad & B^m \rightarrow B \\ (x_1, \dots, x_m) \mapsto & f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)) \end{aligned}$$

Exemple

Soit $f: (x_1, x_2) \mapsto x_1 \oplus x_2$ et $g_1: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ et $g_2: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_2 \Rightarrow x_1$
 $h = f(g_1, g_2) \in F_3$ est définie par : $h: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus (x_2 \Rightarrow x_1)$

- Toute fonction booléenne $f \in F_n$ possède une **fonction duale** notée f^* telle que :

$$f^*: (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in B^n \mapsto \overline{f}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_i}, \dots, \overline{x_n})$$

Exemple

Soit $f: (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in F_2$

$$f^*(x_1, x_2) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_2}} = x_1 \cdot x_2$$

L'addition et la multiplication sont duales

- Théorème de décomposition de Shannon

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \dots, x_n) + x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n)$$

Propriétés des fonctions booléennes



Comparaison de fonctions booléennes

- Deux fonctions booléennes f et g de même ordre n sont égales si et seulement si :

$$\forall x \in B^n, f(x) = g(x)$$

- Deux principales méthodes sont utilisées pour montrer que deux fonctions booléennes sont égales :
 - (i) dresser la table de vérité des deux fonctions et constater qu'elles sont identiques
 - (ii) utiliser les propriétés connues pour aboutir à l'égalité

- Exemple*

On souhaite montrer que les fonctions $f: (x_1, x_2) \mapsto 1 \oplus x_1 \oplus x_2$ et $g: (x_1, x_2) \mapsto x_1 \Leftrightarrow x_2$ sont égales. Pour cela, on dresse la table de vérité de f puis celle de g .

1	x_1	x_2	$1 \oplus x_1$	$1 \oplus x_1 \oplus x_2$	x_1	x_2	$x_1 \Leftrightarrow x_2$
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

$$\begin{aligned} 1 \oplus x_1 \oplus x_2 &= (1 \oplus x_1) \oplus x_2 \\ &= \neg x_1 \oplus x_2 \\ &= (\neg \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \\ &= (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \\ &= x_1 \Leftrightarrow x_2 \end{aligned}$$

Simplification des fonctions booléennes



Définitions

- Les méthodes de simplification sont, presque toutes, basées sur une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des fonctions booléennes.
- Soient f et g deux fonctions de F_m . Par définition, on dit que f est plus petite que g si et seulement si :

$$f \leq g \text{ ssi } S_n(f) \subset S_n(g)$$

- Relation d'ordre sur les monômes conjonctifs

Soit m et m' deux monômes conjonctifs :

$$m \leq m' \Leftrightarrow \exists m'', m'' \text{ est un monôme conjonctif et } m = m' \cdot m''$$

En particulier, les plus petits monômes sont les monômes conjonctifs canoniques, le plus grand monôme conjonctif est la constante 1.

- Un monôme m est **maximal** pour une fonction $f \in F_n$ ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :
 - m est un monôme conjonctif
 - $m \subset S_n(f)$ (que l'on pourra noter $m < f$)
 - $\nexists m' \neq m$ monôme conjonctif tel que $m \leq m' \leq f$

On note $M(f)$ l'ensemble des monômes maximaux de f .

Simplification des fonctions booléennes



Exemple

- $f = x_1x_2 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_2x_3 + x_3$ définie sur F_3
- f a pour support $S_3(f) = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- $m = x_2 \cdot x_3$

On peut trouver $m' = x_3$ tel que $m = m' \cdot x_2$ et $m' \leq f$ (i.e. $m' \subset S_3(f)$)

on a donc $m \leq m' \leq f$, d'où $m = x_2 \cdot x_3$ n'est pas maximal

- De la même manière, $m = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$ n'est pas maximal, puisqu'il existe $m' = x_1x_2$ tel que $m = m' \cdot \bar{x}_3$ et $m' \subset S_3(f)$, donc $m \leq m' \leq f$

- $m = x_1 \cdot x_2$

On ne trouve pas m' tel que $m = m' \cdot m''$ et $m' \leq f$ (en effet $x_1 \notin S_3(f)$ et $x_2 \notin S_3(f)$)

$m = x_1x_2$ est donc un monôme maximal

De la même manière, $m = x_3$ est maximal puisqu'il n'existe pas de m' tel que $m = m' \cdot m''$.

Simplification des fonctions booléennes



Proposition

- Toute fonction booléenne est la **somme de ses monômes maximaux**, c'est à dire que :

$$\forall f \in F_n, f = \sum_{m \in M(f)} m$$

- L'écriture d'une fonction booléenne à partir de son support grâce aux formes normales de Lagrange utilisent les monômes canoniques. Ces monômes sont justement ceux dont l'écriture est la plus longue et va à l'encontre d'une écriture simplifiée.
- L'objectif est donc de trouver l'ensemble des monômes maximaux. On dit que f' est une **écriture simplifiée de f** si et seulement si :
 - f' est une somme de monômes maximaux de f

$$f' = \sum_{m \in M(f)} m$$

- Si l'on retire un monôme à f' , alors on ne retrouve pas une écriture de f

$$\nexists m_j \in M(f), f = \sum_{m \in M(f) \setminus m_j} m$$

Simplification des fonctions booléennes



Exemple

- $f = x_1x_2 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_2x_3 + x_3$ définie sur F_3
- f a pour support $S_3(f) = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- $m = x_2 \cdot x_3$

On peut trouver $m' = x_3$ tel que $m = m' \cdot x_2$ et $m' \leq f$ (i.e. $m' \subset S_3(f)$)

on a donc $m \leq m' \leq f$, d'où $m = x_2 \cdot x_3$ n'est pas maximal

- De la même manière, $m = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$ n'est pas maximal, puisqu'il existe $m' = x_1x_2$ tel que $m = m' \cdot x_3$ et $m' \subset S_3(f)$, donc $m \leq m' \leq f$

- $m = x_1 \cdot x_2$

On ne trouve pas m' tel que $m = m' \cdot m''$ et $m' \leq f$ (en effet $x_1 \notin S_3(f)$ et $x_2 \notin S_3(f)$)

$m = x_1x_2$ est donc un monôme maximal

De la même manière, $m = x_3$ est maximal puisqu'il n'existe pas de m' tel que $m = m' \cdot m''$.

- Ecriture simplifiée de f : $f = x_1x_2 + x_3$

Simplification des fonctions booléennes



📖 SIMPLIFICATION PAR LA MÉTHODE DE KARNAUGH

Les axiomes et propriétés des fonctions de l'Algèbre de Boole permettent la simplification des expressions mais cela reste difficile pour de longues expressions logiques.

La méthode de simplification de **KARNAUGH** est une méthode qui permet de déterminer simplement l'ensemble des formes simplifiées d'une fonction en en déterminant graphiquement les monômes maximaux.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Soit $f \in F_4$.

- 1) On dresse un tableau à card $(B^4) = 16$. Chaque case du tableau correspond à un monôme **canonique conjonctif (MINTERME)**. L'avantage principal de la Table de KARNAUGH par rapport à la Table de Vérité est qu'elle permet une meilleure visualisation des propriétés de l'adjacence logique.

La disposition des mintermes dans une telle table est telle que chacun des mintermes est voisin de ses mintermes adjacents. Un minterme est dit **adjacent** à un autre si **leurs expressions ne diffèrent que d'une seule variable** qui se présente dans la forme « directe » dans l'un et dans la forme « complémentée » dans l'autre.

		a		0		1		1	
		b		0		1		0	
c	d	0		1		1		0	
	0	0		1		1		0	
	1	1		0		0		1	
	0	1		1		0		0	
		m0		m4		m12		m8	
		/a./b./c./d		/a.b./c./d		a.b./c./d		a./b./c./d	
		m1		m5		m13		m9	
		/a./b./c.d		/a.b./c.d		a.b./c.d		a./b./c.d	
		m3		m7		m15		m11	
		/a./b.c.d		/a.b.c.d		a.b.c.d		a./b.c.d	
		m2		m6		m14		m10	
		/a./b.c./d		/a.b.c./d		a.b.c./d		a./b.c./d	

Simplification des fonctions booléennes



📖 SIMPLIFICATION PAR LA MÉTHODE DE KARNAUGH

PRINCIPE DE LA MÉTHODE (Suite)

- 2) pour chaque $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) \in \mathbf{B}^4$, on remplit la case $a^{\epsilon_1}b^{\epsilon_2}c^{\epsilon_3}d^{\epsilon_4}$ avec $f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$.
- 3) on détermine l'ensemble des monômes maximaux de f : on effectue les plus grands regroupements rectangulaires non discontinus possibles de 1, 2, 4, 8 ou 16 cases adjacentes contenant un "1". Pour déterminer l'expression algébrique du monôme correspondant à un regroupement, il suffit de constituer un monôme ne faisant apparaître que les variables qui gardent une valeur constante pour toutes les cases du regroupement en complémentant celles qui valent 0 ($\bar{c}.d$, $\bar{c}.b$, $b.\bar{d}$)
- 4) on détermine l'ensemble des monômes **centraux** : on repère parmi les monômes maximaux ceux qui contiennent au moins une case « 1 » qui n'est pas recouverte par un autre monôme maximal ($\bar{c}.d$ et $b.\bar{d}$)
- 5) on détermine l'ensemble de toutes les combinaisons de monômes maximaux recouvrant toutes les cases « 1 » avec des monômes centraux.

		a		0	0	1	1
						1	0
c	d	b		0	1	1	0
		0	0	m0 0	m4 1	m12 1	m8 0
		0	1	m1 1	m5 1	m13 1	m9 1
		1	1	m3 0	m7 0	m15 0	m11 0
	1	0	m2 0	m6 1	m14 1	m10 0	

$$f = \bar{c} . d + b . \bar{d}$$

Éléments d'Algèbre Binaire



📖 SIMPLIFICATION PAR LA MÉTHODE DE KARNAUGH

Principe équivalent avec les monômes disjonctifs (MAXTERMES)

Lorsqu'une table contient **moins d'états 0 que d'états 1**, le même principe est admissible en utilisant les **MAXTERMES**. Dans ce cas, les **MAXTERMES** dont les cases contiennent des **0** dans une Table de KARNAUGH **peuvent être regroupés si ces cases sont adjacentes**. L'adjacence peut être considérée par rapport aux « enroulements » possibles de la table.

EXEMPLE

		a		0	0	1	1
		b		0	1	1	0
c	d						
	0	0		M0	M4	M12	M8
				1	1	0	0
	0	1		M1	M5	M13	M9
				1	1	0	0
1	1			M3	M7	M15	M11
				1	1	1	1
1	0			M2	M6	M14	M10
				1	1	1	1

Le résultat de la simplification donne : $F = /a + c$

puisque les **Maxterms** concernés sont :

$$\begin{aligned} M12 &= /a+/b+c+d & M8 &= /a+b+c+d \\ M13 &= /a+/b+c+/d & M9 &= /a+b+c+/d \end{aligned}$$

correspondant à une zone où seuls a et c conservent le même état logique (respectivement 0 et 1).

Il est à noter que le même résultat serait obtenu en pratiquant les regroupements autour des mintermes.