

TD12 : Equations différentielles du premier ordre à coefficients variables et avec second membre

1. EQUATIONS HOMOGÈNES À COEFFICIENTS NON-CONSTANTS

Exercice 1. Déterminez les solutions des ED suivantes :

$$y' = x^2 y, \quad \cos(x)y' + 3 \sin(x)y = 0 \text{ sur }]-\pi/2, \pi/2[, \quad 4tx + x = 0 \text{ sur } [1, +\infty[;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = (\cos x)y; \quad y' = (\cos x + \sin x)y \text{ avec } y(\pi/2) = 1 \\ y' + \tan^2(x)y = 0 \quad \text{sur }]-\pi/2, \pi/2[, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} y' = \ln(x)y \quad \text{sur }]0, +\infty[, \\ y(1) = 2 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' + 7e^x y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(-1) = 0 \end{array} \right\};$$

2. EQUATIONS AVEC SECOND MEMBRE

Exercice 2. Pour chacune des équations suivantes, déterminez UNE solution sous forme de polynôme

- $y' + y = 1$
- $y' + 2y = 2x + 3;$
- $y' = 3x;$
- $y' + 2xy = x;$
- $2y' + xy = x^2 + x + 2;$

Exercice 3. Pour chacune des équations suivantes, déterminez UNE solution sous forme de polynôme multiplié par une exponentielle

- $y' + y = 2e^x;$
- $y' - y = e^x;$
- $3y' + 4y = xe^{2x};$
- $y' = 3xe^{-x};$
- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x};$
- $y' + 4y = xe^{-4x}.$

Exercice 4. Déterminez toutes les solutions de

- $y' + y = 2e^x;$
- $y' - y = e^x;$
- $2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}.$

Exercice 5. Effectuez la résolution sur $\mathbb{R}$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + y = 2e^x, \\ y(0) = 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' + xy = x^2 + x + 2, \\ y(2) = 0 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} 2y' - 5y = (x^2 + 4x - 1)e^{3x}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

3. LA MÉTHODE DITE DE "VARIATION DE LA CONSTANTE"

Exercice 6. Résolvez les équations suivantes avec la méthode de variation de la constante

$$y' - y = e^x \ln x; \quad y' + y = 3 \cos 2x - \sin 2x.$$