

L1 PC – Soutien mathématique. Continuité, dérivabilité, équations différentielles

EXERCICE 1: (a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \notin \{0, 1, -1\}, \\ 0 & \text{si } x \in \{0, 1, -1\}. \end{cases}$$

En quels points est-elle continue ?

(b) Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

$$f : x \mapsto \sin(x) \sin(1/x), \quad g : x \mapsto \cos(x) \cos(1/x), \quad h : x \mapsto \sin(x+1) \ln|x+1|.$$

EXERCICE 2: Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité, et la dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| 1. $x \mapsto \cos(3x-4) - e^{-x}$ | 2. $x \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-2x}$ | 3. $f : x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ |
| 4. $x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}$ | 5. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ | 6. $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$ |
| 7. $x \mapsto \frac{1}{x^7}$ | 8. $g : x \mapsto \frac{3x^2 + 5}{x^2 + 1}$ | 9. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{e^x}}$ |
| 10. $h : x \mapsto \cos(\sqrt{2x+1})$ | 11. $x \mapsto (\ln(2x^3) + 1)^3$ | 12. $x \mapsto \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ |

EXERCICE 3: Déterminer, s'ils existent, le minimum global, le maximum global, les minima et maxima locaux de la fonction f de l'exercice précédent sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Même question pour la fonction g sur l'intervalle $[-1, 1]$, et pour la fonction h sur l'intervalle $[1, 12]$.

EXERCICE 4: Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $x \mapsto x $ | 2. $x \mapsto \frac{x}{1 + x }$ |
| 3. $x \mapsto x \sin(x)$ | 4. $x \mapsto x \sin(x) \sin(1/x)$ |
| 5. $x \mapsto \sin(x) \sin(1/x)$. | |

EXERCICE 5: Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes jusqu'à l'ordre indiqué :

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ (ordre 3) | 2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ (ordre 4) |
| 3. $\sin x \cos(2x)$ (ordre 6) | 4. $\cos(x) \ln(1+x)$ (ordre 4) |
| 5. $(x^3 + 1)\sqrt{1-x}$ (ordre 3) | 6. $(\ln(1+x))^2$ (ordre 4) |

EXERCICE 6: Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + x^2 y = -x^2$ sur $\mathbb{R}$;
2. $2xy' - y = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
3. $y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.