



1758

Elementa doctrinae solidorum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Elementa doctrinae solidorum" (1758). *Euler Archive - All Works*. 230.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/230>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

E L E M E N T A

DOCTRINAE SOLIDORVM.

AVCT. L. EVLERO.

§. 1.

Quemadmodum Geometria in contemplatione figurarum planarum versatur, et quae de lineis et angulis in ea traduntur, ad eius prolegomena referenda sunt; ita Stereometria in contemplatione solidorum occupatur, et quae ibi de inclinatione planorum angulisque solidis explicantur, eius quoque tanquam prolegomena sunt spectanda.

§. 2. Solidum est extensum trium dimensionum vndique terminatum, perinde atque superficies definitur per extensum duarum tantum dimensionum. Duae autem solidorum constituendae sunt classes, prout eorum ambitus figuris siue planis, siue conuexis concauisue includitur.

§. 3. Hic eam tantum classẽ solidorum, quae vndique figuris planis includuntur, contemplari constitui; perinde atque Geometria a figuris rectilineis exorditur; et quemadmodum figurarum rectilinearum in genere plures insignes proprietates sunt annotatae; ita solidorum huius classis non nullas proprietates generales eruere conabor.

§. 4. Quanquam autem Stereometria iam satis diligenter elaborata videtur, in eaque praeter theoriam in-

clinationis planorum et angulorum solidorum, formatio plurium solidorum ac potissimum corporum regularium doceri solet; tamen ubique firma huius de solidis doctrinae fundamenta desiderantur, ex quibus huiusmodi solidorum natura in genere intelligi possit.

§. 5. Solidorum igitur contemplatio ad ambitum eorum dirigi debet: cognito enim ambitu, quo solidum undique includitur, ipsum solidum cognoscitur simili modo, quo cuiusque figurae planae indoles ex eius perimetro definiri solet.

§. 6. Ad ambitum autem cuiusque solidi figuris planis inclusi pertinent 1^{mo} ipsae figurae planae eius ambitum constituentes, quae **hedrae** vocantur; 2^{do} binarum hedrarum secundum **latera** concursus, **quibus termini lineares solidi oriuntur**: hos terminos, quoniam apud scriptores Stereometriae **nullum nomen proprium reperio**, **acies** vocabo; 3^{tio} puncta, in quibus tres plurae hedrae concurrunt, quae puncta **anguli solidi** appellantur.

§. 7. **Triplicis** igitur **generis** termini in quouis solido sunt considerandi; scilicet 1.) puncta; 2.) lineae, 3.) superficies; vel nominibus ad hoc institutum propriis utendo. 1.) **Anguli solidi**; 2.) **acies**; et 3.) **hedrae**. Hisque triplicis generis terminis totum solidum determinatur. Figura autem plana duplicis tantum generis terminos habet, quibus determinatur; 1. scilicet puncta, seu anguli, 2. lineae seu latera.

§. 8.

§. 8. Instar exempli propositum sit corpus cuneiforme $ABCDEF$, cuius termini primi generis, seu anguli solidi sunt sex: A, B, C, D, E, F . Terminum secundum generis lineares, seu acies sunt numero nouem: $AB, BC, CD, DA, AE, DE, BF, CF, EF$. Terminum denique tertii generis, seu hedrae sunt quinque, nimirum: $ABCD, ABFE, ADE, CDEF, BCF$. TAB. II.
Fig. 2.

§. 9. Omnis ergo solidorum diuersitas cum ex numero angulorum solidorum, tum ex numero acierum, tum vero ex numero hedrarum nascitur. Vtitatae autem solidorum denominationes ex numero hedrarum peti solent, unde nota sunt nomina tetraedri, hexaedri, octaedri, dodecaedri et icosaedri, etsi ea corporibus tantum regularibus tribui solent. In genere enim nomine polyedri indicatur corpus quodcunque siue regulare, siue irregulare, quod certo hedrarum numero includitur.

§. 10. Simili modo si diuersa solidorum genera ex numero angulorum solidorum definire velimus, eorum nomina erunt tetragonum, pentagonum, hexagonum, heptagonum etc. Atque corpus cuneiforme ante consideratum hoc modo erit hexagonum appellandum, quod secundum hedrarum numerum est pentaedrum.

§. 11. Quoniam vero solida, quae pari hedrarum numero includuntur, ratione numeri angulorum solidorum inter se differre possunt, ad ea inter se diligentius distinguenda, conueniet cuiusque denominationem tam a numero hedrarum, quam a numero angulorum solidorum petere

petere. Ita solidum cuneiforme ante consideratum vocabitur *pentaedrum hexagonum*; Pyramis triangularis erit *tetraedrum tetragonum*; Prisma triangulare *pentaedrum hexagonum*; Parallelepipedum vero *hexaedrum octogonum* et ita porro.

§. 12. Et si ergo ad genus figurae planae rectilineae designandum sufficit laterum numerum, quibus includitur, commemorasse, quoniam angulorum numerus semper est aequalis numero laterum; tamen in solidis numerus angulorum solidorum admodum discrepare potest a numero hedrarum, unde utrumque numerum nominare opus est. Sic pyramis quadrangularis aequè includitur quinque hedris, ac prisma triangulare, sed illa quinque tantum habet angulos solidos, dum hoc habet sex.

§. 13. Ad solidorum vero genera constituenda superfluum foret praeter hedrarum et angulorum solidorum numeros insuper numerum acierum adicere, quoniam uti deinceps monstrabo, acierum numerus semper ex numero hedrarum et angulorum solidorum determinatur, ita ut, si datus fuerit tam numerus hedrarum, quam numerus angulorum solidorum, cuiusque solidi inde simul numerus acierum sit cognitus.

§. 14. Ulteriores vero solidorum differentiae petendae sunt cum ex indole hedrarum, seu numero laterum, quibus quaeque hedra includitur; tum vero ex indole angulorum solidorum, prout quisque vel ex tribus, pluribusue angulis planis fuerit formatus. Angelus enim solidus ex paucioribus, quam tribus angulis planis constare nequit;

nequit; plures autem quotcunque ad angulum solidum constituendum concurrere possunt, dummodo eorum omnium summa fuerit quatuor rectis minor.

§. 15. Datis omnibus hedris, quibus solidum quodpiam includitur, statim cognoscetur numerus omnium laterum cunctas hedras includentium, cui numero aequalis est numerus omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris reperiuntur, quia in qualibet hedra numerus angulorum aequalis est numero laterum.

§. 16. Deinde etiam summa omnium angulorum planorum facile exhiberi potest, propterea quod in quaque hedra summa omnium eius angulorum ex eiusdem numero laterum definitur. Quotcunque enim laterum fuerit hedra quaequam, summa omnium eius angulorum aequatur, vti constat, bis tot angulis rectis, quot sunt latera, demtis quatuor.

§. 17. Ad solidum ergo definiendum, praeter numeros angulorum solidorum, acierum ac hedrarum, quae res proprie ad ambitum solidi pertinent, commode quoque adhiberi possunt, cum numerus omnium laterum, seu, qui ei est aequalis, numerus omnium angulorum planorum, sum vero etiam summa omnium horum angulorum planorum.

§. 18. Ex collatione harum quinque rerum, quas in quouis solido considerare licet, plures insignes proprietates solidorum generales obtineri possunt, quae similes erunt earum proprietatum, quae de figuris planis recti-

lineis in genere proferri solent. Maior autem istarum rerum, quas in solidis spectamus, numerus plures etiam proprietates generales suppeditabit, quam in figuris planis locum inveniunt.

§. 19. Quas proprietates, cum nemo eorum, qui Stereometriam tractauerunt, fere attigerit, operam dabo, ut si non omnes, tamen praecipuas in medium afferam, atque demonstrationibus confirmem. Quod eo maiorem utilitatem habiturum videtur, cum sine harum proprietatum cognitione doctrina solidorum neutiquam cum successu tractari queat.

§. 20. Eo magis igitur merito mirum videbitur, quod cum prima Geometriae planae elementa iam a tam longo temporis intervallo omni cura sint elaborata, ac perspicue exposita, prima quasi Stereometriae elementa tantis adhuc tenebris sint inuoluta, nemoque fuerit inuentus, qui ea in lucem protrahere sit conatus.

PROPOSITIO I.

§. 21. *In quouis solido numerus omnium acierum est semissis numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum eius constituentibus reperiuntur.*

DEMONSTRATIO.

Quaelibet acies in ambitu solidi formatur a duobus lateribus duarum hedrarum, et cum inter omnia latera cunctarum hedrarum bina coniuncta singulas acies constituent, tuant,

tuant, manifestum est numerum acierum omnium esse semissem numeri omnium laterum. At numerus omnium laterum aequalis est numero omnium angulorum planorum, quia quaecumque hedra tot habet angulos quot latera. Ergo numerus acierum quoque semissem est numeri omnium angulorum planorum, qui in cunctis hedris ambitum solidi constituentibus reperiuntur. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 22. Cum numerus acierum fractus esse nequeat, perspicuum est, numerum omnium laterum vel omnium angulorum planorum semper parem esse debere; huiusque numeri semissem dabit numerum acierum, quae in ambitu solidi deprehenduntur.

COROLL. 2.

§. 23. Si igitur omnes hedrae ambitum solidi cuiuspiam constituentes fuerint triangula, earum numerus necessario erit par; si enim numerus harum hedrarum esset impar, tum etiam numerus angulorum planorum esset impar; quod evenire non potest. Idem tenendum est de hedris omnibus, quae sunt polygoni imparium laterum; scilicet si singulae hedrae fuerint vel triangula, vel pentagona, vel heptagona, vel etc. earum numerus semper debet esse par.

COROLL. 3.

§. 24. Si inter hedras ambitum solidi cuiuspiam constituentes numerus earum, quae sunt vel tetragonae,
P 2 vel

vel hexagonae, vel octogonae, vel polygonae quaecunque parisi laterum numeri, fuerit $=m$, numerus vero earum, quae sunt vel trigonae, vel pentagonae, vel heptagonae, vel polygonae quaecunque imparisi laterum numeri $=n$, ita ut numerus omnium hedrarum sit $=m+n$; tum numerus n debet esse par. Quod vero ad numerum m attinet, perinde est siue sit par siue impar.

COROLL. 4.

§. 25. Si ergo ambitus totius solidi constet ex a triangulis, b quadrangulis, c pentagonis, d hexagonis, e heptagonis etc. erit numerus omnium hedrarum $=a+b+c+d+e+etc.$ Numerus vero omnium angulorum planorum, seu laterum erit $=3a+4b+5c+6d+7e+etc.$ Numerus autem omnium acierum in ambitu solidi $=\frac{3a+4b+5c+6d+7e+etc.}{2}$ unde numerus $a+c+e+etc.$ debet esse par.

PROPOSITIO II.

§. 26. Numerus omnium angulorum planorum vel aequalis est vel maior numero omnium hedrarum ter sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor esse potest, quam triplum numeri hedrarum ambitum solidi cuiusquam constituentium

DEMONSTRATIO.

Omnes hedrae sunt vel triangula vel figurae plurium laterum; si omnes hedrae sunt triangula, numerus laterum

terum seu angulorum planorum erit triplo maior, quam numerus hedrarum; fin autem vel omnes vel aliquae hedrae plures tribus habeant angulos, tum etiam numerus angulorum planorum maior erit quam triplum numeri hedrarum. Semper ergo numerus angulorum planorum vel aequalis est vel maior numero hedrarum ter. sumto, ipsoque minor nunquam esse potest. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 27. Si ergo omnes hedrae fuerint triangulares, numerus angulorum planorum aequalis erit triplo numeri hedrarum; fin autem non omnes hedrae sint triangulares, sed figurae plurium laterum, tum numerus angulorum planorum maior erit, quam triplum numeri hedrarum.

COROLL. 2.

§. 28. In solido igitur quocunque, si numerus hedrarum ponatur $= H$, et numerus acierum $= A$, quia numerus angulorum planorum est, $= 2 A$, erit vel $2 A = 3 H$ vel $2 A > 3 H$. Impossibile ergo est, ut sit $2 A < 3 H$.

COROLL. 3.

§. 29. Retentis his denominationibus nullum datur solidum, in quo sit $A < \frac{2}{3} H$ vel $H > \frac{3}{2} A$. Quanquam autem hinc relatio inter numerum hedrarum et numerum acierum non determinatur, tamen plurimae relationes excluduntur, quae nunquam locum habere possunt.

PROPOSITIO. III.

§. 30. Numerus omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiusque solidi existunt vel aequalis est vel maior numero angulorum solidorum ter sumto. Vel numerus angulorum planorum nunquam minor esse potest quam triplum numeri angulorum solidorum.

DEMONSTRATIO.

Quilibet angulus solidus vel a tribus angulis planis formatur vel a pluribus, pauciores enim quam tres anguli plani angulum solidum constituere nequeunt. Hinc si omnes anguli solidi a tribus planis formantur, numerus angulorum planorum triplo maior esse debet quam numerus angulorum solidorum; sin autem ad quosdam angulos solidos constituendos plures anguli plani coniunguntur, numerus angulorum planorum quoque maior erit quam numerus angulorum solidorum, minor autem nunquam esse potest. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 31. Si numerus angulorum solidorum ponatur $= S$, numerus vero acierum $= A$ pro solido quocunque, quia numerus omnium angulorum planorum est $= 2A$, semper erit vel $2A = 3S$ vel $2A > 3S$.

COROLL. 2.

§. 32. Fieri ergo nequit, ut vnquam sit $2A < 3S$, seu $A < \frac{3}{2}S$, seu $S > \frac{2}{3}A$. Quare si praeterea numerus
hedra-

hedrarum ponatur $= H$, neque hic numerus H neque numerus S maior esse potest quam $\frac{2}{3} A$.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum.*

DEMONSTRATIO.

Scilicet si ponatur ut haecenus :

numerus angulorum solidorum $= S$

numerus acierum - - - $= A$

numerus hedrarum - - - $= H$

demonstrandum est, esse $S + H = A + 2$.

Fateri equidem cogor, me huius theorematidis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoscetur, ita ut sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat.

1. Consideremus ergo primo pyramidem quamcum-
que super basi $A B C D E F G$ quotcumque laterum constitutam et in apicem H desinentem. Sit numerus laterum basis $= m$, totidemque triangula a basi ad apicem usque assurgent. Inclauditur ergo haec pyramis $m + 1$ hedris, quarum m sunt triangula, una vero polygonum m angulorum seu laterum. Erit itaque numerus hedrarum

rum $H = m + 1$, atque numerus angulorum solidorum pariter est $S = m + 1$. Deinde numerus omnium angulorum planorum est $= 3m + m = 4m$, vnde numerus acierum erit $A = 2m$. Cum igitur sit $H + S = 2m + 2$ erit vtique hoc casu $H + S = A + 2$.

Fig. 2. 2. Sit solidum cuneiforme a basi quocunque laterum $A B C D$ in aciem $E F$ definens. Sit basis polygonum m laterum, erit numerus angulorum solidorum binario maior seu $S = m + 2$. Deinde praeter ipsam basin tot aderunt hedrae, quot latera habet basis, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 1$, ex his hedris vna nempe basis est polygonum m laterum, reliquae erunt triangula duabus exceptis, quae esse debent quadrilatera, suoque concursu aciem $E F$ constituunt; praeter basin ergo m laterum, habentur $m - 2$ triangula et 2 quadrilatera, ex quo numerus omnium laterum seu angulorum planorum erit $= m + 3(m - 2) + 2 \cdot 4 = 4m + 2$, hincque prodit numerus acierum $A = 2m + 1$. Cum ergo sit $H + S = 2m + 3$ erit $H + S = A + 2$.

Fig. 4. 3. Sit solidum arcae seu cistae simile, intra duas bases $A B C D$ et $E F G H$ contentum, vtraque autem basis eundem habeat laterum numerum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $S = 2m$. Deinde praeter has duas bases reliquae hedrae erunt quadrilaterae, earumque numerus $= m$, vnde numerus omnium hedrarum erit $H = m + 2$. Angulorum autem planorum numerus ob duas hedras m laterum et m hedras quadrilateras erit $= 2m + 4m = 6m$, hincque acierum numerus
conclu-

concluditur $A = 3m$. Quare, cum fit $H + S = 3m + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

4. Habeat denuo solidum duas bases $A B C D E$, Fig. 5. et $F G H$, quae autem non eodem gaudeant laterum numero. Sit ergo pro altera basi $A B C D E$ numerus laterum maior $= m + n$, pro altera vero basi $F G H$ numerus laterum $= m$, eritque numerus angulorum solidorum $= m + n + m$, seu $S = 2m + n$. Tum praeter duas bases tot erunt hedrae, quot latera habet altera basis, quae maiori laterum numero gaudet, scilicet $m + n$, unde omnium hedrarum numerus est $H = m + n + 2$; quarum cum altera basis habeat latera $m + n$, altera m , inter reliquas vero hedras, quarum numerus est $m + n$, tot esse debeant quadrilaterae, quot basis $F G H$ habet latera, nempe m , ceterae vero, quarum numerus est n , sint triangulares, omnium angulorum planorum numerus est $= m + n + m + 4m + 3n = 6m + 4n$, erit numerus acierum $A = 3m + 2n$. Cum igitur fit $H + S = 3m + 2n + 2$, erit iterum $H + S = A + 2$.

5. Sit corpus denuo in duas bases $A B C D$ et Fig. 6. $L M N$ terminatum, circa medium autem habeat angulos solidos E, F, G, H, I, K . Sit numerus laterum basis $A B C D = m$, basis $L M N = n$, numerus autem angulorum solidorum circa medium sit $= p$, qui sit maior, quam m et quam n . Erit ergo numerus omnium angulorum solidorum $S = m + n + p$. Tum ab angulis solidis mediis ad basin $A B C D$ dirigentur hedrae numero $= p$, quarum m erunt quadrilaterae, reliquae

Tom. IV. Nou. Com.

Q

$p - m$

$p - m$ triangulares ; simili modo ad alteram basin LMN dirigentur hedrae quoque numero $= p$, quarum n erunt quadrilaterae, reliquae vero $p - n$ triangulares, sic cum duabus basibus numerus omnium hedrarum erit $= 2 + p + p$ seu $H = 2p + 2$. Quarum cum una habeat m latera, alia n latera, et quadrilaterarum numerus sit $= m + n$, trigonaliū $= 2p - m - n$, erit omnium angulorum planorum numerus $= m + n + 4(m + n) + 3(2p - m - n) = 6p + 2m + 2n$, ideoque numerus acierum prodie $A = 3p + m + n$. Quare cum sit $H + S = 3p + m + n + 2$, erit denuo $H + S = A + 2$.

6. Positis iisdem atque in casu praecedente, sit $m > p$ et $p > n$, erit ut ante numerus angulorum solidorum $S = m + n + p$. A basi autem ABCD iam m hedrae ad angulos solidos medios dirigentur, quarum erunt p quadrangulares, et $m - p$ triangulares. Ab angulis autem mediis ad alteram basin LMN dirigentur p hedrae, quarum erunt n quadrilaterae, et $p - n$ triangulares. Hinc ergo omnium hedrarum numerus erit $= 2 + m + p$ seu $H = m + p + 2$, quarum hedrarum una est m laterum, alia n laterum, $p + n$ quadrilaterae, et $m - p + p - n$ seu $m - n$ trilateriae. Hanc ob rem omnium angulorum planorum numerus erit $= m + n + 4(p + n) + 3(m - n) = 4p + 4m + 2n$, hincque acierum numerus $A = 2p + 2m + n$. Vnde cum sit $H + S = 2p + 2m + n$, erit $H + S = A + 2$.

7. Si angulorum solidorum mediorum numerus p minor sit utroque numero m et n , erit quidem ut ante
angu-

angulorum solidorum numerus $S = m + n + p$. Sed iam a basi $ABCD$ ad angulos medios diriguntur hedrae m , ab altera vero basi hedrae n , et vtrunque erunt p quadrangulares, ex illa vero parte $m - p$, ex hac vero $n - p$ triangulares. Vnde numerus omnium hedrarum erit $= 2 + m + n$ seu $H = m + n + 2$: angulorum autem planorum numerus erit $= m + n + 4 \cdot 2p + 3(m + n - 2p) = 2p + 4m + 4n$. Quare acierum numerus prodit $A = p + 2m + 2n$; et cum sit $H + S = 2m + 2n + p + 2$, erit $H + S = A + 2$.

8. Et si haec sufficere possent ad veritatem propositionis euincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare libet. Pro tetraëdro quidem erit numerus hedrarum $H = 4$, quae cum sint triangulares, erit omnium angulorum planorum numerus $= 12$, ideoque acierum numerus $A = 6$, et quia singuli anguli solidi ex tribus planis formantur, erit eorum numerus $S = \frac{12}{2} = 6$: hinc $H + S = 8 = A + 2$. Pro hexaëdro est $H = 6$, et ob singulas hedras quadrilateras angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque acierum numerus $A = 12$: ac dum terni anguli plani vnum solidum constituunt, erit solidorum numerus $S = \frac{24}{3} = 8$, sicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro octaëdro est $H = 8$, cuius hedrae cum sint trilatae, erit omnium angulorum planorum numerus $= 24$, ideoque numerus acierum $A = 12$, ac dum quaterni anguli plani vnum solidum formant, erit angulorum solidorum numerus $S = \frac{24}{4} = 6$, sicque $H + S = 14 = A + 2$. Pro dodecaëdro est $H = 12$, cuius hedrae cum sint pentagonae, erit numerus angulorum planorum $= 5 \cdot 12$

Q 2

= 60

$= 60$, ideoque numerus acierum $A = 30$. Deinde quia terni anguli plani ad solidum concurrunt, erit numerus angulorum solidorum $S = 20$, ergo $H + S = 32 = A + 2$. Pro icosaedro est $H = 20$, cuius hedrae cum sint trigonales, erit angulorum planorum numerus $= 60$, numerusque acierum $A = 30$. Tum vero quia singuli anguli solidi constant quinque planis, erit eorum numerus $S = 12$, ideoque $H + S = 32 = A + 2$.

Cum igitur veritas propositionis in his omnibus casibus sibi constet, dubium est nullum, quin ea in omnibus omnino solidis locum habeat, sicque propositio sufficienter videtur demonstrata.

C O R O L L. 1.

§. 34. Si ergo in quopiam solido detur numerus angulorum solidorum S cum numero hedrarum H , inde statim cognoscetur numerus acierum A , cum sit $A = H + S - 2$.

C O R O L L. 2.

§. 35. Datis autem in solido quocunque numero angulorum solidorum S cum numero acierum A , inde facile colligitur numerus hedrarum H , cum sit $H = A - S + 2$.

C O R O L L. 3.

§. 36. Datis autem in solido quocunque numero hedrarum H una cum numero acierum A , inde facile reperietur numerus angulorum solidorum S , quia est $S = A - H + 2$.

PROPO-

PROPOSITIO V.

§. 37. Nullum existere potest solidum, in quo numerus acierum senario auctus maior esset, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum solidorum.

DEMONSTRATIO

Sit numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum solidorum $= S$, atque supra vidimus, fieri non posse, ut sit vel $3 H > 2 A$, vel $3 S > 2 A$, erunt ergo hae formulae $3 H > 2 A$, et $3 S > 2 A$ impossibiles. Nunc autem vidimus, esse $H + S = A + 2$, seu $H = A - S + 2$, et $S = A - H + 2$, qui valores in illis formulis impossibilibus substituti dabunt sequentes formulas impossibiles:

$$3 A - 3 S + 6 > 2 A, \text{ et } 3 A - 3 H + 6 > 2 A,$$

quae abeunt in has

$$A + 6 > 3 S, \text{ et } A + 6 > 3 H.$$

Vnde manifestum est, fieri non posse, ut numerus acierum senario auctus maior sit, quam vel triplum numeri hedrarum, vel triplum numeri angulorum solidorum Q. E. D.

COROLL. I.

§. 38. In omni ergo solido vel est $A + 6 = 3 H$, vel $A + 6 < 3 H$, similique modo est vel $A + 6 = 3 S$, vel $A + 6 < 3 S$. Siue si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, assumantur

Q 3 mantur

mantur ad numeros positivos, cyphra non excepta, designandos, erit:

$$A + 6 + \alpha = 3 H, \text{ et } A + 6 + \xi = 3 S.$$

COROLL. 2.

§. 39. Tum vero quia semper est vel $A = \frac{2}{3} S$, vel $A > \frac{2}{3} S$; item vel $A = \frac{2}{3} H$, vel $A > \frac{2}{3} H$, erit simili modo

$A = \frac{2}{3} H + \gamma$, et $A = \frac{2}{3} S + \delta$
vbi γ , et δ , vt ante α , et ξ non possunt esse numeri negativi.

COROLL. 3.

§. 40. His posterioribus valoribus in praecedentibus aequationibus substitutis prodibunt hae aequationes:

$$\frac{2}{3} H + 6 + \alpha + \gamma = 3 H, \text{ et } \frac{2}{3} S + 6 + \xi + \delta = 3 S$$

$$\text{feu } 4 + \frac{2}{3} (\alpha + \gamma) = H, \text{ et } 4 + \frac{2}{3} (\xi + \delta) = S$$

vnde patet, tam numerum hedrarum, quam numerum angulorum solidorum quaternario minorem esse non posse.

COROLL. 4.

§. 41. Cum sit $H + S = A + 2$, erit hos postremos valores adhibendo, $8 + \frac{2}{3} (\alpha + \xi + \gamma + \delta) = A + 2$, vnde colligitur, numerum acierum A senario nunquam minorem esse posse. Est igitur pyramis triangularis omnium solidorum simplicissimum, quia tam numerus hedrarum, quam angulorum solidorum est $= 4$, et numerus acierum $= 6$.

PROPO-

PROPOSITIO VI.

§. 42. Nullum existere potest solidum, in quo vel numerus hedrarum quaternario auctus, maior sit duplo numero angulorum solidorum, vel in quo numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior, sit duplo numero hedrarum.

DEMONSTRATIO.

Sit numerus hedrarum $= H$, numerus angulorum solidorum $= S$, et numerus acierum $= A$, et quoniam supra ostendimus fieri non posse, ut sit vel $3H > 2A$ vel $3S > 2A$, hae duae formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2A, \text{ et } 3S > 2A.$$

Cum iam sit $A = H + S - 2$, hoc valore pro A substituto sequentes formulae erunt impossibiles:

$$3H > 2H + 2S - 4, \text{ et } 3S > 2H + 2S - 4$$

quae abeunt in has

$$H + 4 > 2S, \text{ et } S + 4 > 2H.$$

Vnde neque numerus hedrarum quaternario auctus maior esse potest duplo numero angulorum solidorum, neque numerus angulorum solidorum quaternario auctus maior duplo numero hedrarum. Q. E. D.

COROLL. I.

§. 43. In omni ergo solido vel est $H + 4 = 2S$, vel $H + 4 < 2S$, deinde simili modo est vel $S + 4 = 2H$, vel $S + 4 < 2H$. Si igitur α et β denotent numeros positivos cyphra non excepta, in omni solido
hae

hae aequationes locum habebunt $H + 4 + \alpha = 2S$,
et $S + 4 + \epsilon = 2H$.

COROLL. 2.

§. 44. Cum fit $S = 2H - 4 - \epsilon$, et $S = \frac{1}{2}H + 2 + \frac{1}{2}\alpha$, numerus angulorum solidorum S neque maior esse potest, quam $2H - 4$, neque minor quam $\frac{1}{2}H + 2$. Ergo numerus angulorum solidorum S extra hos limites $2H - 4$, et $\frac{1}{2}H + 2$ cadere nequit.

COROLL. 3.

§. 45. Simili modo cum fit $H = 2S - 4 - \alpha$, et $H = \frac{1}{2}S + 2 + \frac{1}{2}\epsilon$, numerus hedrarum H neque maior esse potest, quam $2S - 4$, neque minor, quam $\frac{1}{2}S + 2$; unde numerus hedrarum H extra hos limites $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere nequit.

COROLL. 4.

§. 46. Deinde ex superiori propositione intelligitur, numerum acierum A neque extra hos limites $\frac{2}{3}H$, et $3H - 6$, neque extra hos limites $\frac{2}{3}S$, et $3S - 6$ cadere posse; simili modo indidem patet, numerum hedrarum H non extra hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$, nec numerum angulorum solidorum S extra hos eosdem limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ cadere posse.

COROLL. 5.

§. 47. Dato ergo numero hedrarum, tam pro numero angulorum solidorum, quam pro numero acierum, limi-

limites assignari possunt, quos transgredi nequeant, quosque subiecta tabella exhibet:

Limites, quos transgredi nequit

Numerus hedrarum	numerus angulorum solidorum	numerus acierum
4	4 - - - - 4	6 - - - - 6
5	6 - - - - $4\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$ - - - - 9
6	8 - - - - 5	9 - - - - 12
7	10 - - - - $5\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$ - - - - 15
8	12 - - - - 6	12 - - - - 18
9	14 - - - - $6\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$ - - - - 21
10	16 - - - - 7	15 - - - - 24
11	18 - - - - $7\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$ - - - - 27
12	20 - - - - 8	18 - - - - 30
13	22 - - - - $8\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{2}$ - - - - 33
14	24 - - - - 9	21 - - - - 36
15	26 - - - - $9\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$ - - - - 39
16	28 - - - - 10	24 - - - - 42
17	30 - - - - $10\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$ - - - - 45
18	32 - - - - 11	27 - - - - 48
19	34 - - - - $11\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$ - - - - 51
20	36 - - - - 12	30 - - - - 54
21	38 - - - - $12\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$ - - - - 57
22	40 - - - - 13	33 - - - - 60
23	42 - - - - $13\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$ - - - - 63
24	44 - - - - 14	36 - - - - 66
25	46 - - - - $14\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{2}$ - - - - 69

COROLL. 6.

§. 48. Sin autem numerus angulorum solidorum S est datus, pro numero acierum iidem prodeunt limites, quos tabula exhibet, pro numero vero hedrarum ii reperiuntur limites, qui in tabula pro numero angulorum solidorum sunt exhibiti.

COROLL. 7.

§. 49. Verum si numerus acierum A sit datus, quoniam neque numerus hedrarum, neque numerus angulorum solidorum hos limites $\frac{2}{3}A$, et $\frac{1}{3}A + 2$ excedere potest, sequens tabula limitum constructur:

Numerus acierum	Limites pro numeri H et S	Numerus acierum	Limites pro numeris H et S
6	4 --- 4	20	13 $\frac{1}{3}$ --- 8 $\frac{2}{3}$
7	4 $\frac{2}{3}$ --- 4 $\frac{1}{3}$	21	14 --- 9
8	5 $\frac{1}{3}$ --- 4 $\frac{2}{3}$	22	14 $\frac{2}{3}$ --- 9 $\frac{1}{3}$
9	6 --- 5	23	15 $\frac{1}{3}$ --- 9 $\frac{2}{3}$
10	6 $\frac{2}{3}$ --- 5 $\frac{1}{3}$	24	16 --- 10
11	7 $\frac{1}{3}$ --- 5 $\frac{2}{3}$	25	16 $\frac{2}{3}$ --- 10 $\frac{1}{3}$
12	8 --- 6	26	17 $\frac{1}{3}$ --- 10 $\frac{2}{3}$
13	8 $\frac{2}{3}$ --- 6 $\frac{1}{3}$	27	18 --- 11
14	9 $\frac{1}{3}$ --- 6 $\frac{2}{3}$	28	18 $\frac{2}{3}$ --- 11 $\frac{1}{3}$
15	10 --- 7	29	19 $\frac{1}{3}$ --- 11 $\frac{2}{3}$
16	10 $\frac{2}{3}$ --- 7 $\frac{1}{3}$	30	20 --- 12
17	11 $\frac{1}{3}$ --- 7 $\frac{2}{3}$	31	20 $\frac{2}{3}$ --- 12 $\frac{1}{3}$
18	12 --- 8	32	21 $\frac{1}{3}$ --- 12 $\frac{2}{3}$
19	12 $\frac{2}{3}$ --- 8 $\frac{1}{3}$	33	22 --- 13

Num.

DOCTRINAE SOLIDORVM. 131

Numerus acierum	Limites pro numeris H et S		Numerus acierum	Limites pro numeris H et S	
34	$22\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	48	32	18
35	$23\frac{1}{3}$	$13\frac{2}{3}$	49	$32\frac{2}{3}$	$18\frac{1}{3}$
36	24	14	50	$33\frac{1}{3}$	$18\frac{2}{3}$
37	$24\frac{2}{3}$	$14\frac{1}{3}$	51	34	19
38	$25\frac{1}{3}$	$14\frac{2}{3}$	52	$34\frac{2}{3}$	$19\frac{1}{3}$
39	26	15	53	$35\frac{1}{3}$	$19\frac{2}{3}$
40	$26\frac{2}{3}$	$15\frac{1}{3}$	54	36	20
41	$27\frac{1}{3}$	$15\frac{2}{3}$	55	$36\frac{2}{3}$	$20\frac{1}{3}$
42	28	16	56	$37\frac{1}{3}$	$20\frac{2}{3}$
43	$28\frac{2}{3}$	$16\frac{1}{3}$	57	38	21
44	$29\frac{1}{3}$	$16\frac{2}{3}$	58	$38\frac{2}{3}$	$21\frac{1}{3}$
45	30	17	59	$39\frac{1}{3}$	$21\frac{2}{3}$
46	$30\frac{2}{3}$	$17\frac{1}{3}$	60	40	23
47	$31\frac{1}{3}$	$17\frac{2}{3}$			

COROLL. 8.

§. 50. Ad hanc tabulam insuper notari convenit, quantum numerorum H et S alter limitem minorem superet, tantundem alterum a limite maiore deficere debere. Ita si numerus acierum A est = 30, et numerus hedrarum $H = 12 + n$, erit numerus angulorum solidorum $S = 20 - n$, at $20 - n$ non debet esse minus quam 12, unde n octonarium superare nequit.

PROPOSITIO VII.

§. 51. Nullum existere potest solidum, cuius omnes hedrae sint hexagonae, vel plurium laterum; neque ullum existere potest solidum, cuius omnes anguli solidi ex sex, pluribusue angulis planis sint formati.

R 2

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Sit ut hactenus numerus acierum $= A$, numerus hedrarum $= H$, et numerus angulorum solidorum $= S$. Quod si iam omnes hedrae essent hexagonae, vel plurium laterum, numerus omnium angulorum planorum esset vel $= 6H$, vel $> 6H$; hinc numerus acierum A foret vel $= 3H$, vel $> 3H$. At supra vidimus, semper esse $A = 3H - 6$, vel $A < 3H - 6$; nullo modo ergo fieri potest, ut esset vel $A = 3H$, vel $A > 3H$; unde impossibile est, ut omnes hedrae sint vel hexagonae, vel plurium laterum. Q. E. Unum.

Simili modo si omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis constarent, foret omnium angulorum planorum numerus vel $= 6S$ vel $> 6S$, hincque numerus acierum A esset vel $= 3S$, vel $> 3S$. At supra demonstrauius, fieri non posse, ut sit $A + 6 > 3S$, multo minus ergo esse poterit $A = 3S$, vel adeo $A > 3S$. Unde impossibile est, ut omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis constent. Q. E. Alterum.

PROPOSITIO VIII.

§. 52. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu cuiuscunque solidi reperiuntur, aequalis est quater tot angulis rectis, quot unitates occurrunt in excessu numeri acierum super numerum hedrarum.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus acierum $= A$, numerusque hedrarum $= H$

$\equiv H$, atque demonstrandum est, summam omnium angulorum planorum aequalem esse $4A - 4H$ rectis. Ad hoc demonstrandum confitet solidi ambitus

ex a hedris trigonis
 ex b hedris tetragonis
 ex c hedris pentagonis
 ex d hedris hexagonis
 ex e hedris heptagonis
 etc.

erit ergo numerus hedrarum $H = a + b + c + d + e + \text{etc.}$
 et numerus acierum $A = \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.})$
 quia numerus angulorum planorum est $= 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \text{etc.}$

Iam cum summa angulorum vnus trianguli sit $= 2$ rectis
 - - - - - vnus quadrilateri $= 4$ rectis
 - - - - - vnus pentagoni $= 6$ rectis
 - - - - - vnus hexagoni $= 8$ rectis
 - - - - - vnus heptagoni $= 10$ rectis
 etc.

erit summa omnium angulorum planorum $=$
 $2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.}$ angulis rectis,
 at est $4A = 6a + 8b + 10c + 12d + 14e + \text{etc.}$
 et $4H = 4a + 4b + 4c + 4d + 4e + \text{etc.}$

ergo $4A - 4H = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.}$
 Consequenter summa omnium angulorum planorum
 aequalis est $4A - 4H$ angulis rectis. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 53. Cum fit vel $2A = 3H$, vel $2A > 3H$, si ponamus $2A = 3H + \alpha$, erit summa angulorum planorum $= 2H + 2\alpha$, ideoque minor esse nequit, quam $2H$ anguli recti.

COROLL. 2.

§. 54. Deinde cum fit $A = 3H - 6 - \alpha$, erit $4A - 4H = 8H - 24 - 4\alpha$. Hinc summa omnium angulorum planorum maior esse nequit, quam $8H - 24$ anguli recti. Numerus ideoque angulorum rectorum, quibus summa omnium angulorum planorum est aequalis, extra hos limites $2H$, et $8H - 24$ cadere nequit.

PROPOSITIO IX.

§. 55. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cuiuscunque occurrunt, aequalis est quater tot angulis rectis, quot adsunt anguli solidi, demtis octo.*

DEMONSTRATIO.

Sit numerus angulorum solidorum $= S$, ac demonstrari debet, summam omnium angulorum planorum aequalem esse $4S - 8$ angulis rectis. Ponatur ad hoc numerus hedrarum $= H$, et numerus acierum $= A$, et quia in praecedente propositione demonstraui, summam omnium angulorum planorum esse $= 4A - 4H$ angulis rectis, ob $H + S = A + 2$, erit $A - H = S - 2$, ideoque $4A - 4H = 4S - 8$. Vnde perspicuum est, summam

summam omnium angulorum planorum esse $= 4S - 8$ rectis, seu aequari quater tot rectis, quot sunt anguli solidi dentis octo. Q. E. D.

COROLL. 1.

§. 56. Insignis ac palmaria haec est proprietas solidorum, quod summa omnium angulorum planorum vnice per numerum angulorum solidorum definitur, simili modo, quo in quavis figura plana summa angulorum eorum numero colligitur.

COROLL. 2.

§. 57. Merito igitur desideratur demonstratio huius propositionis ex solo numero angulorum solidorum petita, ita vt eam neque numerus hedrarum, neque numerus acierum ingrediatur. Hinc igitur, atque ex propositione quarta, cuius ne demonstrationem quidem apodicticam exhibere potui, eo magis elucet, quam parum etiam nunc elementa Stereometriae sint exulta.

COROLL. 3.

§. 58. Quoniam summa omnium angulorum planorum vnice a numero angulorum solidorum pendet, iste numerus eiusmodi characterem solidorum constituit, a quo genera solidorum deriuanda esse videantur. Hinc ergo genera solidorum erunt secundum numerum angulorum solidorum sequentia: 1. Tetragonum. 2. Pentagonum 3. Hexagonum, 4. Heptagonum etc. quae deinceps per numerum hedrarum magis determinabuntur.

PROBLE.

PROBLEMA I.

§. 59. Genera notabiliora, ad quae omnia solida figuris planis inclusa, sunt referenda, enumerare, nominibusque idoneis denotare.

SOLVITIO.

Sit numerus angulorum solidorum = S , atque supra vidimus, numerum hedrarum extra hos limites: $2S - 4$, et $\frac{1}{2}S + 2$ cadere non posse. Hinc ex tabella (§. 47.) exhibita pro quovis numero angulorum solidorum sequentia solidorum genera constituentur:

Num. ang. fol.	numerus hedrarum	numerus acierum	Nomina generum
4	4	6	Tetragonum tetraedrum
5	5	8	Pentagonum pentaedrum.
	6	9	Pentagonum hexaedrum.
6	5	9	Hexagonum pentaedrum.
	6	10	Hexagonum hexaedrum.
	7	11	Hexagonum heptaedrum.
	8	12	Hexagonum octaedrum.
7	6	11	Heptagonum hexaedrum.
	7	12	Heptagonum heptaedrum.
	8	13	Heptagonum octaedrum.
	9	14	Heptagonum enneaedrum.
	10	15	Heptagonum Decaedrum.

Num.

DOCTRINAE SOLIDORVM. 137

Num. ang. solidor.	numerus hedrarum	numerus acierum	nomina generum
8	6	12	Octogonum hexaedrum.
	7	13	Octogonum heptaedrum.
	8	14	Octogonum octaedrum.
	9	15	Octogonum enneaedrum.
	10	16	Octogonum decaedrum.
	11	17	Octogonum hendecaedrum.
	12	18	Octogonum dodecaedrum.
9	7	14	Enneagonum heptaedrum.
	8	15	Enneagonum Octaedrum.
	9	16	Enneagonum enneaedrum.
	10	17	Enneagonum decaedrum.
	11	18	Enneagonum hendecaedrum.
	12	19	Enneagonum dodecaedrum.
	13	20	Enneagonum 13edrum.
10	14	21	Enneagonum 14edrum.
	7	15	Decagonum heptaedrum.
	8	16	Decagonum octaedrum.
	9	17	Decagonum enneaedrum.
	10	18	Decagonum decaedrum.
	11	19	Decagonum hendecaedrum.
	12	20	Decagonum dodecaedrum.
	13	21	Decagonum 13edrum.
	14	22	Decagonum 14edrum.
	15	23	Decagonum 15edrum.
	16	24	Decagonum 16edrum.
etc.			

superfluum foret hunc generum solidorum catalogum ulte-
 Tom. IV. Nou. Com. S rius

rius continuare, quoniam ex his progressio sequentium generum sponte perspicitur. Q. E. I.

C O R O L L. 1.

§. 60. Notari hic conuenit, nullum dari solidum, quod septem habeat acies, cum tamen primum genus tantum sex habeat acies; secundum genus habet octo, sequentia plures, atque in numeris acierum post senarium omnes numeri occurrunt, solo septenario excepto.

C O R O L L. 2.

§. 61. Ex primo genere patet, omne solidum tetragonon simul esse tetraedrum; et vicissim, quod genus, uti est simplicissimum, ita unicam speciem continet, quae est pyramis triangularis quatuor triangulis inclusa.

C O R O L L. 3.

§. 62. Secundum genus habens 16 angulos planos, et 5 solidos, horum quatuor ex tribus planis, vnus ex 4 planis erit formatus, similiterque quinque eius hedrarum quatuor erunt triangula, vna vero quadrilaterum, ex quo hoc genus unicam speciem, scilicet pyramidem super basi quadrilatera extractam, continet.

C O R O L L. 4.

§. 63. Tertium genus habens 18 angulos planos, 5 solidos, et 6 hedras includetur sex triangulis, quod vnico modo fieri potest, eritque hoc solidum pyramis trian-

triangularis geminata, seu erit ex duabus pyramidibus secundum bases aequales iunctis compositum.

COROLL. 5.

§. 64. Quartum genus pariter vnicam speciem continet tribus quadrilateris, et duobus triangulis inclusam, quae prisma triangulare vocatur. Sequentia genera plerumque plures species comprehendunt, sed iis enumerandis immorari non licet, propterea quod adhuc aliae proprietates solidorum huc spectantes nondum satis sunt evolutae.

SCHOLION.

§. 65. Haec sunt ergo quasi prima elementa Stereometriae; quae solidorum in genere spectatorum affectiones, ac proprietates continent, vnde deinceps singularum specierum proprietates sint deducendae. Propositiones scilicet hic traditae similes sunt earum, quae in Geometria plana de proprietatibus generalibus figurarum demonstrari solent, et quae ad has duas reducuntur, vt in omni figura rectilinea primum angulorum numerus aequalis sit numero laterum, tum vero vt summa omnium angulorum aequetur bis tot angulis rectis, quot sunt latera, demtis quatuor. In solidis autem numerus huiusmodi propositionum fundamentalium multo est maior, quod quidem ob maiorem rerum, quibus determinantur multitudinem, non est mirandum. Hoc autem merito maxime mirum videtur, quod cum non solum elementa Geometriae planae ad summum perspicuitatis fastigium sint promota, sed etiam Stereometria iam ab antiquissimis Geometris sit exculta,

tamen prima eius quasi fundamenta adhuc inter desiderata sunt referenda. Quamquam enim nunc equidem ista fundamenta in lucem protraxisse arbitror, tamen fateri cogor, ea, quae primaria sunt habenda, idoneis, ac vere Geometricis demonstrationibus adhuc destitui, quae ideo potissimum hic proponenda duxi, ut alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes inuestigandas; quibus inuentis nullum plane est dubium, quin Stereometria ad parem perfectionis gradum, atque Geometria euehatur.

DEMONSTRATIO

NONNVLLARVM INSIGNIVM PROPRIETATVM,
QVIBVS SOLIDA HEDRIS PLANIS INCLVSA
SVNT PRAEDITA.

Auth. L. Eulero.

Quemadmodum figurae planae rectilineae, quarum indoles in Geometria inuestigari solet, certas quasdam habent proprietates generales ac notissimas, veluti quod numerus angulorum aequalis sit numero laterum, et quod summa angulorum aequalis sit bis tot angulis rectis, quot sunt latera demtis quatuor, ita nuper eiusmodi Stereometriae elementa adumbraui, in quibus similes proprietates solidorum hedris planis inclusorum continentur. Cum enim in Stereometria ea corpora, quae circum quaque hedris planis terminantur, primum locum aequè merito occupent, ac figurae rectilineae in Planimetria, seu Geometria proprie sic dicta, ita similia Stereometriae principia stabilire in mentem venit, ex quibus

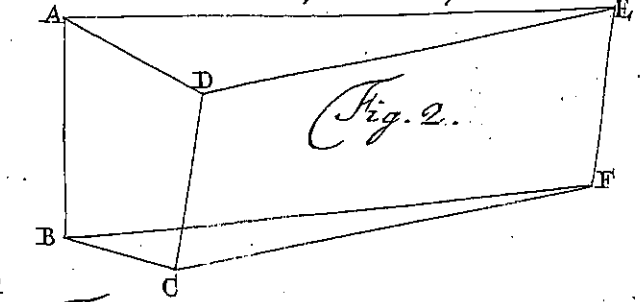
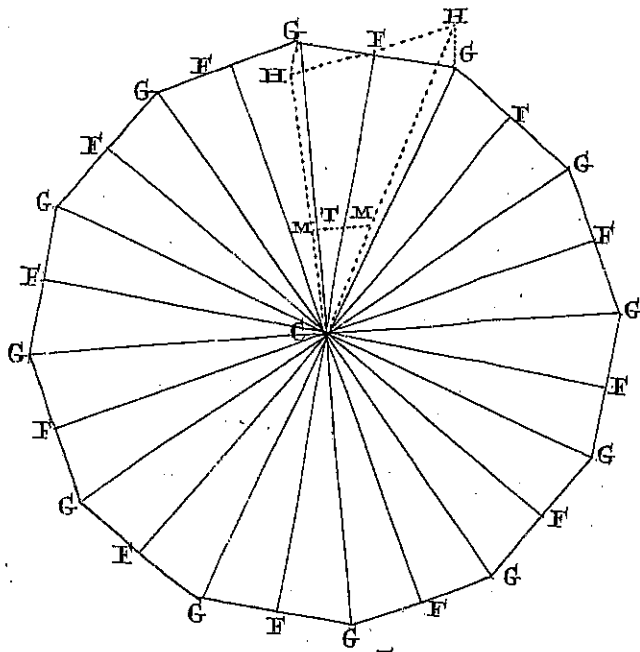


Fig. 1.

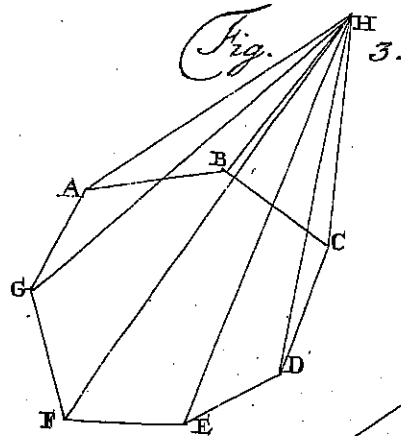
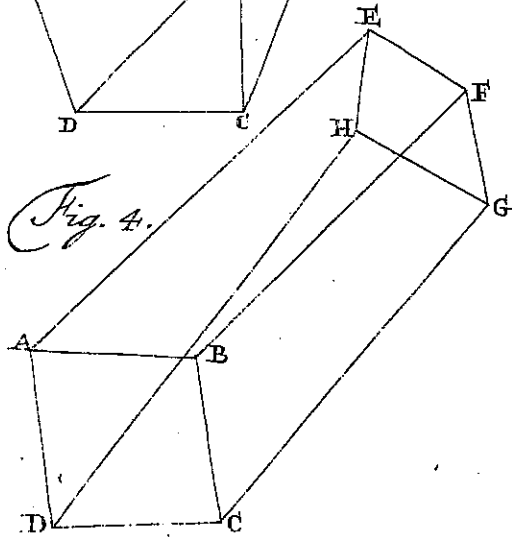
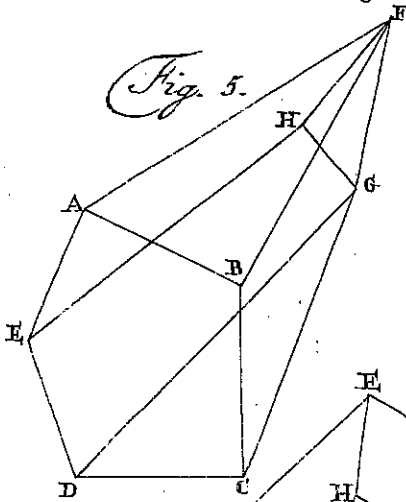


Fig. 6.

