

**Devoir 2 (inspiré de l'examen de l'an dernier), à rendre avant
l'examen de janvier 2024**

Exercice 1. Tracez à la main les courbes représentatives des fonctions suivantes :

- $x \mapsto x^2$
- $x \mapsto x^3$
- Exponentielle
- Logarithme
- $\sin$
- $\cos$

Il faudra bien identifier les points remarquables et les variations (croissante, décroissante). On ne demande PAS une étude de fonction. Vous pouvez recopier un livre ou une page web.

Exercice 2. Déterminez les limites aux bornes de l'ensemble de définition (incluant éventuellement l'infini) de

$$x \mapsto \frac{x^2 - 7x - 8}{\sqrt{x+1} - 3}.$$

On pourra penser à la quantité conjuguée.

Exercice 3. Donnez l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de chacune des fonctions suivantes (on ne demande pas de simplification des expressions des dérivées)

- (1) $x \mapsto \frac{\ln(\sin x)}{e^{2x} + 2}$
- (2) $x \mapsto \sin(\cos(x))$

Calculez la dérivée seconde de la 2ème fonction ci-dessus

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, tracez le graphe et déterminez, s'ils existent, le minimum global, le maximum global, et les minima et maxima locaux.

- (1) $f(x) = x^2 - 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[0, 1]$.
- (2) $f(x) = e^x - x + 2$ sur $[0, 2]$.
- (3) $f(x) = 3|x+1| - |x-3|$ sur $[-2, 4]$.

Exercice 5. Déterminez les points critiques de la fonction suivante :

$$x \mapsto -x^3 + 10x^2 + 7x + 1.$$

Pour chacun de ces points, déterminez s'il s'agit d'un minimum ou maximum local strict.

Exercice 6. Montrez que $e^x \geq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. On se donne $p \in \mathbb{N}$ et $a > 0$. On va prouver ici le résultat suivant énoncé en cours (et largement utilisé en TD et devoir) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0. \quad (\star)$$

- (1) Dressez le tableau de variations de la fonction $x \mapsto g(x) := x^p e^{-\frac{a}{2}x}$ pour $x \geq 0$. On ne demande PAS les limites.

(2) Montrez qu'il existe $C > 0$ tel que $x^p e^{-\frac{a}{2}x} \leq C$ pour tout $x \geq 0$.

(3) Dédisez-en la limite $(\star)$.

Exercice 8. Dressez le tableau de variation puis tracez le graphe de la fonction $x \mapsto x^3 - |3x - 1|$.

Exercice 9. Calculez les intégrales suivantes :

(1) $\int_0^1 (t-1)e^{2t} dt$

(2) $\int_1^4 t \ln t dt$

(3) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{4-x}$

(4) $\int_{-1}^3 \frac{x dx}{4-x}$

(5) $\int_3^4 \frac{x+7}{x^2-4x+4} dx$

(6) $\int_0^1 \frac{3x+8}{x^2+6x+8}$

Exercice 10. A l'aide d'une intégration par parties et des méthodes des fractions rationnelles, calculez

$$\int_1^t x \ln(x+3) dx, \text{ où } t \geq 1$$

Exercice 11. Calculez les intégrales suivantes :

(1)

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t+2} dt$$

(2)

$$\int_1^2 \frac{t}{t^2+3t+2} dt$$

Exercice 12. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y' - y = 0 \\ y(2) = 1 \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3y' - y = 0 \\ y(2) = 1 \end{array}} \right\}$$

Quelle est la limite de $y(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?

Exercice 13. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - (\sin x)y = 0 \\ y(0) = 2 \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} y' - (\sin x)y = 0 \\ y(0) = 2 \end{array}} \right\}$$

Exercice 14. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - 3y = (2x+3)e^{3x} \\ y(1) = 5e^3 \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} y' - 3y = (2x+3)e^{3x} \\ y(1) = 5e^3 \end{array}} \right\}$$

1. ENTRAÎNEMENT SUPPLÉMENTAIRE QUI NE FAIT PAS PARTIE DU DEVOIR

Exercice 15. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -4 \end{array} \right. \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} y'' - 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -4 \end{array}} \right\}$$

Quelle est la limite de $y(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?

Quelle est la limite si $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$?

Exercice 16. Résolution de

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + 4y' + 5y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Exercice 17. Calculez les intégrales suivantes

(1)

$$\int_1^2 \left(e^{x-1} + \frac{1}{x+1} + x^2 \right) dx$$

(2)

$$\int_{-1}^2 (|x| + |x-1|) dx$$

(3)

$$\int_0^\pi t^2 \cos(t) dt$$

(4)

$$\int_1^2 \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}} dx$$

Exercice 18. Déterminez les limites suivantes

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x^4 + 1}{x^3 + 4x^2 + 7}$

(3) Limites aux bornes de l'ensemble de définition de $x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$

Exercice 19. Ensemble de définition, tableau de variation, limites aux bornes de l'ensemble de définition et graphe des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$

(2) $x \mapsto x \ln x$

(3) $x \mapsto \frac{x}{e^x}$

(4) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

(5) $x \mapsto \frac{2x^2 + 3x + 3}{x - 1}$

Exercice 20. Déterminez la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x+1} + e^x - \sin x}{e^{-x} + x^2}$$

Exercice 21. Déterminez la limite si elle existe :

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} - x$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2x) + \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$$