

Partiel 2 du 8 janvier

Durée 3h. Documents et machines électroniques interdits.

- Aucun document autorisé.
- On n'hésitera pas à utiliser un résultat énoncé dans une question précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.
- Les exercices et problèmes peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Les (★) désignent les questions les plus difficiles.
- Vous trouverez un formulaire sur la transformée de Fourier en fin de sujet.
 Vous avez obligation d'utiliser la définition du cours.

Dans ce sujet, on rappelle que $H^1(]0, 1[)$ se plonge continuellement dans $C^0([0, 1])$. Il existe $C_S > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(]0, 1[)$, en notant toujours u le représentant continu de u , on a

$$|u(x)| \leq C_S \cdot \|u\|_{H^1} \text{ et } |u(x) - u(y)| \leq C_S \|u\|_{H^1} |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

pour tous $x, y \in [0, 1]$.

Exercice 1. Déterminez la transformée de Fourier de

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Existe-t'il une fonction dans L^1 dont la transformée de Fourier est f ?

Exercice 2. On se donne une fonction $g \in L^2(]0, 1[)$. On définit

$$v(x) := \int_0^x g(t) dt \text{ pour } x \in [0, 1].$$

1. Montrez que $v(x)$ est définie pour tout $x \in [0, 1]$.
2. Montrez que v est continue sur $[0, 1]$
3. Montrez que $v \in H^1(]0, 1[)$ et que $v' = g$.

1. PROBLÈME 1 : MINIMISATION

On se donne $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et une fonction $F \in C^1(H)$. On définit le gradient de F en $x \in H$ par l'unique élément $\varphi(x) \in H$ tel que $\langle \varphi(x), y \rangle = dF_x(y)$ pour tout $y \in H$. Le but de ce problème est de trouver un point fixe du gradient, à savoir un élément $x \in H$ tel que

$$x = \varphi(x).$$

On suppose que :

- Il existe $C > 0$ et $0 < \alpha < 2$ tels que $|F(x)| \leq C(1 + \|x\|^\alpha)$ pour tout $x \in H$;
- Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = F(x)$.

On définit alors

$$J(x) := \frac{\|x\|^2}{2} - F(x) \text{ pour } x \in H.$$

1. Montrez qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m = \inf\{J(x) / x \in H\}$.

On se donne une suite $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ qui est minimisante pour J .

2. Montrez que (x_n) est bornée dans H et déduisez-en une sous-suite $(x_{j(n)})$ qui converge faiblement vers une limite $x \in H$.
3. Montrez que $J(x_{j(n)}) = J(x) + \frac{\|\theta_n\|^2}{2} + o(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. Montrez que $J(x) = \inf J$.
5. (★) Montrez que $\langle x, y \rangle = dF_x(y)$ pour tout $y \in H$.
6. (★) Montrez qu'il existe $\varphi \in C^0(H, H)$ telle que $\langle \varphi(z), y \rangle = dF_z(y)$ pour tous $y, z \in H$.
7. Concluez.

2. PROBLÈME 2 : CONDITIONS AU BORD DE TYPE STEKLOV

On se donne $p \in C^1([0, 1])$, $q \in C^0([0, 1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $f \in C^0([0, 1])$, on cherche à prouver l'existence de $u \in C^2([0, 1])$ telle que

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{dans } [0, 1] \\ u'(0) = \lambda u(0) \text{ et } u'(1) = \lambda u(1) \end{cases} \quad (E)$$

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$p(x) \geq \delta \text{ et } q(x) \geq \delta \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Dans ce problème, si vous êtes bloqué(e), vous pouvez vous restreindre au cas $\lambda = 0$ (mais cela ne vous donnera pas le maximum des points).

1. Montrez que si $u \in C^2([0, 1])$ est solution de (E), alors

$$\int_0^1 (p(x)u'\varphi' + q(x)u\varphi) dx = \int_0^1 f\varphi dx + \lambda [p(1)u(1)\varphi(1) - p(0)u(0)\varphi(0)] \text{ pour tout } \varphi \in C^1([0, 1]).$$

Pour $f \in L^2([0, 1])$, on dit que $u \in H^1([0, 1])$ est une solution faible de (E) si

$$\int_0^1 (p(x)u'\varphi' + q(x)u\varphi) dx = \int_0^1 f\varphi dx + \lambda [p(1)u(1)\varphi(1) - p(0)u(0)\varphi(0)] \text{ pour tout } \varphi \in H^1([0, 1]).$$

2. Montrez que la définition d'une solution faible fait sens.
3. (Question longue mais classique) On suppose dans cette question uniquement que $\lambda = 0$. Montrez que pour tout $f \in L^2([0, 1])$, il existe une unique solution faible de (E).
4. (★) Dans le cas général, montrez qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que si $|\lambda| \leq \lambda_0$, alors pour tout $f \in L^2([0, 1])$, il existe une unique solution faible de (E). On n'hésitera pas à reprendre des arguments de la question précédente.
5. (★) On suppose que $f \in C^0([0, 1])$ et on se donne $u \in H^1([0, 1])$ une solution faible de (E). Montrez que $u \in C^2([0, 1])$ et est solution de $-(pu')' + qu = f$. On pourra tester la définition d'une solution faible sur des fonctions $\varphi \in C_c^1([0, 1])$.
6. On suppose que $f \in C^0([0, 1])$ et on se donne $u \in H^1([0, 1])$ une solution faible de (E). En utilisant la définition de la solution faible avec une fonction $\varphi \in C^1([0, 1])$ et en intégrant par parties, montrez que $u'(0) = \lambda u(0)$ et $u'(1) = \lambda u(1)$.
7. Concluez.

3. PROBLÈME 3 : UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE À PARAMÈTRE

On se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On cherche à donner une condition nécessaire pour l'existence et l'unicité d'une solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + \lambda u = f \quad \text{dans } \mathbb{R} \\ \lim_{\pm\infty} u(x) = \lim_{\pm\infty} u'(x) = 0. \end{array} \right\} \quad (E_\lambda)$$

3.1. **Le cas $\lambda > 0$.** On suppose dans les questions 1 à 4 que $\lambda > 0$.

1. (Question longue) Sous les hypothèses de l'exercice, montrez l'existence et l'unicité de la solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (l'ensemble d'arrivée est important) au problème (E_λ) .

2. Montrez que si $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_λ) , alors $\bar{u}$ aussi.

3. Dédisez en l'existence et l'unicité de la solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de (E_λ) .

4. Pour $\lambda > 0$, on note $u_\lambda \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'unique solution de (E_λ) . Montrez que pour tous $-\infty < a < b < +\infty$, l'application

$$\left\{ \begin{array}{lll} T : &]0, +\infty[& \rightarrow (C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ & \lambda & \mapsto u_\lambda \end{array} \right.$$

est continue.

5. (★) Effectuez la résolution formelle de $(E_{-\omega^2})$. Quelles hypothèses devez-vous faire pour que la solution formelle fasse sens? (*Indication : dénominateur*). On notera (H_ω) ces hypothèses.

6. (★) Sous l'hypothèse (H_ω) , montrez l'existence et l'unicité d'une solution $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de $(E_{-\omega^2})$.

7. On se donne $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une solution de $(E_{-\omega^2})$. On se donne $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction bornée de dérivée bornée. Montrez que pour tout $R > 0$,

$$\int_{-R}^R (-u' - \omega^2 u) \varphi \, dx = \int_{-R}^R (-\varphi' - \omega^2 \varphi) u \, dx + o(1)$$

où $\lim_{R \rightarrow +\infty} o(1) = 0$.

8. On se donne $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une solution de $(E_{-\omega^2})$. Montrez que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(\omega x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\omega x) \, dx = 0. \quad (H'_\omega)$$

9. (★) On se donne $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrez qu'il existe une solution de $(E_{-\omega^2})$ si et seulement si (H'_ω) a lieu.

4. FORMULAIRE

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Lorsque cela fait sens, on définit sa transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \, dx \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}.$$

Sous réserve des bonnes hypothèses, on a alors

- (1) $\widehat{e^{-x^2/2}} = e^{-\xi^2/2}$;
- (2) $\widehat{f(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$;

$$(3) \quad \widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

$$(4) \quad \left(\widehat{f}\right)' = -i\widehat{xf(x)}$$

Important/Attention : ce formulaire ne comporte pas ou peu d'hypothèse.
C'est volontaire, à vous de les écrire correctement si vous avez besoin des formules.

FIN