

1. Montrer que la vitesse moyenne d'agitation des particules d'un gaz parfait de masse volumique ρ vaut $\sqrt{\frac{3P}{\rho}}$. Sachant que l'air atmosphérique (de pression $P = 1013hPa$) a une masse volumique de $1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ au niveau du sol, faire l'application numérique pour les molécules d'air dans l'atmosphère.
2. A partir du modèle microscopique simplifié du gaz parfait, déterminer l'ordre de grandeur du nombre de molécules qui frappent un centimètre carré de paroi chaque seconde dans un récipient de diazote ($M = 28g\cdot\text{mol}^{-1}$) à la pression et à la température atmosphériques habituelles. On rappelle que la vitesse des molécules est de l'ordre de $500m\cdot s^{-1}$.

$$1. \text{ d'après le cours } \frac{1}{2} m_{\text{particules}} \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT, \text{ soit } \overline{v^2} = 3 \frac{kT}{m_{\text{particules}}} = 3 \frac{N_A kT}{N_A m_{\text{particules}}} = 3 \frac{RT}{M}. \text{ Or}$$

$$\text{d'après la loi des gaz parfaits } P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{VM} = \frac{\rho RT}{M} \text{ donc } \frac{RT}{M} = \frac{P}{\rho} \text{ et } \overline{v^2} = \frac{3P}{\rho}.$$

Application numérique : $v \approx 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit plus vite qu'un avion de ligne !

$$2. \quad F = \frac{\Delta p_{\text{tot}}}{\Delta t}, \text{ donc pour } \Delta t = 1 \text{ s}, \text{ et } \Delta p_{\text{tot}} = N \Delta p_x, \text{ on a : } F = N \Delta p_x = 2 N m v_x, \text{ où } N$$

représente le nombre de chocs par seconde. Ainsi $N = \frac{PS}{2m v_x} = \frac{PS N_A}{2M_{N_2} v_x} = 4,3 \times 10^{23} \text{ s}^{-1}.$

Etude d'un cycle thermodynamique .

Ce cycle est caractérisé par la succession des quatre transformations **d'une mole** de gaz diatomique supposé parfait, depuis l'état 1 (p_1, V_1, T_1) :

- Compression adiabatique quasi-statique de l'état 1 à l'état 2 (p_2, V_2, T_2)
- Combustion, représentée par un chauffage isobare de l'état 2 à l'état 3 (p_3, V_3, T_3).
- Détente adiabatique quasi-statique jusqu'à l'état 4 (p_4, V_4, T_4) avec $V_4=V_1$.
- Refroidissement isochore pour revenir à l'état initial.

On note $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, $a = \frac{V_1}{V_2}$ et $b = \frac{V_1}{V_3}$

- 1) Compléter le diagramme représenté sur le document-réponse N°1 (à rendre avec la copie) en indiquant les états i ($i=1,2,3$ et 4) et en faisant apparaître les pressions p_i et volumes V_i
- 2) Déterminer les expressions littérales de p_2 , p_3 et p_4 en fonction de γ , a , b et p_1
- 3) Déterminer les expressions littérales de V_2 , V_3 et V_4 en fonction de a , b et V_1
- 4) On donne $a=9$; $b=3$, $R=8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $\gamma=1,4$; $p_1=1\text{bar}$; $T_1=300\text{K}$. Compléter le tableau suivant (à recopier sur la copie):

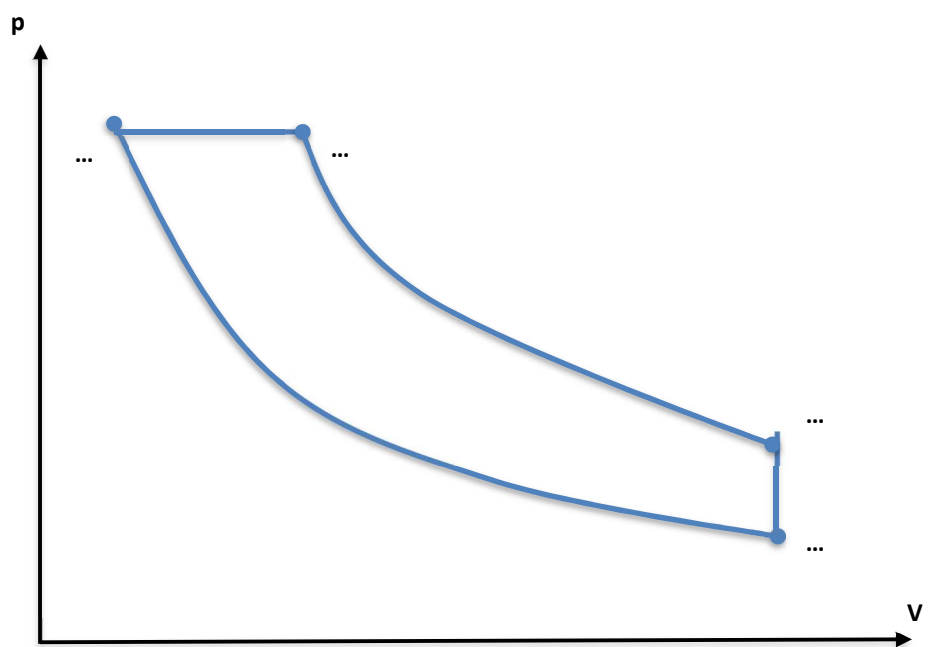
Etats	p (Pa)	V (m^3)	T (K)
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			

- 5) Montrer que $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$

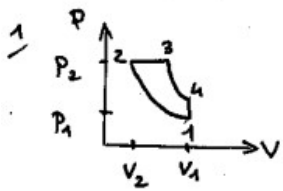
- 6) Pour chaque transformation, Exprimer et calculer la variation d'énergie interne ΔU ainsi que les échanges énergétiques Q et W . Compléter le tableau suivant (à recopier sur la copie):

Transformations	ΔU (kJ)	W (kJ)	Q (kJ)
(1) $\rightarrow$ (2)			
(2) $\rightarrow$ (3)			
(3) $\rightarrow$ (4)			
(4) $\rightarrow$ (1)			

- 7) En déduire ΔU_{cycle} , W_{cycle} et Q_{cycle} .



Exercice 1



2 Transfo 1→2 : adiab. quasistat. GP → $PV^\gamma = \text{cte}$ → $P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = P_1 a^\gamma$

Transfo 2→3 isobare → $P_3 = P_2$

Transfo 3→4 id 1→2 → $P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma = P_3 \frac{1}{a^\gamma} = P_1 \times \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma$

3 $V_2 = \frac{V_1}{a}$; $V_3 = \frac{V_1}{b}$; $V_4 = V_1$

Etat	P (Pa)	V (m³)	T (K)
1	10^5	$2,49 \cdot 10^{-2}$	300 K
2	$21,67 \cdot 10^5$	$2,77 \cdot 10^{-3}$	722
3	$21,67 \cdot 10^5$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	2164
4	$4,65 \cdot 10^5$	$2,49 \cdot 10^{-2}$	1393

5 $C_p - C_v = nR$ pour un GP (Mayer)
 $\frac{C_p}{C_v} = \gamma \rightarrow (\gamma - 1)C_v = nR \rightarrow C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$

Transformations	ΔU (kJ)	W (kJ)	Q (kJ)
1→2	8,77	8,77	0
2→3	29,96	-11,98	41,94
3→4	-16,02	-16,02	0
4→1	-22,7	0	-22,7

7 $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$ (Normal! U est une fonction d'état)

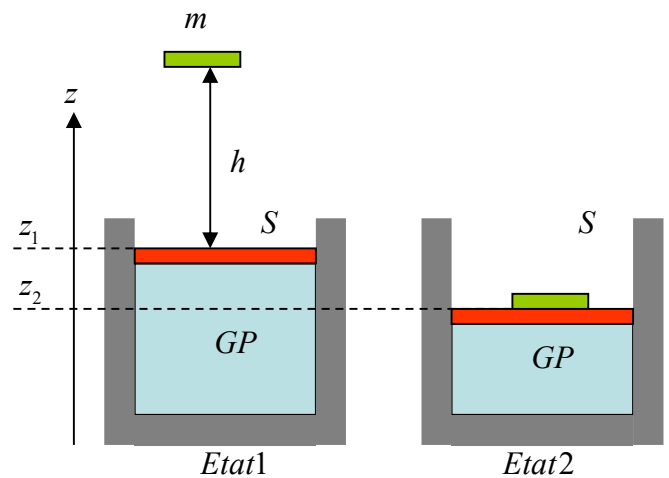
$W = -19,2 \text{ kJ}$ (CD: moteur)
 $Q = +19,2 \text{ kJ}$

Méthode: GP → $\Delta U = n C_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1} \Delta T$;

2→3: $P_{\text{ex}} = \text{const} \rightarrow W = -P_{\text{ex}} \Delta V$; $Q = \Delta U - W$

Piston

On laisse tomber une masse de $m = 1\text{kg}$ d'une hauteur $h = 5\text{m}$ sur un piston de masse négligeable, qui coulisse sans frottement dans un cylindre de section $S = 10\text{cm}^2$. Aucune paroi ne laisse passer la chaleur. Le gaz contenu dans le cylindre est un gaz parfait monoatomique (de capacité calorifique $c_V = \frac{3}{2}R$) avec dans l'état initial (1) : $P_1 = 1\text{bar}$; $T_1 = 20^\circ\text{C}$; $V_1 = 1\text{L}$. On donne $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$; $R = 8,31(\text{SI})$. L'extérieur est l'air atmosphérique de pression constante $P_{\text{ex}} = 10^5\text{Pa}$ et de température T_1 .



1. Déterminer la quantité de matière n de gaz
2. Déterminer la pression P_2 à l'équilibre mécanique (état 2)
3. Ecrire le premier principe pour le système global : gaz + piston + masse, entre l'état 1 et l'état 2. En déduire que $\frac{5}{2}nRT_2 = mgh + P_2V_1 + \frac{3}{2}P_1V_1$
4. En déduire les valeurs numériques de T_2 et V_2 . Le résultat pour V_2 semble a priori surprenant... Pouvez-vous l'expliquer qualitativement ?

Piston

$$1 \quad \text{Gaz parfait} \rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \times 10^{-3}}{8,31 \times (273+20)} = 4,1 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$2 \quad P_2 S = P_1 S + mg \rightarrow P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} = 10^5 + \frac{1 \times 9,81}{10 \times 10^{-4}} = 1,098 \text{ bar}$$

$$3 \quad W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{\text{ext}}) + Q = \Delta U \rightarrow mg(h + z_1 - z_2) - P_{\text{ext}}(V_2 - V_1) = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1)$$

$\hookrightarrow$ (isolant) $\hookrightarrow V_1 - V_2$

$$\rightarrow mgh - \underbrace{\left(P_{\text{ext}} + \frac{mg}{S}\right)}_{P_2} (V_2 - V_1) = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1)$$

$$mgh + P_2 V_1 + \frac{3}{2} nRT_1 = \frac{3}{2} nRT_2 + P_2 V_2 = \frac{5}{2} nRT_2$$

$\underbrace{P_2 V_1}_{P_1 V_1}$ $\underbrace{P_2 V_2}_{nRT_2}$

$$4 \quad T_2 = \frac{1 \times 9,81 \times 5 + (1,098 + \frac{3}{2} \times 1) \times 10^5 \times 10^{-3}}{\frac{5}{2} \times 4,1 \times 10^{-2} \times 8,31} = 362,6 \text{ K}$$

$$V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{4,1 \times 10^{-2} \times 8,31 \times 362,6}{1,098 \times 10^5} = 1,125 \times 10^{-3} > V_1$$

Le volume augmente car le gaz a absorbé l'énergie du choc donc sa température a augmenté ($T_2 \approx 90^\circ\text{C}$ contre $T_1 = 20^\circ\text{C}$) $\rightarrow$ dilatation du gaz malgré $P_2 > P_1$

2 - Question ouverte

Estimer l'élévation de température des freins à disque d'une voiture roulant à 90km.h^{-1} qui s'arrête brusquement.

Données :

Selon l'Argus, la voiture « moyenne » française présente les caractéristiques suivantes :

- Masse : 1,3 tonne
- Puissance : 80kW
- Cylindrée : 1,5L
- Consommation : 5L/100km

Les freins à disque sont des disques d'acier de rayon 10 cm et d'épaisseur 1cm.

Capacité thermique massique de l'acier : $c = 0,47\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Masse volumique de l'acier : $\rho = 7,8 \cdot 10^3\text{kg.m}^{-3}$

La clarté de la rédaction comptera dans la notation de cet exercice. Expliquer qualitativement le principe du calcul, établir une expression littérale, puis faire l'application numérique.

Question ouverte

1^{er} principe: $\Delta U + \Delta E_c = \underbrace{Q+W}_{\rightarrow 0}$ appliqué à la voiture au cours du freinage
Soit $\Delta U = -\Delta E_c$

(C'est la conservation de l'énergie totale: l'énergie mécanique est transformée en "chaleur" (énergie interne))

$$\text{Soit } m_{\text{freins}} c \Delta T = - \left(\frac{1}{2} m_v v_f^2 - \frac{1}{2} m_v v_0^2 \right) = \frac{1}{2} m_v v_0^2 \quad \text{ou} \quad \Delta T = \frac{m_v v_0^2}{2 m_{\text{freins}} c}$$

R.N. $m_{\text{freins}} = \rho \pi r^2 l = 7,8 \times 10^3 \times \pi \times 0,10^2 \times 10^{-2} = 2,45 \text{ kg}$; $v_0 = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$

$$\Delta T = \frac{1,3 \times 10^3 \times 25^2}{2 \times 4 \times 2,45 \times 0,47 \times 10^3} \simeq 30^\circ \text{C}$$

↑
4 freins!

Compresseur

Un compresseur aspire de l'air (gaz parfait) à la pression $P_1 = 1\text{bar}$ et à la température $T_1 = 15^\circ\text{C}$, avec un débit $\dot{m} = 0,12\text{kg.s}^{-1}$. La pression est multipliée par 4 à la sortie du compresseur. On néglige toute variation d'énergie cinétique ou potentielle. On donne la capacité thermique massique de l'air : $c_p = 1,0\text{kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ et le rapport $\gamma = c_p / c_v = 1,4$. On considère la compression comme adiabatique et quasistatique.

1. Calculer la température T_2 de sortie de l'air
2. En déduire la puissance P_u du compresseur.

Loi de Laplace: $PV^\gamma = \text{const}$

$$\text{GP: } PV = \text{const} \times T \rightarrow P^\gamma V^\gamma = \text{const} \times T^\gamma \rightarrow P^{\gamma-1} = \text{const} \times T^\gamma \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 4^{\frac{0,4}{1,4}} = 1,486$$

$$\rightarrow T_2 = 1,486 \times (15 + 273) = 428\text{K} = \underline{155^\circ\text{C}}$$

$$\text{1er principe en système ouvert: } \dot{P}_u + 0 = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) = 0,12 \times 1,0 \times 10^3 \times (428 - 288) = \underline{16,8 \text{ kW}}$$