

Cours

Transformation adiabatique quasi-statique d'un gaz parfait $\rightarrow PV^\gamma = \text{const.}$ avec $\gamma \triangleq \frac{C_p}{C_v}$
 GP $\rightarrow PV = \text{const} \times T \rightarrow P^\gamma V^\gamma = \text{const} \times T^\gamma$. $\frac{(2)}{(1)} \rightarrow P^{\gamma-1} = \text{const} \times T^\gamma$ ou $T = \text{const} \times P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Compression

- 1 Equilibre du piston $\rightarrow P_0 S = P S \rightarrow P = P_0$. Gaz parfait: $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR} = \frac{10^5 \times 2,5 \times 10^{-3}}{0,1 \times 8,314} = 301 \text{ K}$
- 2a "Aucun transfert thermique" $\rightarrow$ transformation adiabatique. "très lentement" $\rightarrow$ quasi-statique
- 2b Adiabatique + quasi-statique + GP $\rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. A.N. $T_1 = 300 \times 2^{\frac{1,4}{1,4}} = 366 \text{ K}$
- 2c Adiabatique $\rightarrow W = \Delta U = n C_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$. A.N. $W = \frac{0,1 \times 8,314}{1,4-1} (366 - 301) = 135 \text{ J}$
 (! il n'y a pas que le gaz ext. qui travaille!) $\xrightarrow{\text{GP}}$
- 3a Transformation adiabatique et monobare ($P_{\text{ext}} = \text{const.}$)
- 3b Equilibre mécanique du piston $\rightarrow P_2 = P_{\text{ext}} = P_0$
- 3c $\Delta U = W + Q = -P_0 (V_2 - V_1) = P_0 (V_1 - V_2) = P_0 \left(\frac{nRT_1}{P_1} - \frac{nRT_2}{P_2} \right) = nR \left(\frac{T_1}{2} - T_2 \right)$
 D'autre part $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$. On a donc $\frac{1}{\gamma-1} (T_2 - T_1) = \frac{T_1}{2} - T_2$
 On isole $T_2 \rightarrow T_2 = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T_1}{2}$. A.N. $T_2 = 314 \text{ K}$.

Transfert

- 1 Bouteilles rigides: $W=0$; Bouteilles isolées: $Q=0$ donc $\Delta U = W + Q = 0$
 n'_A molécules sont passées de T_0 à T'_A ; n'_B molécules passent de T_0 à T'_B
 GP $\rightarrow \Delta U = n'_A C_v (T'_A - T_0) + n'_B C_v (T'_B - T_0) = 0$ donc $n'_A T'_A + n'_B T'_B = (n'_A + n'_B) T_0$ (conservation de la matière)
 GP $\rightarrow \frac{P_A V_A}{R} + \frac{P_B V_B}{R} = \frac{P_A V_A}{R} + \frac{P_B V_B}{R} \rightarrow P_F = \frac{P_A V_A + P_B V_B}{V_A + V_B}$. A.N. $P_F = 13,25 \text{ bar}$
- 2 Tube très fin $\rightarrow$ transfert de gaz lent $\rightarrow$ quasi-statique; Bouteilles isolées $\rightarrow$ adiabatique
 d question de cours: $T'_A = T_0 \left(\frac{P_F}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
 Gaz parfait: $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - R} \xrightarrow{\text{Mayer}} \frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 - \frac{C_p - R}{C_p} = \frac{R}{C_p}$
 $\left. \begin{aligned} &T'_A = T_0 \left(\frac{P_F}{P_A}\right)^{\frac{R}{C_p}} = 293,15 \times \left(\frac{13,25}{20}\right)^{\frac{8,314}{29,2}} \\ &\rightarrow T'_A = 280,7 \text{ K} \end{aligned} \right\}$
- 3 $n'_B = n_A + n_B - n'_A \xrightarrow{\text{conservation matière}} \frac{P_F V_B}{RT'_B} = \frac{P_A V_A}{RT'_A} + \frac{P_B V_B}{RT'_B} - \frac{P_A V_A}{RT'_A} \rightarrow T'_B = \frac{P_F V_B}{\frac{P_A V_A + P_B V_B}{T_0} - \frac{P_A V_A}{T'_A}} = 369,8 \text{ K}$

Compresseur

$$1 \quad \dot{P}_{u1} + \dot{\Phi} = \dot{m} (h_s - h_e) = \dot{n} (h_s - h_e) = \dot{n} c_p (T_1 - T_0) \quad \begin{array}{l} \text{of adiabatique} \\ \text{massiques} \end{array}$$

$$\rightarrow \dot{P}_1 = \frac{900}{3600} \times 29,1 \times 100 = 727,5 \text{ W}$$

$$2. \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - R} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{c_p - R}{c_p} = \frac{R}{c_p}$$

• Deuxième étage: $\dot{P}_{u2} = \dot{n} c_p (T_2 - T_0)$; Total: $\dot{P}_{tot} = \dot{P}_{u1} + \dot{P}_{u2} = \dot{n} c_p [T_1 + T_2 - 2T_0]$

Compresseur n°1 = adiabatique $\rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} = T_0 y^{\frac{R}{c_p}}$

cf question de cours

De même pour le compresseur 2 $\rightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_2}{P_0} \frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{R}{c_p}} = T_0 \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{R}{c_p}}$

Donc $\dot{P}_{tot} = \dot{n} c_p [T_0 y^{\frac{R}{c_p}} + T_0 \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{R}{c_p}} - 2T_0]$ (eqfd).

3 $\dot{P}_{tot} \text{ minimal} \Rightarrow \frac{d\dot{P}_{tot}}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy} \left[y^a + \left(\frac{x}{y} \right)^a \right] = 0 \Rightarrow a y^{a-1} + x^a \cdot (-a) y^{-a-1} = 0$

en notant $a = \frac{R}{c_p}$

$\Rightarrow a y^{2a} - x^a = 0 \Rightarrow y^2 = x$ (eqfd). On a donc $y = \sqrt{x}$

$\rightarrow \dot{P}_{tot} = \frac{900}{3600} \times 29,1 \times 300 \times [2(\sqrt{x})^{\frac{8,314}{29,1}} - 2] = 1700 \text{ W}$

4 Aucune pièce mobile, aucun transfert thermique avec l'extérieur:

$$\dot{W}_m + \dot{\Phi} = 0 = \dot{m}_{\text{eau}} (h_{\text{eau},s} - h_{\text{eau},e}) + \dot{m}_{\text{air}} (h_{\text{air},s} - h_{\text{air},e})$$

Soit $0 = \dot{m}_{\text{eau}} c_{p,\text{eau}} (T_{s,\text{eau}} - T_{e,\text{eau}}) + \dot{m}_{\text{air}} c_{p,\text{air}} (T_{s,\text{air}} - T_{e,\text{air}})$

$\rightarrow \dot{m}_{\text{eau}} = \frac{\dot{m}_{\text{air}} c_{p,\text{air}} (T_{e,\text{air}} - T_{s,\text{air}})}{c_{p,\text{eau}} (T_{s,\text{eau}} - T_{e,\text{eau}})} = \frac{\frac{900}{3600} \times 29,1 \times (T_0 (\sqrt{x})^{\frac{R}{c_p}} - T_0)}{4181 \times (50 - 10)} = 5 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$