

# Outils Logiques - Examen 1h30

Documents interdits

## 1 Dédution naturelle classique NK (5 points)

Donnez une dérivation des jugements ci-dessous dans NK :

- $\vdash_{\text{NK}} P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
- $\vdash_{\text{NK}} P \vee \neg P$

Qu'en déduisez vous sur la validité de chacun de ces formules (Justifiez) ?

## 2 Calcul des séquents classique LK (5 points)

Les jugements ci-dessous peuvent-ils être dérivés dans LK :

- $P \wedge (Q \vee R) \vdash_{\text{LK}} (P \wedge Q), R$
- $\vdash_{\text{LK}} P \Rightarrow (P \wedge Q)$

Dans l'affirmative, fournir une dérivation de preuve et exprimer ce que l'on peut en déduire en terme de conséquence logique. Dans la négative, donner un contre-modèle à partir de votre tentative de dérivation de preuve (Justifiez).

## 3 Dédution naturelle intuitionniste NJ (5 points)

Les jugements ci-dessous peuvent-ils être dérivés dans NJ (les dérivations ne sont pas demandées) ? Dans le cas où la réponse est négative, donner un argument simple.

- $\vdash_{\text{NJ}} (\neg\neg F) \Rightarrow F$
- $\vdash_{\text{NJ}} F \Rightarrow (\neg\neg F)$
- $\vdash_{\text{NJ}} F \vee \neg F$

Démontrer le jugement ci-dessous dans NJ :

$$\vdash_{\text{NJ}} ((\neg F) \vee G) \Rightarrow (F \Rightarrow G) \quad (\text{Astuce : il y a de l'absurdité dans l'air})$$

Peut-on en déduire qu'il est valide dans NK, dans LK, est-ce une tautologie ? (Justifiez)

## 4 Isomorphisme de Curry Howard (5 points)

On considère le lambda-terme suivant

$$M = \lambda b.(\lambda u.(\lambda v.((b \ u) \ v))).$$

Évaluez les termes  $((M \ true) \ M_1) \ M_2$  et  $((M \ false) \ M_1) \ M_2$ , où  $M_1$  et  $M_2$  sont des termes quelconques et où  $true$  et  $false$  sont définis par  $true = (\lambda x.(\lambda y.x))$  et  $false = (\lambda x.(\lambda y.y))$ .

En déduire ce que représente le terme  $M$  sur les Booléens (l'encodage standard des Booléens) ?

Prouvez que  $M$  peut être typé par  $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow A))$ , où  $A$  est un type quelconque. Donnez la preuve en déduction naturelle correspondante.

