

Corrigé du TD3bis : variations, exponentielles et logarithmes

1. TRACÉS DE GRAPHES

Exercice 1. Déterminez les graphes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 - x + 2 ; f_2(x) = x^2 + 3x + 6 ; f_3(x) = x^3 - 3x$$

2. VALEUR ABSOLUE

Exercice 2. Montrez les formules suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x_+ - x_- = x ; x_+ + x_- = |x| ; x_+ = \frac{x + |x|}{2}.$$

Solution : On rappelle que $|x| = \max\{x, -x\}$, $x_+ = \max\{x, 0\}$ et $x_- = \max\{0, -x\}$.

- (1) Pour montrer que $x_+ - x_- = x$ pour $x \in \mathbb{R}$, il faut distinguer les cas positifs et négatifs :
- (a) Si $x \geq 0$, alors $x_+ = x$ et $x_- = 0$, donc $x_+ - x_- = x - 0 = x$: la formule est ok.
 - (b) Si $x \leq 0$, alors $x_+ = 0$ et $x_- = -x$, donc $x_+ - x_- = 0 - (-x) = x$: la formule est ok.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que $x_+ - x_- = x$.

- (2) Pour montrer que $x_+ + x_- = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$, il faut distinguer les cas positifs et négatifs :
- (a) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, $x_+ = x$ et $x_- = 0$, donc $x_+ + x_- = x = |x|$: la formule est ok.
 - (b) Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$, $x_+ = 0$ et $x_- = -x$, donc $x_+ + x_- = 0 + (-x) = -x = |x|$: la formule est ok.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que $x_+ + x_- = |x|$.

- (3) Pour montrer que $x_+ = \frac{x+|x|}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$, il faut distinguer les cas positifs et négatifs :
- (a) Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et $x_+ = x$, donc $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x+x}{2} = x = x_+$: la formule est ok.
 - (b) Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$, $x_+ = 0$, donc $\frac{x+|x|}{2} = \frac{x-x}{2} = 0 = x_+$: la formule est ok.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que $\frac{x+|x|}{2} = x_+$.

Exercice 3. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, que vaut

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} ?$$

Solution : La valeur de $|x - y|$ dépend du signe de $x - y$. On va donc distinguer deux cas :

- Premier cas : $x \geq y$. Dans ce cas $x - y \geq 0$ et $|x - y| = x - y$. Ainsi,

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = x$$

- Second cas : $x \leq y$. Dans ce cas $x - y \leq 0$ et $|x - y| = -(x - y) = y - x$.
Ainsi,

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = y.$$

Finalement, on récupère à chaque fois le plus grand des deux éléments, et donc

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \max\{x, y\}.$$

Exercice 4. Soit $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Déterminez une formule simple pour $f(x)$ suivant que x est dans tel ou tel intervalle.
— Dressez alors le tableau de variation de f et tracez son graphe.

Solution : La valeur de $|x + 2|$ dépend du signe de $x + 2$, donc de la position de x par rapport à -2 . Pour $|x - 1|$, la valeur dépend si $x \geq 1$ ou $x \leq 1$. On va donc faire un tableau de signe pour nous aider :

	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+	+
$ x + 2 $	$-(x+2)$	0	$x+2$	$x+2$
$x - 1$	-	-	0	+
$ x - 1 $	$-(x-1)$	$-(x-1)$	0	$x+1$
$ x + 2 + x - 1 $	$-2x - 1$	3	2x + 1	

On a donc 3 graphes de fonctions affines aisés à tracer :



Exercice 5. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 + |x|$.

Solution : La valeur de $|x|$ dépend du signe de x . On va donc faire un tableau de signe pour nous aider :

	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$ x $	$-x$	0	x
$x^2 + x $	$x^2 - x$	0	$x^2 + x$

On va donc faire les études séparées de $x \mapsto x^2 - x$ et de $x \mapsto x^2 + x$ puis les regrouper sur le même graphe.

Etude de $f : x \mapsto x^2 - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 1$, on a donc la tableau de variations :

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$ $\frac{-1}{4}$ $\nearrow$	$+\infty$

En **bleu** sur le dessin

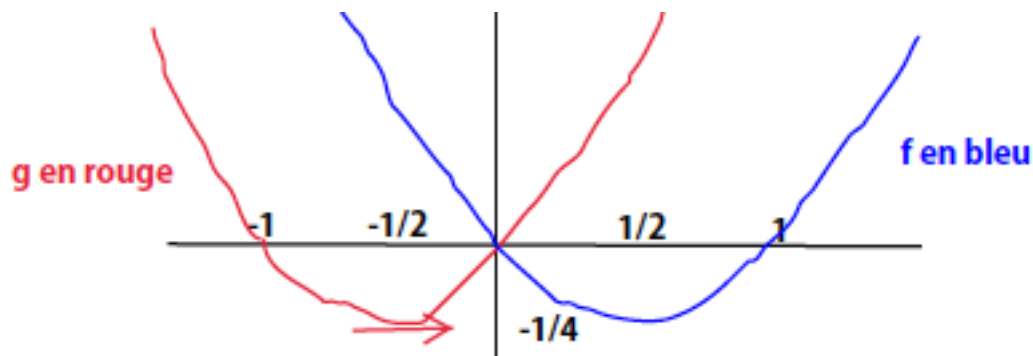
On note au passage que $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$.

Etude de $g : x \mapsto x^2 + x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x + 1$, on a donc la tableau de variations :

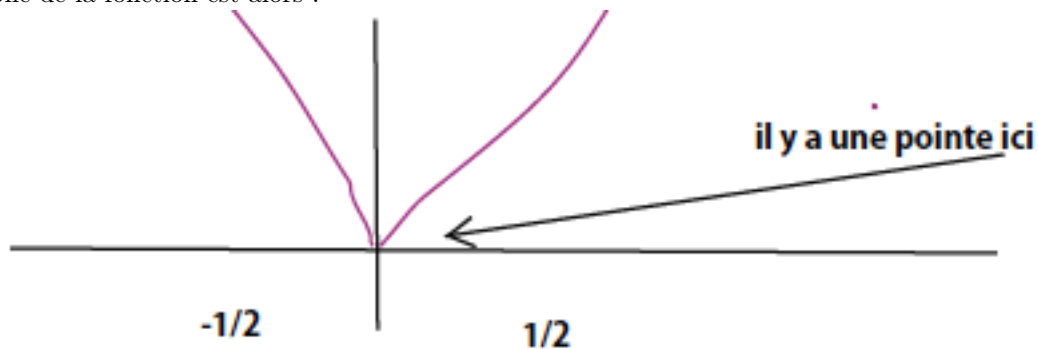
	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$+\infty$	$\searrow$ $\frac{-1}{4}$ $\nearrow$	$+\infty$

En **rouge** sur le dessin

On note au passage que $g(0) = 0$ et $g'(0) = +1$. On met tout le monde sur le même graphe :



Sachant que pour $x \leq 0$, on prend f (en bleu) et pour $x \geq 0$, on prend g (en rouge), le graphe de la fonction est alors :



Exercice 6. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 + |x - 1|$.

Solution : La valeur de $|x - 1|$ dépend du signe de $x - 1$. On va donc faire un tableau de signe pour nous aider :

	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+
$ x - 1 $	$-x + 1$	0	$x - 1$
$x^2 + x - 1 $	$x^2 - x + 1$	0	$x^2 + x - 1$

On va donc faire les études séparées de $x \mapsto x^2 - x + 1$ et de $x \mapsto x^2 + x - 1$ puis les regrouper sur le même graphe.

Etude de $f : x \mapsto x^2 - x + 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 1$, on a donc la tableau de variations :

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
			$\frac{3}{4}$	

En **bleu** sur le dessin

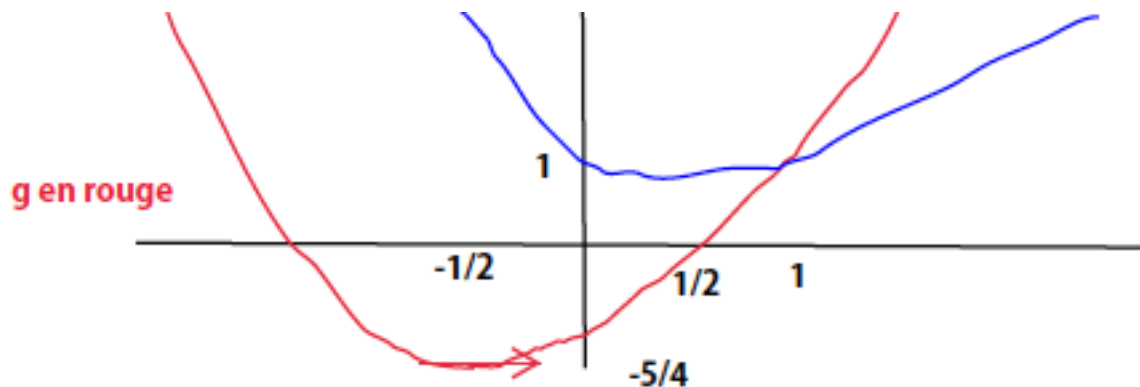
On note au passage que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.

Etude de $g : x \mapsto x^2 + x - 1$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2x + 1$, on a donc la tableau de variations :

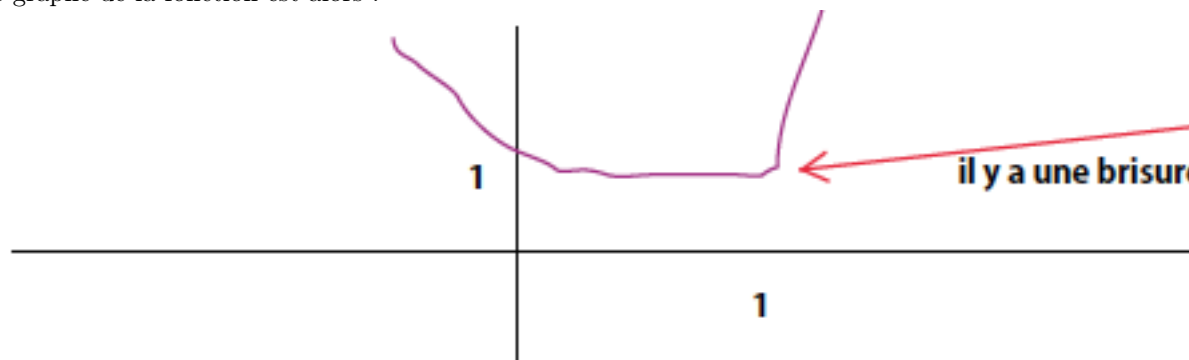
	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$
		$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$

En **rouge** sur le dessin

On note au passage que $g(1) = 1$ et $g'(1) = +3$. On met tout le monde sur le même graphe :



Sachant que pour $x \leq 1$, on prend f (en bleu) et pour $x \geq 1$, on prend g (en rouge), le graphe de la fonction est alors :



3. EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Exercice 7. Ensemble de définition de

(1) $t \mapsto \ln(1+t^2)$.

Solution : Il faut $1+t^2 > 0$, ce qui est toujours vrai. Donc $D_1 = \mathbb{R}$.

(2) $x \mapsto \ln(4x+7)$.

Solution : Il faut $4x+7 > 0$, donc $x > -\frac{7}{4}$. Donc $D_2 =]-\frac{7}{4}, +\infty[$.

(3) $x \mapsto \ln(-x^2+3x-7)$.

Solution : Il faut $-x^2+3x-7 > 0$. Résolvons $-x^2+3x-7 = 0$: $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = -19 < 0$, donc pas de zéro et $-x^2+3x-7$ a le signe de -1 , donc $-x^2+3x-7 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_3 = \emptyset$.

(4) $x \mapsto 2^x$.

Solution : On écrit $2^x = e^{x \ln 2}$, ce qui fait sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $D_4 = \mathbb{R}$.

(5) $z \mapsto (-2)^y$.

Solution : on a x d'un côté, y de l'autre. La question n'a même pas de sens.

(6) $x \mapsto \frac{\ln(-x^2+3x)}{\sqrt{x-1}-2}$

Solution : Il faut :

- $-x^2+3x > 0$ à cause du $\ln$,
- $x-1 \geq 0$ avec la racine,
- $\sqrt{x-1}-2 \neq 0$ avec le dénominateur.

Pour $x-1 \geq 0$, il faut donc $x \geq 1$. On résoud maintenant $\sqrt{x-1}-2 = 0$:

$$\sqrt{x-1}-2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2^2 = 4 \Leftrightarrow x = 5.$$

On doit donc exclure 5. Pour finir, il faut $-x^2+3x > 0$. On factorise $-x^2+3x = -x(x-3)$ (ou bien on repart sur le discriminant) et encore un tableau de signes :

	$-\infty$	0	3	$+\infty$
-1	-		-	
x	-	0	+	
$x-3$	-		-	0
$-x(x-3)$	-	0	+	0

Et donc $D_6 = [1, +\infty[\cap(\mathbb{R} \setminus \{5\}) \cap]0, 3[= [1, 3[$.

Exercice 8. Tableau de variation et graphes des fonctions suivantes :

- $x \mapsto e^{-x}$
- $x \mapsto 2e^{x-1}$
- $x \mapsto e^{x^2+2x+7}$
- Les trois premières fonctions de l'exercice précédent.

4. FONCTION DE HEAVISIDE

Exercice 9. Montrez que H est croissante. Est-elle strictement croissante ?

Solution : Rappelons que

$$\begin{cases} H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

La fonction H n'étant pas dérivable, on va revenir à la définition. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Pour connaître la valeur de H en ces points, il faut déterminer leur position par rapport à 0 :

- Premier cas : $x \leq y < 0$. Alors $H(x) = H(y) = 0$, donc $H(x) \leq H(y)$.

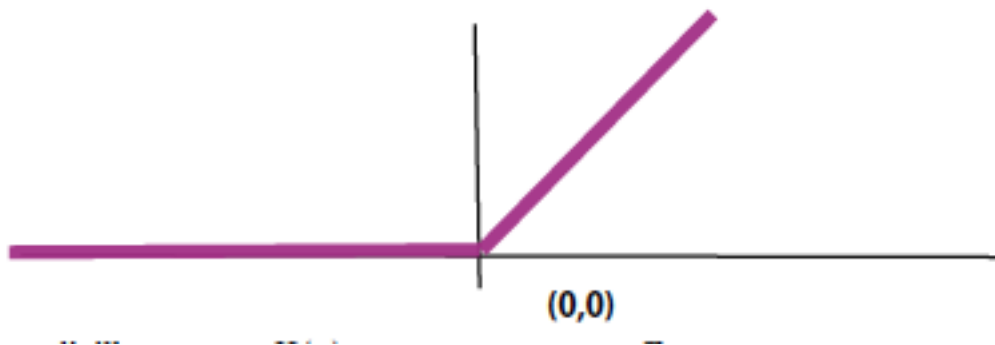
— Second cas : $x < 0 \leq y$. Alors $H(x) = 0$ et $H(y) = 1$, donc $H(x) \leq H(y)$.

— Troisième cas : $0 \leq x \leq y$. Alors $H(x) = H(y) = 1$, donc $H(x) \leq H(y)$.

Dans tous les cas, lorsque $x \leq y$, on a $H(x) \leq H(y)$, donc H est croissante. Comme $H(1) = H(2)$, elle n'est pas strictement croissante.

Exercice 10. Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = xH(x)$.

Solution : Pour $x < 0$, on a $H(x) = x \times 0 = 0$. Pour $x \geq 0$, on a $H(x) = x \times 1 = x$.
On a alors le graphe suivant :



Remarquons d'ailleurs que $xH(x) = x_+$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. PUISSANCES

Exercice 11. Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$x \mapsto 2^x$. *Solution :* toujours défini si $x \in \mathbb{Z}$. Sinon on écrit $2^x = e^{x \ln 2}$ qui impose $x > 0$. Donc défini pour $x > 0$ ou $x \in \mathbb{Z}$.

$z \mapsto (-2)^y$. *Solution :* la variable est y ou z ? Pas de sens.

$y \mapsto (-2)^y$. *Solution :* toujours défini si $y \in \mathbb{Z}$. Sinon on écrit $(-2)^y = e^{y \ln(-2)}$: n'a pas de sens. Donc défini pour $y \in \mathbb{Z}$.