

Contrôle du 7 octobre
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Un formulaire se trouve à la fin du sujet.

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Déterminez les zéros (ou "racines") dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ du trinôme :

(1) $x^2 + 6x + 13 = 0$

Solution : $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$, donc deux zéros complexes

$$x_1 := \frac{-6 - i\sqrt{16}}{2} = -3 - 2i \text{ et } x_2 := \frac{-6 + i\sqrt{16}}{2} = -3 + 2i$$

Pensez à vérifier que vos résultats sont bien solutions.

Exercice 2. Mettez les expressions suivantes sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(3 - i)^2(5 + 2i) + 32i$$

$$\frac{2}{i} + \frac{2 - 3i}{1 + i}$$

Solution :

$$(3 - i)^2(5 + 2i) + 32i = (10 - 6i)(5 + 2i) + 32i = 62 + 22i$$

$$\frac{2}{i} + \frac{2 - 3i}{1 + i} = -2i + \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = -2i + \frac{-1 - 5i}{2} = \frac{-1 - 9i}{2}.$$

Exercice 3. Quel est le module de $3 + 4i$?

Solution : $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Exercice 4. Ensemble de définition de

$x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ *Solution :* Voyons ce qui impose des restrictions :

— $\frac{***}{x+3}$, donc il faut $x \neq -3$.

— $\sqrt{***}$ donc il faut $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$.

Etudions le signe :

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$x-1$	-	-	0	+	
$x+3$	-	0	+	+	
$\frac{x-1}{x+3}$	+	$\parallel$	-	0	+

On a donc $D =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 5. Ensemble de définition et dérivées de

- (1) $x \mapsto \sqrt{-x^2 - x + 2}$ *Solution* : Il faut $-x^2 - x + 2 \geq 0$. Les zéros du trinôme sont 1 et -2. Le coefficient de x^2 étant $-1 < 0$, le trinôme est positif entre les zéros, donc $D = [-2, 1]$. Pour dériver, il faut $-x^2 - x + 2 > 0$, donc le domaine de dérivation est $D' =]-2, 1[$ et on a

$$f'(x) = \frac{-2x - 1}{2\sqrt{-x^2 - x + 2}} \text{ pour tout } x \in]-2, 1[.$$

- (2) $x \mapsto \frac{x^2+1}{\ln(2-x)}$ *Solution* : Voyons ce qui impose des restrictions :
 — $\ln(**)$, donc il faut $2 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 2$.
 — $\frac{***}{\ln(***)}$, donc il faut $\ln(2 - x) \neq 0$, donc $2 - x \neq 1$, donc $x \neq 1$.

Finalement, $D =]-\infty, 1[\cup]1, 2[$. La dérivée est

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x-2) + \frac{x^2+1}{2-x}}{(\ln(x-2))^2}$$

Exercice 6. Domaine de définition, tableau de variation (on ne demande PAS les limites) et graphe approximatif des fonctions suivantes :

- (1) $f : x \mapsto e^{x^2}$
 (2) $g : x \mapsto \ln(x^2 - 2x)$
 (3) $h : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 4x - 1$

Solution : (1) $f : x \mapsto e^{x^2}$. Le domaine est $D_f := \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2xe^{x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = 1$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

(2) $g : x \mapsto \ln(x^2 - 2x)$. Il faut $x^2 - 2x = x(x - 2) > 0$, donc, étude du trinôme, $D_g =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$. La fonction g est dérivable sur D_g et $g'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x}$ pour $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$. Ainsi $g' < 0$ sur $] -\infty, 0[$ et $g' > 0$ sur $]2, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations

	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	-		XXX		+
g	$+\infty$	$\searrow$	XXX	$\nearrow$	$+\infty$
		$-\infty$	XXX	$-\infty$	

(3) $h : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 - 4x - 1$. L'ensemble de définition est $D_h = \mathbb{R}$. **Sens de variations.** La fonction h est dérivable et $h'(x) = 6x^2 - 10x - 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1/3$. Le coefficient du trinôme étant $6 > 0$, on a le signe

$$\{h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \notin]-1/3, 2]\} \text{ et } \{h'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1/3, 2]\}$$

On a $h(2) = -13$ et $h(-1/3) = -8/27$. On en déduit le tableau de variations :

	$-\infty$	$-1/3$	2	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
h	$-\infty$	$\nearrow$	$-8/27$	$\searrow$	$+\infty$
				-13	

Exercice 7. Tracez le graphe des fonctions

$$x \mapsto |x| - |x - 2|$$

$$x \mapsto |2x - 3| - x^2$$

Solution : $x \mapsto |x| - |x - 2|$. Tout dépend du signe de x et de celui de $x - 2$. On fait donc le tableau de signe

	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$ x $	-x		x	x	
$x - 2$	-		-	0	+
$ x - 2 $	$-(x-2)$		$-(x-2)$		$x-2$
$ x - x - 2 $	-2	-2	$2x - 2$	2	2

Pour $f : x \mapsto |2x - 3| - x^2$, on a $f(x) = 3 - 2x - x^2$ pour $x < 3/2$ et $f(x) = 2x - 3 - x^2$ pour $x > 3/2$. On fait alors l'étude de $f_1 : x \mapsto 3 - 2x - x^2 : f_1'(x) = -2(x + 1)$, donc f_1 croissante sur $]-\infty, -1[$ et décroissante sur $]-1, +\infty[$, et on trace le graphe de f_1 sur $]-\infty, 3/2[$. On fait l'étude de $f_2 : x \mapsto 2x - 3 - x^2 : f_2'(x) = -2(x - 1)$, donc f_2 croissante sur $]-\infty, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$, et on trace le graphe de f_2 sur $]3/2, +\infty[$ où elle est croissante. Le graphe de f est la courbe obtenue.

Exercice 8. Déterminez les solutions des équations différentielles suivantes

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y' = -7y \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(1) = 3 \end{array} \right\}$$

Solution : $y(x) = \lambda e^{-7x}$, puis $3 = y(1) = \lambda e^{-7}$ donc $\lambda = 3e^7$ et donc

$$\boxed{y(x) = 3e^{7-7x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y'' - y' - 2y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 5 \quad y'(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Solution : equation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ donc les solutions sont -1 et 2 réels. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$. On a $5 = y(0) = A + B$ et $1 = y'(0) = -A + 2B$. Donc en additionnant, $6 = 3B$ donc $B = 2$ puis $A = 3$. Finalement

$$\boxed{y(x) = 3e^{-x} + 2Be^{2x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y'' - 2y' + 5y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 5 \end{array} \right\}$$

Solution : equation caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0$ donc les solutions sont $1 \pm 2i$ complexes. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = e^x(A \cos(2x) + B \sin(2x))$. On a $1 = y(0) = A$ et $5 = y'(0) = A + 2B$, donc $B = 2$. Finalement

$$\boxed{y(x) = e^x(\cos(2x) + 2 \sin(2x)) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

FIN