

Corrigé du contrôle du 19 novembre
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants).

Les correcteurs seront attentifs au soin et à la qualité de la rédaction

Exercice 1. Résolvez les systèmes suivants s'ils ont une solution :

$$\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 3x + 6y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

Corrigé : Premier système. En faisant $L_1 - 5/3L_2 \rightarrow L_1$, on obtient

$$\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y - 10y/3 = 1 - 65/3 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -31y/3 = -62/3 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$$

puis $3x = 13 - 4 = 9$ donc $x = 3$. Finalement $\boxed{(x, y) = (3, 2)}$: on vérifie que c'est bien solution.

Pour le système suivant, en divisant la première ligne par 3 on obtient $x + 2y = 1/3$, et en divisant la seconde par 2, on obtient $x + 2y = 1/2$. C'est donc absurde et il n'y a pas de solution.

Exercice 2. On se donne la fonction

$$\begin{cases} f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 3x + \ln x \end{cases}$$

Déterminez les points critiques de f . Pour chacun d'entre eux :

- Déterminez si c'est un minimum (ou un maximum) local (ou global).
- Dessinez l'allure de la courbe de f au voisinage de ce point.

Corrigé : La fonction f est dérivable deux fois et $f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$, $f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Ainsi

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 + \frac{1}{x} = 0, \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = 0, \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$, donc

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \text{ ou } x = x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \times 2} = 1$$

- Point $x_1 = 1/2$. On a $f''(1/2) = -2 < 0$, donc maximum local strict.
- Point $x_2 = 1$. On a $f''(1) = 1 > 0$, donc minimum local strict.

Exercice 3. On se donne $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. En utilisant la notation exponentielle, exprimez :

- $\cos(a + b + c)$ en fonction de $\sin(a)$, $\cos(a)$, $\sin(b)$, $\cos(b)$, $\sin(c)$, $\cos(c)$
- $\sin(x) \cos(2x)$ sous la forme $\alpha \sin(3x) + \beta \sin(x)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Solution : On écrit $e^{i(a+b+c)} = \cos(a+b+c) + i \sin(a+b+c)$ et

$$\begin{aligned} e^{i(a+b+c)} &= e^{ia} e^{ib} e^{ic} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a))(\cos c + i \sin c) \\ &= \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a) \cos c \\ &\quad + i \sin c(\cos a \cos b - \sin a \sin b) - (\sin a \cos b + \sin b \cos a) \sin c \end{aligned}$$

en prenant la partie réelle, on obtient

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c - \sin b \cos a \sin c$$

$$\begin{aligned} \sin(x) \cos(2x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \frac{e^{3ix} + e^{-ix} - e^{ix} - e^{-3ix}}{4i} \\ &= \frac{(e^{3ix} - e^{-3ix}) - (e^{ix} - e^{-ix})}{4i} = \frac{2i \sin(3x) - 2i \sin x}{4i} = \frac{\sin(3x) - \sin x}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4. Déterminez les ensembles de définition et les dérivées des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{x}{x+1} - \sqrt{x+7}$$

Solution : Il faut que $x \neq -1$ et $x+7 \geq 0$. Alors l'ensemble de définition est

$$D =]-7; -1[\cup]-1; +\infty[.$$

La fonction dérivée est

$$x \mapsto \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+7}} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+7}}.$$

□

$$x \mapsto \cos(\ln x)$$

Solution : Il faut que $x > 0$. Alors l'ensemble de définition est

$$D = \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[.$$

La fonction dérivée est

$$x \mapsto (-\sin(\ln x)) \frac{1}{x} = -\frac{\sin(\ln x)}{x}.$$

□

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminez, s'ils existent, le minimum global, le max global, et les min et max locaux.

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ sur $\mathbb{R}$ et sur $[3, 4]$.

(2) $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.

Solution : (1) Si $f(x) = x^2 - 4x + 7$, alors $f'(x) = 2x - 4$. Le seul point critique est $x = 2$. D'après $f''(x) = 2 > 0$ ce point est un minimum. Alors sur $\mathbb{R}$ nous avons un minimum local en $x = 2$. Le minimum global de la fonction f est $f(2) = 3$. La fonction n'a ni maximum local ni maximum global.

Si nous nous restreignons à l'intervalle $[3, 4]$ le minimum en $x = 2$ ne fait pas partie de cet intervalle. Comme $f'(x) = 2x - 4 > 0$ sur $[3, 4]$ la fonction

f est croissante et donc son minimum local est $f(3) = 4$, qui est aussi le minimum global. Le maximum local est $f(4) = 7$, qui est aussi le maximum global.

(2) On a

$$f(x) = |x^2 + 2x - 3| + 4x + 3$$

$$= \begin{cases} x^2 + 2x - 3 + 4x + 3 = x^2 + 6x & \text{si } x < -3; \\ -x^2 - 2x + 3 + 4x + 3 = -x^2 + 2x + 6 & \text{si } -3 \leq x < 1; \\ x^2 + 2x - 3 + 4x + 3 = x^2 + 6x & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

et donc

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -3; \\ -2x + 2 & \text{si } -3 < x < 1; \\ 2x + 6 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

D'après $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f'(x) = 8$ nous avons un minimum local $f(-3) = -9$. De même comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 8$ nous avons aussi un minimum local $f(1) = 7$. Comme $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; -3[$, $f'(x) > 0$ sur $] -3; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ la fonction n'a pas des autres extrema locaux. Enfin le minimum global est $f(-3) = 9$. $\square$

Exercice 6. Déterminez les limites suivantes. Si nécessaire, déterminez les limites à droite et à gauche.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x^2}$

Solution : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x^2} = +\infty + 0 = +\infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}}$

Solution : On pose $f(x) = 1 - \sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $f(\pi/2) = 1 - 1 = 0$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = -\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'(\pi/2) = 0.$$

(3) Limites en 1 et $+\infty$ de $x \mapsto f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2}$.

Solution : On a $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ donc

$$\frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \times \frac{1}{x - 2}.$$

En posant $g(x) = \ln x$ pour $x > 0$ et dérivable avec $g'(x) = 1/x$ pour $x > 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \times \frac{1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x - 2} = g'(1) \times \frac{1}{-1} = -1$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1}$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1} \right) \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

(5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3 + \sin x}$$

Solution : D'après

$$\frac{x^2}{4} \leq \frac{x^2}{3 + \sin x} \leq \frac{x^2}{2}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

on obtient (Théorème d'encadrement)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3 + \sin x} = +\infty.$$

□

(6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 - 2}{x + x^2 + e^{-x}}$$

Solution : Pour $x \geq 0$ on a

$$\frac{x + x^3 - 2}{x + x^2 + 1} \leq \frac{x + x^3 - 2}{x + x^2 + e^{-x}}.$$

De plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 - 2}{x + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right)} = +\infty.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 - 2}{x + x^2 + e^{-x}} = +\infty.$$

□

(7)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{e^x}$$

Solution : On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right) = 0 + 0 = 0.$$

□

(8)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x - 3}$$

Solution :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x - 3} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(x-3)(x+1)} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{x-3}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{8\sqrt{3}}$

FIN