

Equations Différentielles et Systèmes Dynamiques - M1 Energie

TP 1 - Applications sur Python

Ce TP est consacré à l'étude numérique avec le langage Python du portrait de phase des systèmes dynamiques qui ont été étudiés théoriquement dans les TD précédents. Pour réaliser ce TP, vous devez télécharger sur ARCHE¹ l'archive "tp_python_EDO_Syst_Dyn_M1energie.zip" et l'extraire sur votre PC. Ensuite, vous devez lire l'annexe de cet énoncé qui vous présente l'utilisation de Python pour créer les portraits de phase des deux exercices.

A l'issue du TD, vous devrez rendre un compte-rendu de quelques pages qui répondra aux questions de l'énoncé, avec notamment les figures que vous aurez tracé ainsi que vos commentaires et explications.

Exercice 1. (*Le pendule non-linéaire*²)

On considère l'équation du pendule du TD 2 (problème 1), écrite en posant la constante $K = 1$:

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

avec $\gamma \geq 0$ le coefficient de frottement visqueux. Les conditions initiales sont $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = v_0$. Il est conseillé d'utiliser un programme principal différent pour les deux questions de l'exercice.

- 1) On considère ici une étude du pendule sans frottement, $\gamma = 0$: c'est-à-dire qu'on se place dans le cadre du problème 1, partie II du TD 2.
 - a) Tracez le portrait de phase en choisissant *soigneusement* les trajectoires caractéristiques de la dynamique du pendule, car vous réutiliserez ces trajectoires dans la suite de l'exercice³. Comparez avec les résultats théoriques du TD 2.
 - b) Pour les mêmes trajectoires que la question a), tracez l'évolution de $\theta(t)$ en fonction du temps t ⁴.
 - c) Sur une autre figure, tracez les lignes de niveau de l'énergie mécanique $E(\theta, \dot{\theta})$ conservée par le système dynamique⁵. Comparez cette figure avec le portrait de phases de la question a).
- 2) Etude avec frottement, $\gamma > 0$: on se place dans le cadre de la partie III du problème 1.
 - a) Rajoutez dans votre programme Python le terme de frottement visqueux. Tracez le portrait de phase du système dynamique pour les mêmes trajectoires que la question 1a). Comparez la stabilité des points fixes avec le cas non amorti.
 - b) Pouvez-vous retrouver ce portrait de phase en traçant les lignes de niveau de l'énergie mécanique ?

Exercice 2. (*Le système dynamique de van der Pol*)

On considère l'équation de van der Pol⁶ (1927) :

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

avec ϵ un paramètre réel que vous définirez d'après les résultats de l'exercice 1 du TD 3.

¹Page Arche du cours : <http://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=6745>.

²Référence: https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple.

³Utilisez la figure 3 du TD 2 pour choisir les conditions initiales des trajectoires.

⁴Utilisez la fonction `plt.plot` pour tracer le sous-tableau `y[0,:]` en fonction du tableau `t`.

⁵Le programme 'main_contours_energie.py' donne un exemple de tracé de lignes de niveau pour l'énergie mécanique $E(x, y) = \omega_0^2 x^2 + y^2$ du pendule linéaire vu dans le CM 2.

⁶Référence: https://fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_de_Van_der_Pol.

- 1) Tracez le portrait de phases du système dynamique avant la bifurcation.
- 2) Tracez le portrait de phases après la bifurcation. Observez l'apparition du cycle limite.
- 3) Pour les mêmes trajectoires que la question précédente, tracez l'évolution de $x(t)$ en fonction du temps.

Annexe 1. (*Portrait de phases avec Python*)

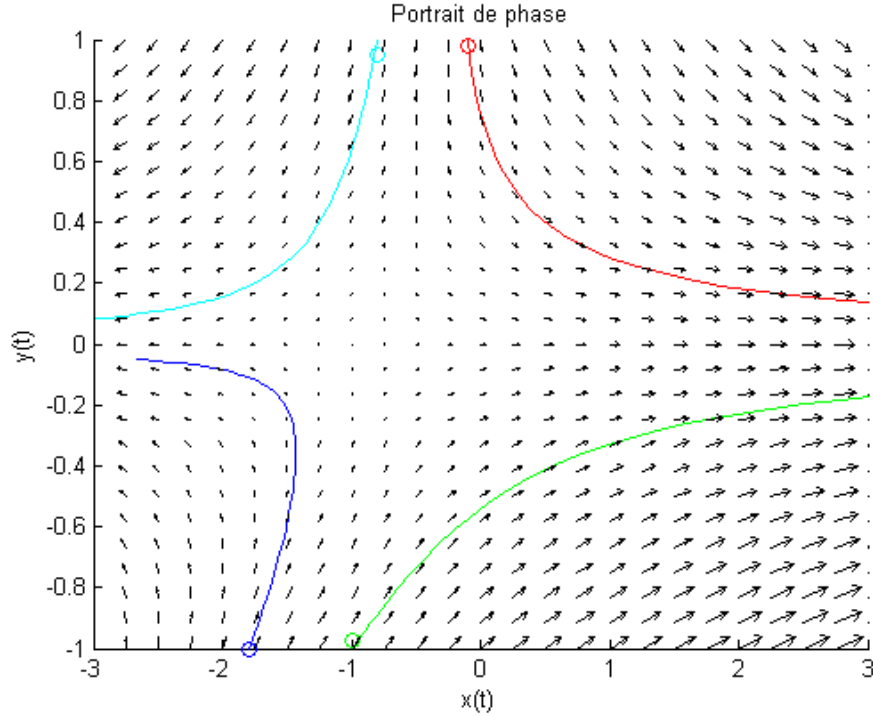


Figure 1: Portrait de phases de l'EDO (1). Les conditions initiales sont représentées par le symbole $\circ$. Le champ de direction est tracé avec la fonction Python `'plt.quiver'`.

Cette annexe vous apprendra à tracer le portrait de phases du système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + e^{-y}, \\ \dot{y} &= -y, \end{cases} \quad (1)$$

qui a été étudié dans le TD 2. Le programme principal `'main_TP_edo_syst_dyn.py'` résout numériquement l'EDO (1) de $t_0 = 0$ à $t_f = 3$ à partir de la condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) = (-1.8, -0.9)$, et trace cette trajectoire dans l'espace des phases $(x(t), y(t))$ de taille $[-3, 3] \times [-1, 1]$. Le résultat est représenté sur la figure 1.

Notez que le sous-tableau `y[0, :]` (resp. `y[1, :]`) correspond à l'approximation numérique de $x(t)$ (resp. $y(t)$) dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$. Le second-membre de l'EDO (1) est codée dans la fonction `'fedo_2D_annexe(t,y)'` contenue dans le fichier `'fonctions_TP_edo_syst_dyn.py'`.

Complétez le portrait de phase en traçant les trajectoires correspondant aux conditions initiales $(x(t_0), y(t_0))$ suivantes : $(-0.1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(-0.8, 1)$, afin de retrouver le portrait de phase de la figure 1. Comparez ce portrait de phases avec celui obtenu qualitativement dans le TD 2, où il était notamment montré que le point $(x^*, y^*) = (-1, 0)$ est un point selle.