

Objectifs :

- Acquérir les notions scientifiques et les outils nécessaires à l'analyse temporelle et fréquentielle des signaux de signaux biomédicaux à l'aide d'une chaîne acquisition.
- Comprendre les principales fonctions de traitement numériques des signaux.
- Appliquer ces notions à l'analyse et au traitement des signaux biomédicaux issus de chaînes d'acquisition.

I. LE FILTRAGE NUMERIQUE :

A. Modélisation d'un système linéaire du premier ordre:

1. Cas d'un circuit RC:

On considère l'exemple d'un circuit R-C régi par l'équation différentielle : $e(t) = s(t) + \tau \frac{ds}{dt}$. Cette équation devient

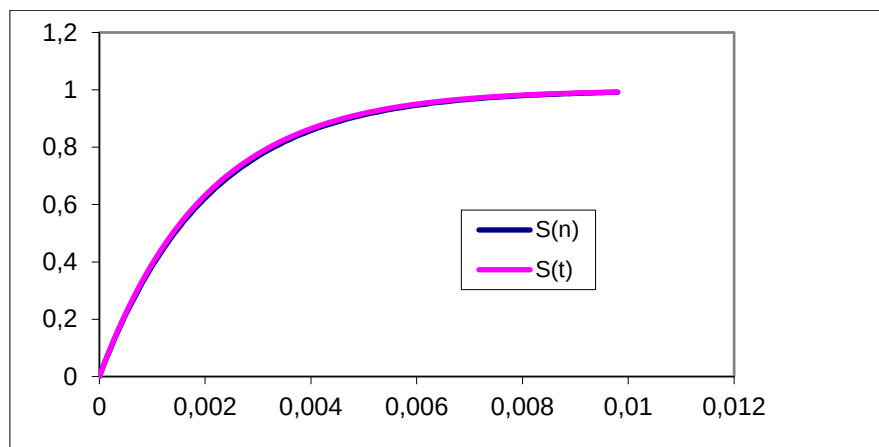
après échantillonnage pour un système numérique: $e(n) = s(n) + \tau \frac{ds(n)}{T_e} = s(n) + \tau \frac{(s(n) - s(n-1))}{T_e}$ où n

représente l'indice du dernier échantillon et $n-1$ l'avant dernier. Il en découle la relation récurrente entre la dernière

valeur en sortie $s(n)$ et l'avant dernière $s(n-1)$: $s(n) = \frac{e(n) + \frac{\tau}{T_e} s(n-1)}{1 + \frac{\tau}{T_e}} = \frac{e(n) + \tau_f s(n-1)}{1 + \tau_f}$ avec τ la constante

de temps du système et $T_e = 1/f_e$ la période d'échantillonnage.

- Dans le cas d'un échelon unitaire :



2. Cas d'un système du 2ème ordre :

On choisit désormais un filtre passe-bas du 2ème ordre régi par l'équation différentielle:

$e(t) = s(t) + \frac{2m}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s}{dt^2}$ avec m le facteur d'amortissement et ω_0 la pulsation propre.

On montre facilement que cette équation peut se mettre sous la forme :

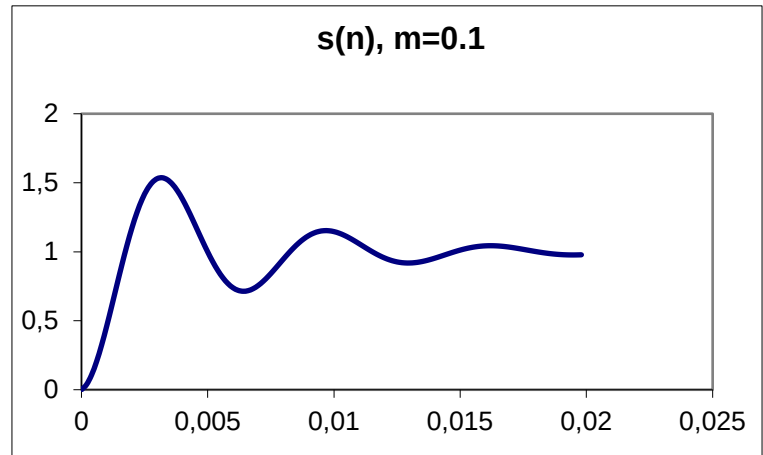
$$e(n) = s(n) + \frac{2m}{\omega_0} \frac{(s(n) - s(n-1))}{T_e} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{(s(n) - 2s(n-1) + s(n-2))}{T_e^2}.$$

Ce qui donne l'équation récurrente suivante :

$$s(n) = \frac{e(n) + s(n-1)\left(\frac{2m}{\omega_0} f_e + 2\left(\frac{f_e}{\omega_0}\right)^2\right) - s(n-2)\left(\frac{f_e}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{2m}{\omega_0} f_e + \left(\frac{f_e}{\omega_0}\right)^2}.$$

L'écriture de cette équation permet d'obtenir des réponses à des formes d'ondes quelconques et d'observer les régimes transitoires.

- Dans le cas d'un échelon unitaire :



B. La transformée en Z et le traitement numérique du signal.

C'est un outil mathématique de traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète.

1. Définitions et propriétés :

a) Définition :

Sa définition mathématique est la suivante : La transformation en Z est une application qui transforme une suite s_n (définie sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée z , telle que

$$S(z) = Z\{s(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n).z^{-n}, z \in C$$

La variable n représente en général le temps discrétisé, la variable complexe z ne représente rien de particulier, il s'agit d'une création purement abstraite. Lorsqu'on travaille sur $s(n)$ on dit que l'on est dans le *domaine temporel*, lorsqu'on travaille sur $S(z)$ le domaine est appelé *fréquentiel* par analogie avec la transformée de Fourier, mais strictement parlant on est dans un domaine parfaitement abstrait.

Rem : Si $s(n)=0 \quad \forall n < 0$, on parle de signal causal. Inversement, si $s(n)=0 \quad \forall n > 0$, on parle de signal anti-causal.

2. Propriétés de la transformée en z :

a) Linéarité :

La transformée en z d'une combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en z de chaque signal.

$$Z\{a_1 s_1(n) + a_2 s_2(n)\} = a_1 S_1(z) + a_2 S_2(z)$$

b) Décalage temporel :

Le décalage temporel d'un signal de k échantillons se traduit par la multiplication de la transformée en z du signal par z^{-k} .

$$Z\{s(n-k)\} = z^{-k} S(z)$$

c) Théorème de la valeur initiale :

Soit $s(n)$ un signal **causal** et $S(z)$ sa transformée en z . Alors : $s(0) = \lim_{n \rightarrow 0} s(n) = \lim_{z \rightarrow +\infty} S(z)$

d) Théorème de la valeur finale :

Soit $s(n)$ un signal **causal** et $S(z)$ sa transformée en z . Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z)$

e) Convolution :

La transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées en Z

$$s(n) * h(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n-k).h(k)$$

$$Z\{s(n) * h(n)\} = S(z).H(z)$$

3. Relation avec les autres transformées :

a) Transformée de Laplace :

La transformée en z est simplement la transformée de Laplace d'un signal discret en effectuant la substitution :

$$z = e^{pT_E}$$

où $T_E = 1/F_E$ est la période d'échantillonnage (en unité de temps i.e. secondes) et F_E est la fréquence d'échantillonnage (en échantillon par seconde ou hertz)

Pour trouver une expression polynomiale simple de p en fonction de z , on doit effectuer des approximations :

b) Approximation par la dérivée :

Pour l'**équivalence de la dérivée**, on considère que la dérivée a pour expression : $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ soit : $\frac{x(n) - x(n-1)}{T_E}$.

En variable z , la dérivée correspond à $Z\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{1-z^{-1}}{T_E}$ et en variable de Laplace, elle correspond à p .

On a donc l'équivalence de la dérivée : $p = \frac{1-z^{-1}}{T_E}$.

c) Approximation par l'intégrale :

Pour l'**équivalence de l'intégrale**, on considère que l'intégrale a pour expression : $\frac{T_E (x(n) + x(n-1))}{2}$ en considérant

l'aire équivalente à celle d'un trapèze. En variable z , cela correspond à $Z\left(\frac{T_E (x(n) + x(n-1))}{2}\right) = T_E \cdot \frac{1+z^{-1}}{2}$ et en variable de Laplace à $1/p$.

On a donc l'équivalence de l'intégrale : $p = \frac{2}{T_E(1+z^{-1})}$.

d) Approximation par transformation bilinéaire :

Pour la **transformation bilinéaire**, on considère la relation approximative liant y_n à y_{n-1} et à leur dérivées:

$$y(n) = y(n-1) + T_E(y'(n) + y'(n-1))/2.$$

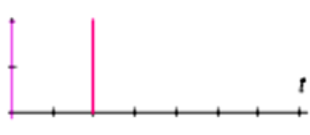
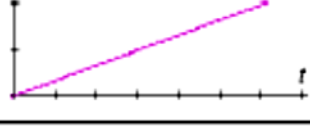
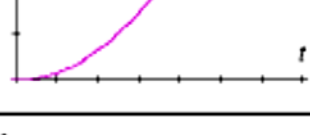
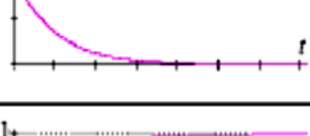
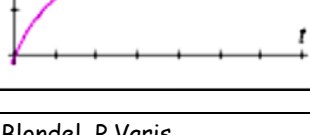
Ce qui se traduit en transformée en z par : $(1-z^{-1}) \cdot Y(z) = T_E(1+z^{-1})/2 \cdot Y'(z)$.

Soit $\frac{2(1-z^{-1})}{T_E(1+z^{-1})} = \frac{Y'(z)}{Y(z)}$. C'est un autre équivalent de la dérivée donc, en transformée de Laplace, de la variable p .

On a donc l'équivalence bilinéaire : $p = \frac{2(1-z^{-1})}{T_E(1+z^{-1})}$.

Cette transformation préserve la réponse en fréquence du filtre.

4. Transformées en z usuelles :

signal causal	$x(t)$ [$x=0$ pour $t<0$]	$X(p)$	$X(z)$ [avec $\alpha = e^{-aT_E}$]
	$\delta(t)$	1	1
	$\delta(t - kT_E)$	$e^{-kT_E p}$	z^{-k}
	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
	t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_E z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
	t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T_E^2 z^{-1} (1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$
	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-\alpha)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\alpha z^{-1})}$

C. Application à l'électronique numérique :

1. Transmittance en z :

a) Définitions :

La fonction de transfert en z d'un filtre numérique est la transformée en z de sa réponse impulsionnelle discrète : $H(z) = Z[h(n)]$.

Elle s'écrit : $H(z)X(z) = Y(z)$ avec $X(z)=1$.

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}$$

b) Equation de récurrence :

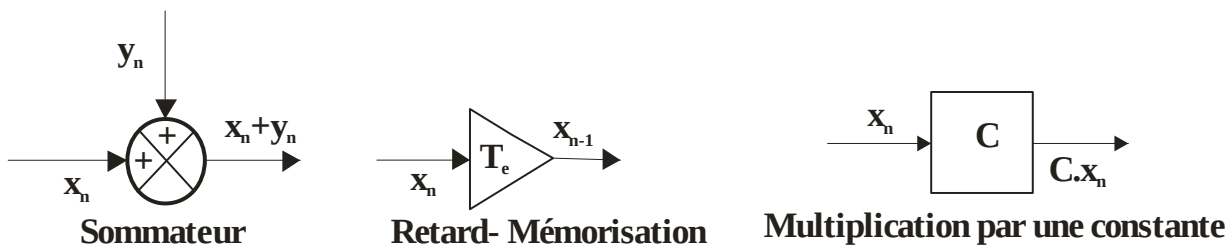
A partir de la transmittance en Z on obtient :

$$E(z)a_0 + E(z)a_1 z^{-1} + E(z)a_2 z^{-2} + \dots = S(z) + S(z)b_1 z^{-1} + S(z)b_2 z^{-2} + \dots$$

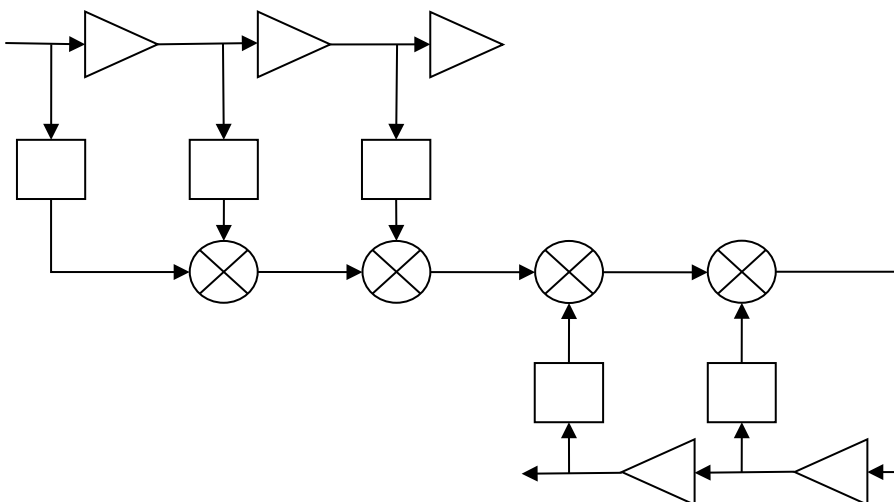
Cela correspond à l'équation de récurrence :

$$s(n) = e(n)a_0 + e(n-1)a_1 + e(n-2)a_2 - s(n-1)b_1 - s(n-2)b_2 + \dots$$

On donne les trois symboles représentant les fonctions élémentaires d'un programme. C'est-à-dire la somme, la mise en mémoire et la multiplication par une constante.



A partir de l'équation de récurrence, on établit la structure de l'algorithme ci-dessous.



2. Filtre numérique :

a) Filtre numérique récursif (RII):

Si les coefficients b_i ne sont pas tous nuls, l'équation aux différences est une équation de récurrence. Un tel système est encore appelé "filtre récursif".

Exercice : on veut réaliser l'équivalent numérique d'un filtre passe-bas du premier ordre. Pour comparer commodément le comportement du système numérique à celui du système analogique, on examinera ici la réponse indicielle (réponse à un échelon) plutôt que la réponse impulsionnelle.

Transmittance analogique de Laplace : $H(p) = \frac{1}{1 + \tau \cdot p} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}$. $s(n) = e(n)a_0 + e(n-1)a_1 - s(n-1)b_1$

b) Filtre numérique non récursif (RIF) :

Si les coefficients b_i sont tous nuls (pour $i \neq 0$), la sortie à l'instant n ne dépend que de l'entrée et des coefficients a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Un tel système est encore appelé "filtre non récursif".

$$s(n) = e(n)a_0 + e(n-1)a_1 + e(n-2)a_2 + \dots$$

- Filtre interpolateur

Filtre permettant d'interpoler deux échantillons successifs en calculant leur moyenne. Utile pour augmenter artificiellement la fréquence d'échantillonnage d'un signal en doublant le nombre d'échantillons.

$$s(n) = [e(n) + e(n-1)]/2$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

- Filtre à moyenne mobile

C'est l'extension à plus de deux échantillons du filtre interpolateur. Il effectue la moyenne d'une succession d'échantillons pour "lisser" le signal en éliminant les parasites et les valeurs aberrantes (exemple avec $n = 5$).

$$s(n) = [e(n) + e(n-1) + e(n-2) + e(n-3) + e(n-4)]/5$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{5}$$

3. Stabilité des filtres

Etant donné la transformée en z d'un filtre numérique mise sous la forme d'un produit de polynômes du premier et/ou du second ordre en z^{-1} au dénominateur :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots} \text{ ou encore } H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{N(z)}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z^{-1}) \dots}$$

On appelle **pôles** de la transformée les racines du dénominateur : $z_1 = 1/\alpha$, $z_2 = 1/\beta$, etc. À un élément du second ordre est associé une paire de pôles imaginaires conjugués. On montre qu'un tel système est stable si le module de **tous** les pôles est **supérieur** à 1 : $|z_1| > 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$ ET $|z_2| > 1 \Leftrightarrow |\beta| < 1$ ET ... etc

- si l'on écrit $H(z)$ sous la forme d'une fonction de z au lieu de z^{-1} , la stabilité est assurée si les pôles ont leur module **inférieur** à 1.
- on vérifie que l'intégrateur pur n'est pas stable, puisqu'il a un pôle égal à 1.
- N'ayant pas de dénominateur, un filtre RIF est toujours stable.

Un filtre numérique est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Comparaison des filtres RIF et RII :

Caractéristique	Filtre RIF	Filtre RII
Fonction de transfert	Ne contient que des zéros	Contient des pôles et des zéros
Réponse en fréquence	Aucune restriction	Les méthodes sont plutôt limitées aux filtres passe-bas passe-haut, passe-bande et réjecteur.
Réponse en phase	Parfaitement linéaire si nécessaire Déphaseurs purs irréalisables	
Stabilité	Toujours stables	Les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité
Complexité de la structure	Proportionnelle à la longueur de la réponse impulsionnelle	Plus facile qu'un filtre RIF pour la même sélectivité
Erreurs	Faible	Sources d'instabilités

D. Méthodes de réalisation des filtres RIF:

1. Définitions :

D'après le produit de convolution $s(n)$ s'écrit : $s(nT_e) = \sum_{i=0}^M e(nT_e - iT_e)h(iT_e) = \sum_{i=0}^{M-1} e(n-i)h(i) = s(n)$. En prenant la transformée en Z de $s(n)$, on obtient : $S(z) = \sum_{i=0}^M h(i)E(z)z^{-i}$. D'où la transmittance z du filtre RIF :

$$H(z) = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \text{ avec } b_i \text{ les coefficients du filtre numérique RIF pour une séquence de } M \text{ échantillons.}$$

Rem : On calcule les coefficients du filtre RIF b_i à partir des M premiers échantillons de la réponse impulsionnelle du filtre numérique.

2. Calcul des coefficients $h(i)$:

Rappel : La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)$ est équivalente à la transmittance $\underline{H}(jf)$ d'un filtre :

$$\underline{H}(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \text{ et inversement la transformée de Fourier inverse de la transmittance } \underline{H}(jf) \text{ d'un filtre est}$$

$$\text{équivalente à la réponse impulsionnelle : } h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{H}(jf)e^{j2\pi ft} df.$$

Ce qui donne pour un signal discret : $h(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \underline{T}_0(jk\Delta f)e^{j2\pi k\Delta f iT_e}$ avec $\Delta f = \frac{f_e}{M}$, $t = iT_e$ et

$$\underline{T}_0(jk\Delta f) = \left| \underline{T}_0(jk\Delta f) \right| e^{j\phi_k} \text{ la fonction de transfert souhaitée.}$$

$$\text{Ce qui donne : } h(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \underline{T}_0(jk) e^{j2\pi \frac{ki}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \left| \underline{T}_0(jk) \right| e^{j\phi_k} e^{j2\pi \frac{ki}{M}}. \text{ Avec } \phi_k = \frac{-\pi k(M-1)}{M}$$

A partir de la transmittance en z , $H(z) = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$, on obtient, la transmittance harmonique réelle du filtre

$$\text{RIF : } \underline{H}(jf) = \sum_{i=0}^M h(i)e^{-j2\pi f i T_e}.$$

En remplaçant $h(i)$ par la relation $h(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} T_0(jk) e^{j2\pi \frac{ki}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} |T_0(jk)| e^{j\phi_k} e^{j2\pi \frac{ki}{M}}$, on obtient la fonction

de transfert harmonique réelle du filtre numérique en fonction des échantillons fréquentiels prélevés sur la fonction

de transfert souhaitée : $\underline{H}(jf) = e^{-j\pi(M-1)fT_e} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} |T_0(jk)| e^{j(\phi_k + k\pi \frac{M-1}{M})} \frac{\sin(\pi(MT_e f - k))}{M \sin(\pi(\frac{MT_e f - k}{M}))}$. Comme $\phi_k = \frac{-\pi k(M-1)}{M}$

alors la relation devient : $\underline{H}(jf) = e^{-j\pi(M-1)fT_e} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} |T_0(jk)| \frac{\sin(\pi(MT_e f - k))}{M \sin(\pi(\frac{MT_e f - k}{M}))}$.

Rem : $\underline{H}(jf)$ à pour argument $\varphi = -\pi(M-1)fT_e$ ce qui permet de déterminer le retard : $\tau = \frac{(M-1)T_e}{2}$ constant dans sa bande passante.

Rem : $\underline{H}(jf)$ à pour module $|\underline{H}(jf)| = \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} |T_0(jk)| \left| \frac{\sin(\pi(MT_e f - k))}{M \sin(\pi(\frac{MT_e f - k}{M}))} \right|$.

3. Exemple filtre passe-bas :

On souhaite déterminer l'algorithme de calcul d'un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c=100\text{Hz}$ avec une fréquence d'échantillonnage $f_e=500\text{Hz}$. On prend 16 échantillons pour les calculs.

a) Calcul des coefficients du filtre :

On détermine que $|T_0(jk\Delta f)|=1$ pour $k \in [-3;3]$ et $\phi_k = -\frac{\pi k 15}{16}$. Ce qui donne

$$h(i) = \frac{1}{16} \sum_{k=-8}^7 |T_0(jk)| e^{j\phi_k} e^{j2\pi \frac{ki}{M}} = \frac{1}{16} \sum_{k=-3}^3 e^{-j\frac{\pi k 15}{16}} e^{j2\pi \frac{ki}{16}} \text{ et finalement : } h(i) = \frac{1}{16} \sum_{k=-3}^3 e^{j\pi k \left(\frac{2i-15}{16}\right)}.$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
h(i)	-0,0485469	0,030788	0,0678165	-0,00792495	-0,0980449	-0,0384873	0,189883	0,404517
i	8	9	10	11	12	13	14	15
h(i)	0,404517	0,189883	-0,038487	-0,0980449	-0,007925	0,0678165	0,030788	-0,04855

b) Calcul de la fonction de transfert réelle :

Le module de la fonction de transfert réelle est alors

$$|\underline{H}(jf)| = \left| \sum_{k=-3}^3 \frac{\sin(\pi(16T_e f - k))}{16 \sin(\pi(\frac{16T_e f - k}{16}))} \right| = \left| \sum_{k=-3}^3 \frac{\sin(\pi(0,032 f - k))}{16 \sin(\pi(\frac{0,032 f - k}{16}))} \right| \text{ et son argument } \varphi = -\pi 15 f T_e.$$

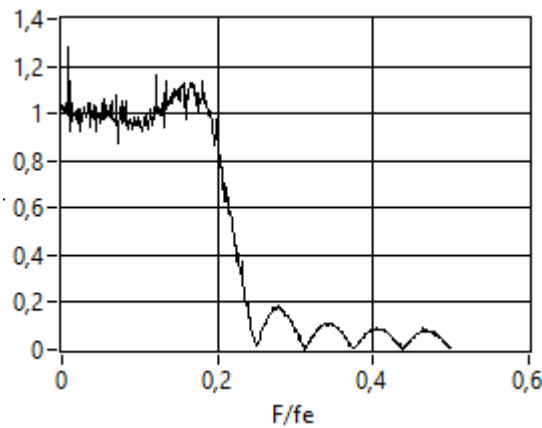


Figure 1 : Transmittance réelle

4. Diminution des ondulations par fenêtrage temporelle :

$$\text{Fenêtrage de Hamming : } h_F(i) = \frac{h(i)}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi i}{N-1} \right]$$

5. Réalisation récursive des filtres RIF :

$$H(z) = \sum_{i=0}^M h(i)z^{-i} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$h(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} T_0 \left(j \frac{k}{MT_e} \right) e^{j2\pi \frac{ki}{M}}$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} T_0 \left(j \frac{k}{MT_e} \right) e^{j2\pi \frac{ki}{M}} \right] z^{-i} = \frac{1}{M} M \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} T_0 \left(j \frac{k}{MT_e} \right) \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{ki}{M}} z^{-i}$$

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} T_0 \left(j \frac{k}{NT_e} \right) \sum_{i=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1} \right)^i = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} T_0 \left(j \frac{k}{NT_e} \right) \left[\frac{1 - \left(e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1} \right)^N}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1}} \right]$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} T_0 \left(j \frac{k}{NT_e} \right) \left[\frac{1}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}} z^{-1}} \right]$$

II. LES SIGNAUX DETERMINISTES:

Un signal est dit « déterministe » s'il est reproductible de manière identique à chaque fois qu'il est généré, autrement dit lorsque sa valeur peut être connue précisément à chaque instant.

Les signaux déterministes sont répartis en plusieurs sous-classes notamment selon leur durée finie ou infinie, et leur stationnarité.

Dans le cas des signaux déterministes à temps continu, une classification est faite autour des notions d'énergie et de puissance. Pour simplifier, nous dirons que les signaux d'énergie finie servent à modéliser les signaux de durée finie et les signaux de puissance finie les signaux de durée infinie.

A. Stationnarité :

Pour les signaux déterministes, une définition simple consiste à dire que les signaux stationnaires sont ceux qui possèdent un contenu fréquentiel identique dans le temps.

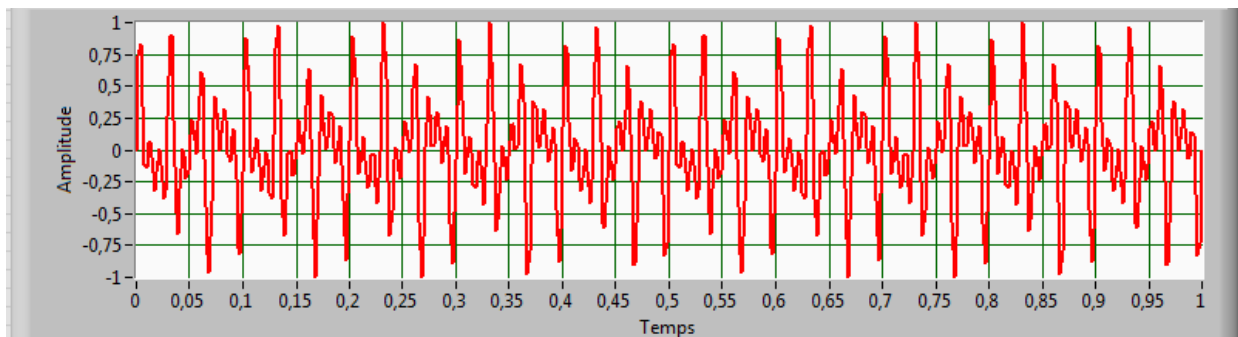


Figure 2: Signal stationnaire

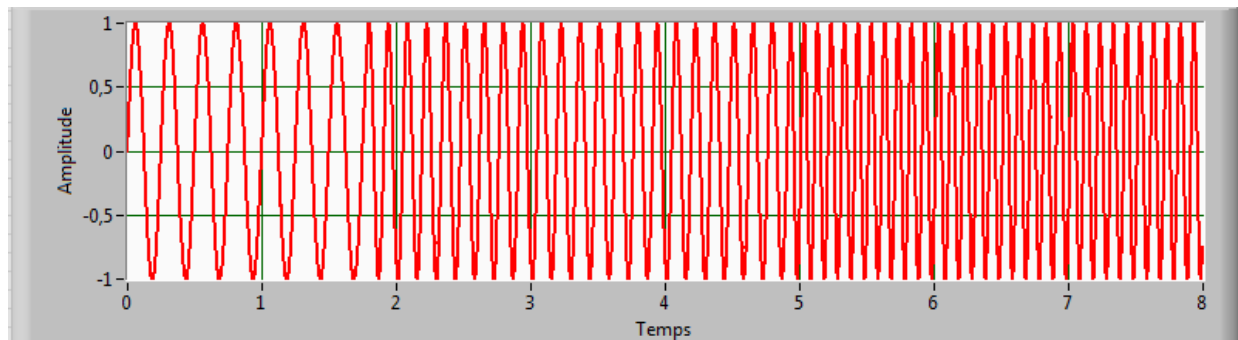


Figure 3: Signal non stationnaire

B. Energie et Puissance :

1. Cas des signaux à temps continu :

L'énergie d'un signal $s(t)$, fonction du temps t , est la quantité E définie par :

$$E = \int |s(t)|^2 dt \quad (1)$$

La puissance d'un signal $s(t)$, fonction de t , est la quantité P définie par :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |s(t)|^2 dt \quad (2)$$

Rem :

- Si $s(t)$ est tel que $0 < E < +\infty$, on dit que le signal est d'énergie finie et sa puissance $P = 0$.

- Si $s(t)$ est tel que $0 < P < +\infty$, on dit que le signal est de puissance finie et son énergie est infinie.

Exp :

2. Cas des signaux à temps discret :

Un signal déterministe à temps discret est une suite de valeurs issue de l'échantillonnage du signal à temps continu $s(t)$ (à spectre limité à $-f_e/2$ et $+f_e/2$). Dans ce cas le signal $s(t)$ devient $s(nT_e)$ et pour simplifier $s(n)$ ou $s^*(t)$.

L'énergie E du signal $s(n)$ devient alors : $E = \sum_{\forall n} |s(n)|^2$ (3)

La puissance est alors : $P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2$ (4)

Rem : comme pour les signaux à temps continu, on retrouve les mêmes propriétés :

-
- Si le signal est d'énergie finie et sa puissance $P = 0$.
- Si le signal est de puissance finie et son énergie est infinie.

Quelques exemples de signaux déterministes à temps discret :

- ✓ signal impulsion unité, d'énergie finie 1, défini par : $\delta(n) = 1$ si $n = 0$ sinon $\delta(n) = 0$.
- ✓ signal échelon unité défini par $u(n) = 1$ pour $n > 0$.

III. ES SIGNAUX ALEATOIRES :

Jusqu'à présent, nous n'avons rencontré que des signaux déterministes $\{s(n)\}$, c'est-à-dire des fonctions telles que, à chaque instant n , on dispose d'une règle permettant d'évaluer la quantité $s(n)$. Cette règle peut être spécifiée, par une expression mathématique, ou une équation. Les fonctions déterministes forment la base de l'analyse mathématique, mais beaucoup de phénomènes ne sont pas de cette nature.

A. Probabilité appliquée au traitement du signal:

La bonne caractérisation des signaux aléatoires à un instant t nécessite des connaissances en théorie de la probabilité.
Le signal est modélisé par ses caractéristiques statistiques.

1. Probabilité d'événement :

Soit x_i un ensemble d'événements inclus dans ω , la probabilité d'événement de valeur x_i est donné par la relation suivante :

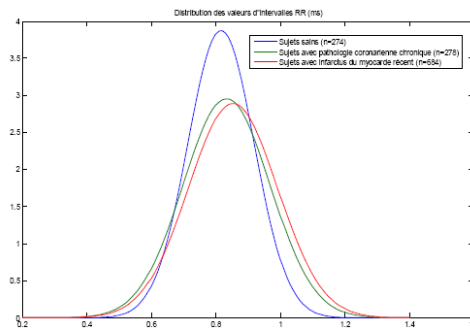
$$p(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_i)}{n} \text{ . Avec } n \text{ le nombre d'expériences réalisées et } n(x_i) \text{ le nombre où } x_i \text{ s'est réalisé.}$$

Rem : $0 < p(x_i) < 1$.

2. Signal aléatoire et variable aléatoire:

Le signal est considéré comme un ensemble de n tirages (ou réalisations, expériences) c'est-à-dire une suite de variables aléatoires (v.a.) $s(t_i) = x_i$ issues d'une épreuve aléatoire et pouvant être caractérisée par sa loi de probabilité.

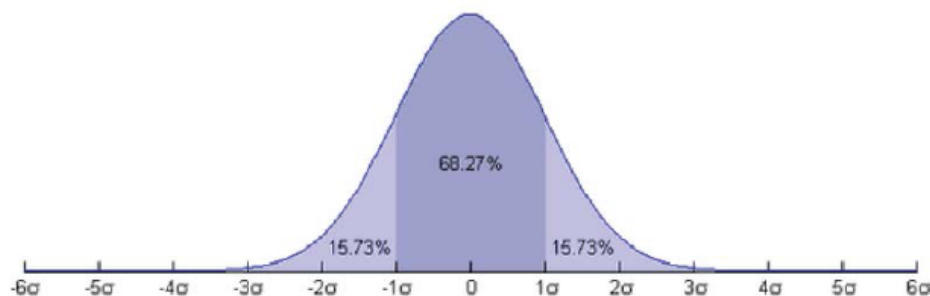
Le nombre (réel) x_i est déterminé par le résultat d'une expérience aléatoire.



3. Moments d'ordre 1 :

La description simplifiée des signaux aléatoires est réalisée par des éléments statistique (moments) d'ordre 1 comme :

- La moyenne statistique ou espérance mathématique : $m_s(t) = E[s(t)] = \sum_{i=0}^n x_i p[s(t) = x_i]$
- La moyenne centrée : $m_{sc}(t) = E[s(t) - m_s(t)]$
- La densité de probabilité : $\exp ddp(x) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_s)^2}{2\sigma_s^2}}$ (distribution normal)
- La fonction de répartition : $F(x) = \int_{-\infty}^x ddp(u) du$



4. Moments d'ordre 2:

La description des signaux aléatoires est réalisée par des éléments statistique (moments) d'ordre 2 comme :

- La variance (moment centré d'ordre 2) : $Var_s(t) = E[(s(t) - m_s(t))^2]$
- Puissance (ou énergie moyenne) : $E[s(t)^2] = \sum_{i=0}^n x_i^2 p[s(t) = x_i]$
- Covariance : $CoVar_s(t_1, t_2) = E[(s(t_1) - m_s(t_1))(s(t_2) - m_s(t_2))]$ Cela correspond à la moyenne centrée du produit de deux échantillons du signal pris à des instants différents t1 et t2.

Rem : $CoVar_s(t_1, t_1) = Var_s(t_1)$

5. Densité Spectrale de Puissance :

Un signal aléatoire ne possède pas de transformée de Fourier. Cependant, on peut lui associer une notion de densité

spectrale de puissance $dsp_s(f)$ définie comme: $dsp_s(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[S_T(f)^2]$.

6. Définitions :

Un **processus stochastique** correspond à un phénomène dont le déterminisme n'est pas absolu et peut être étudié par la statistique (opposé à déterministe).

La description de signaux déterministes ne permet pas de modéliser les signaux réels (en particulier physiques ou physiologiques). En effet, il n'est pas possible de connaître avec certitude la valeur du signal à chaque instant ; on parle alors de **signal aléatoire** pour lequel il est alors possible de définir des propriétés statistiques.

a) Bruit blanc :

Un **bruit blanc** est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences. Il est d'énergie infinie et donc de puissance finie.

Par analogie avec la lumière blanche qui contient toutes les fréquences lumineuses avec la même intensité, le bruit blanc possède la même densité spectrale de puissance à toutes les fréquences.

b) Bruit coloré :

Par opposition au bruit blanc, un bruit coloré (rose par exemple) aura un spectre fini et sera d'énergie finie.

B. AutoCorrélation:

1. Principe :

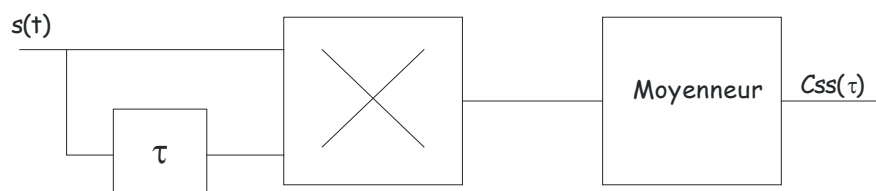
On définit la fonction d'autocorrélation d'un signal $s(t)$ par la relation : $C_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau)dt$. Ce résultat peut

se modéliser physiquement par la valeur moyenne du produit $s(t).s(t-\tau)$ comme le montre la figure ci-dessus.

On remarquera que pour $\tau=0$, $C_{ss}(0)=S^2$ avec S valeur efficace de $s(t)$.

La relation précédente $C_{ss}(\tau)$ devient dans le cas d'une séquence d'échantillons $\{s(n)\}$ de nombre limité:

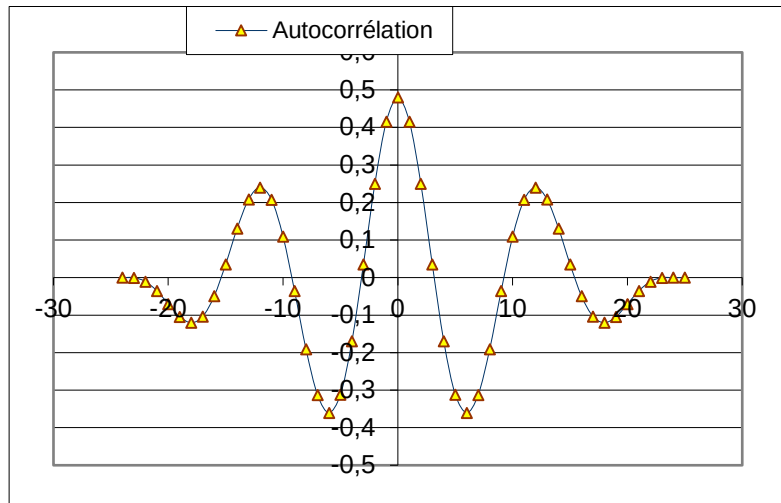
$$C_{ss}(k\Delta t) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} s(n).s(n-k) \quad \text{où } k\Delta t \text{ est une représentation discrète du retard } \tau.$$



2. Exemple :

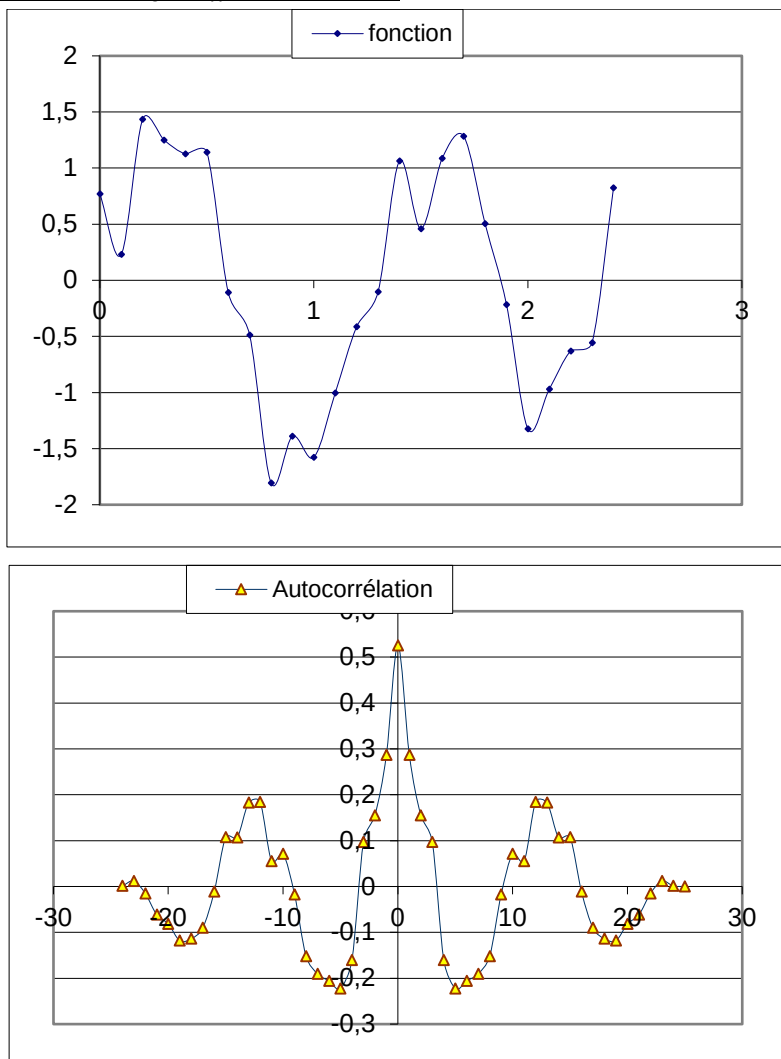
On considère une séquence $\{s(n)\}$ de M échantillons.

a) Autocorrélation d'un signal $s(t)$ sinusoïdal :



Rem : On observe bien un pic de corrélation pour $\tau=0$ correspondant à la valeur efficace au carré de $\{s(n)\}$. L'amplitude de la sinusoïde est fixée à 1.

b) Autocorrélation d'un signal $s(t)$ sinusoïdal bruité :



Rem : La fonction autocorrélation permet par exemple de signaler la présence de $\{s(n)\}$ même si le bruit est important.

C. CORRELATION :

1. Principe :

La **corrélation croisée** est parfois utilisée en statistique pour désigner la covariance.

La fonction d'inter-corrélation ou corrélation d'un signal $e(t)$ avec un signal $s(t)$ est donnée par la relation :-

$$Ces(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t)s(t-\tau)dt$$

Ce résultat peut se modéliser physiquement par la valeur moyenne du produit $e(t)s(t-\tau)$

comme le montre la figure ci-contre. La réalisation de cette opération permet de détecter des ressemblances entre les signaux $e(t)$ et $s(t)$. Si les deux signaux sont indépendants, leur fonction de corrélation est nulle.

Pour des séquences d'échantillons $\{s(n)\}$ et $\{e(n)\}$ en nombres limités, la fonction $Ces(\tau)$ devient :

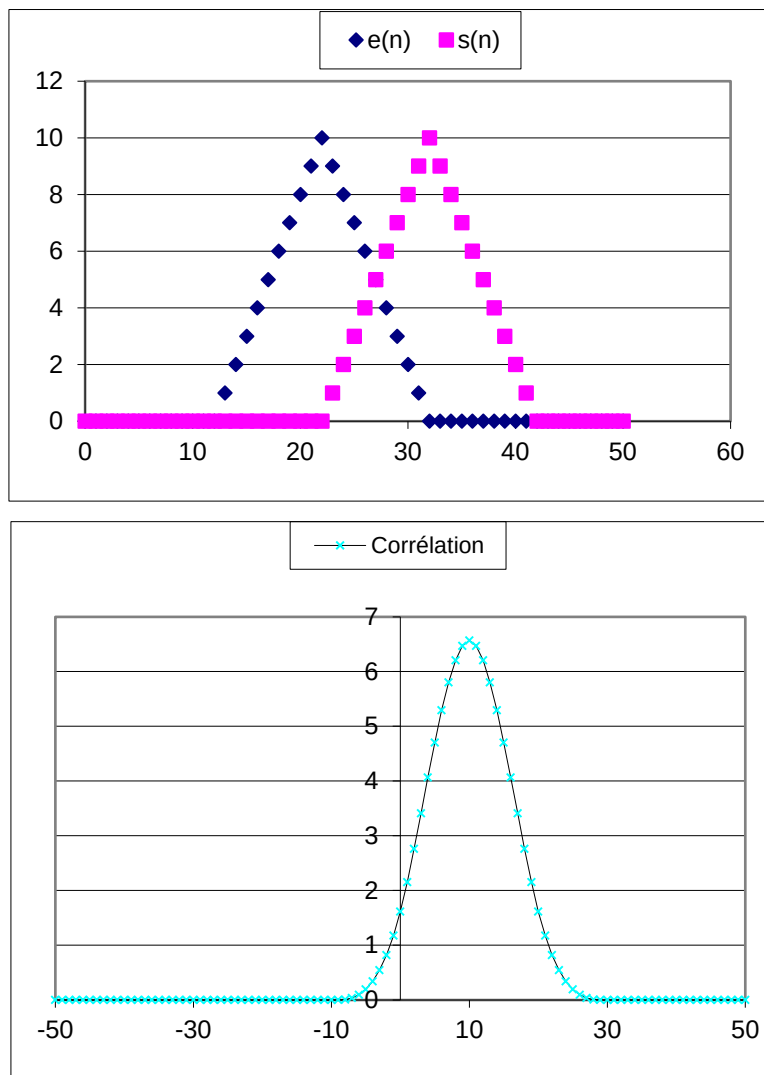
$$Ces(k\Delta t) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e(n).s(n-k)$$

où $k\Delta t$ est une représentation discrète du retard τ .

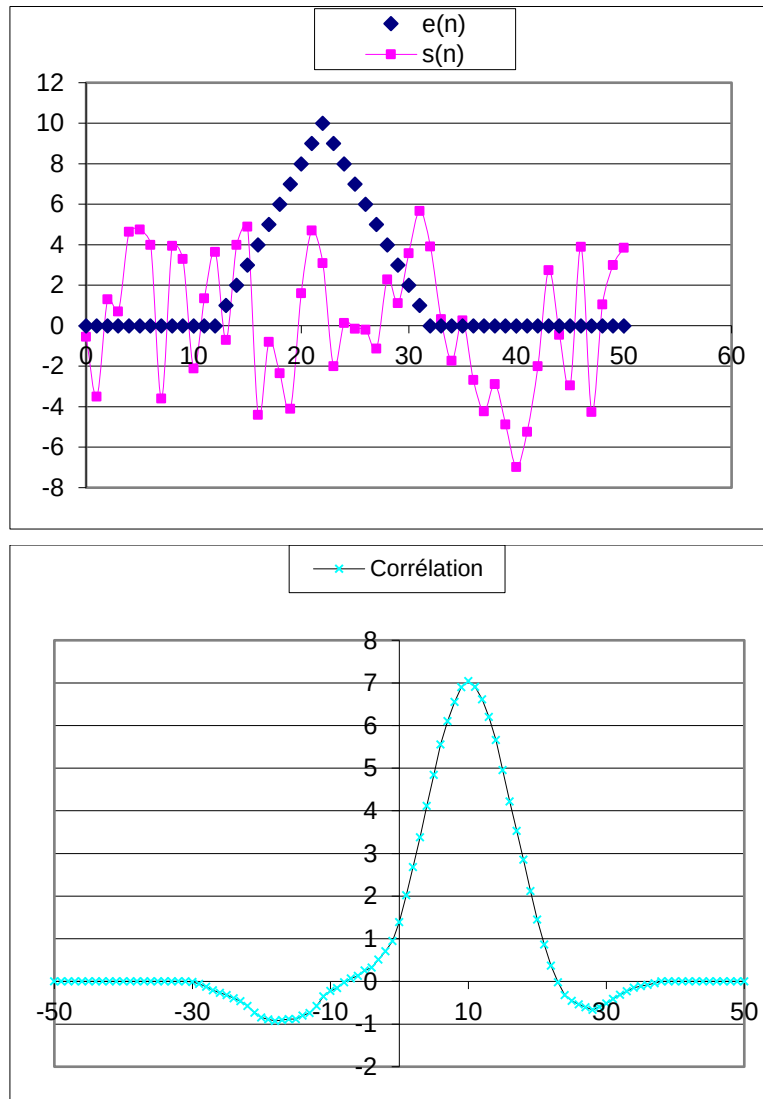
2. Exemple :

a) Signaux de forme d'onde identique :

Cas de la corrélation de signaux de forme d'onde identique mais décalée dans le temps :



b) Même chose mais avec un signal bruité :



Rem : La fonction corrélation permet de repérer par un pic une similitude entre deux signaux même bruité.

Exercices :

A. Filtre dérivateur :

Afin de s'affranchir des variations très basse fréquence du signal (artéfact de la respiration, mode commun du signal) et dans le but de favoriser la détection QRS, on utilise un filtre de transmittance : $H_1(z) = 1 + 2z^{-1} - 2z^{-3} - z^{-4}$

1. Algorithmes:

On souhaite vérifier l'action du filtre sur les composantes très basses fréquences du signal. Pour cela on applique un signal numérique $e_1(n)$ continu, tel que $e_1(n)=1$ quel que soit n . On suppose que $s_1(n)=0$ pour $n < 0$.

- Exprimer $s_1(n)$ en fonction de $e_1(n)$ et des valeurs précédentes de $e_1(n)$.
- Le filtre est-il récursif ou non récursif? Justifier.
- Compléter le tableau de valeurs de $s_1(n)$:

n	0	1	2	4	5	6	7	8	9
$s_1(n)$									

- Les résultats vous semblent-ils conformes aux attentes? Les composantes très basses fréquences (et continue) du signal sont-elles transmises par le filtre numérique ?

2. Analyse expérimentale :

La mise en œuvre du filtre dérivateur donne les résultats suivant : l'allure des signaux d'entrée et de sortie (fig. 14 ou 15) et l'allure de la transmittance du filtre (fig. 16).

- Déterminer quel est le signal correspondant à $e_1(n)$ et à $s_1(n)$. Justifier.
- Quelle est la nature du filtre ? Justifier.

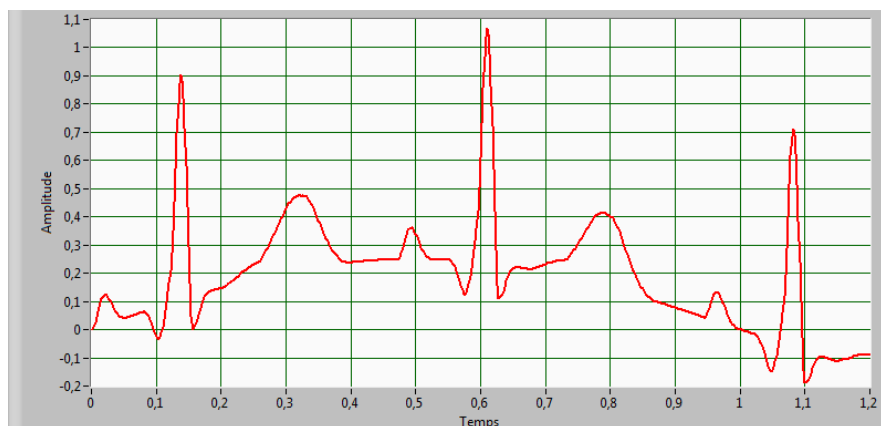


Figure 4: Signal d'entrée ou de sortie.

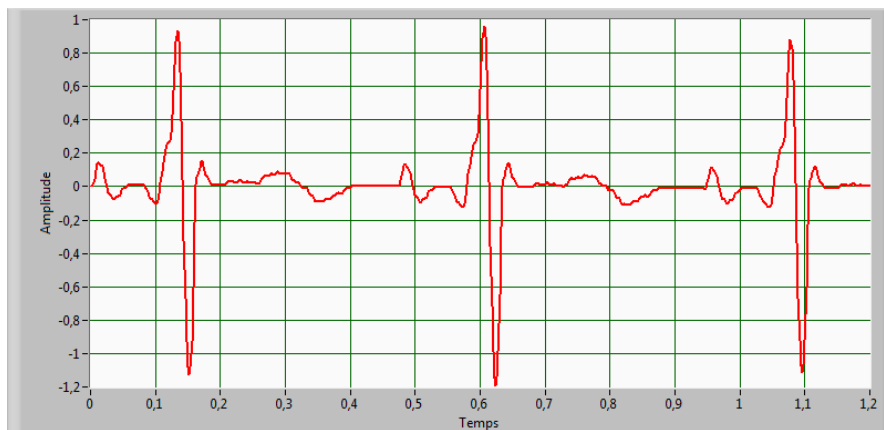


Figure 5: Signal d'entrée ou de sortie.

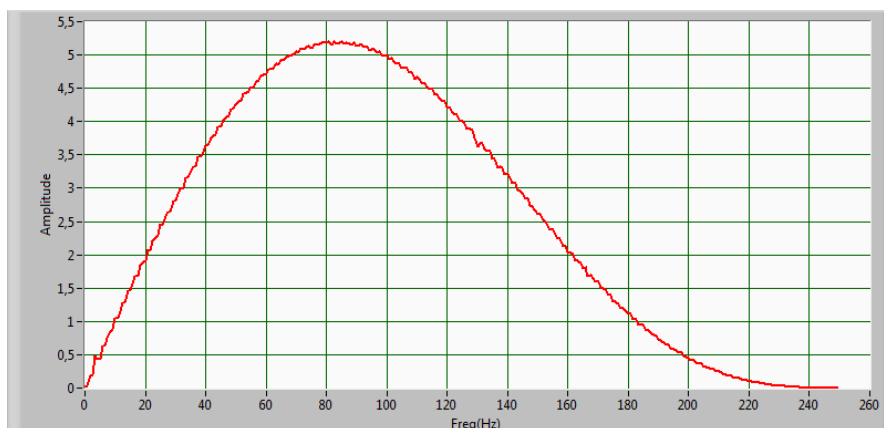


Figure 6: Transmittance.

B. Filtrage numérique en peigne :

1. Algorithmes et transmittance en z :

Le filtre ci-dessous est caractérisé par sa fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,990498 - 0,990498z^{-8}}{1 - 0,980997z^{-8}}$$

Avec, $f_e = 400\text{Hz}$.

- Déterminer la transmittance complexe : $H(j\omega)$.
- Vérifier les valeurs de la transmittance pour $f=0, 50, 100$ et 150Hz . Que remarque-t-on ?
- Déterminer l'algorithme du filtre.
- S'agit-il désormais d'un filtre récursif ou non récursif? Justifier.
- Peut-on, avec ce que l'on connaît de ce filtre, connaître la nature de ce filtre (passe-bas, passe-haut,...). Justifier.

C. Traitement :

On souhaite « nettoyer » le signal tout en gardant la composante continue. Pour cela, on procède en trois étapes avec 3 filtres présentés ci-dessous.

1. Filtrage numérique 1 - Algorithmes et transmittance en z :

Le filtre ci-dessous est caractérisé par sa fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,98963617 - 1,6012649z^{-1} + 0,98963617z^{-2}}{1 - 1,6012649z^{-1} + 0,97927235z^{-2}}$$

Avec, $f_e = 500\text{Hz}$.

- Déterminer la transmittance complexe : $\underline{H}(j\omega)$.
- Vérifier les valeurs de la transmittance^(*) pour $f=0, 50$. Que remarque-t-on ?
- Déterminer l'algorithme du filtre.
- S'agit-il désormais d'un filtre récursif ou non récursif? Justifier.
- Peut-on, avec ce que l'on connaît de ce filtre, connaître la nature de ce filtre (passe-bas, passe-haut,...). Justifier
- Vérifier que le filtre est bien stable. Expliquez votre méthode.
- Expliquez la méthode pour vérifier expérimentalement que le filtre fonctionne correctement.

2. Filtrage numérique 2 - Algorithmes et transmittance en z :

Le filtre ci-dessous est caractérisé par sa fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,97948276 - 0,60535363z^{-1} + 0,97948276z^{-2}}{1 - 0,60535363z^{-1} + 0,95896552z^{-2}}$$

Avec, $f_e = 500\text{Hz}$.

- Déterminer la transmittance complexe : $\underline{H}(j\omega)$.
- Vérifier les valeurs de la transmittance^(*) pour $f=0, 100$. Que remarque-t-on ?
- Déterminer l'algorithme du filtre.
- Peut-on, avec ce que l'on connaît de ce filtre, connaître la nature de ce filtre (passe-bas, passe-haut,...). Justifier

(*) : On donne : $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$; $z^{-n} = e^{-nj\omega T_e}$ avec $\omega = 2\pi f$

3. Filtrage numérique 3

Pour le troisième filtre, on donne l'allure temporelle et fréquentielle du signal d'entrée figure 17 et 18.

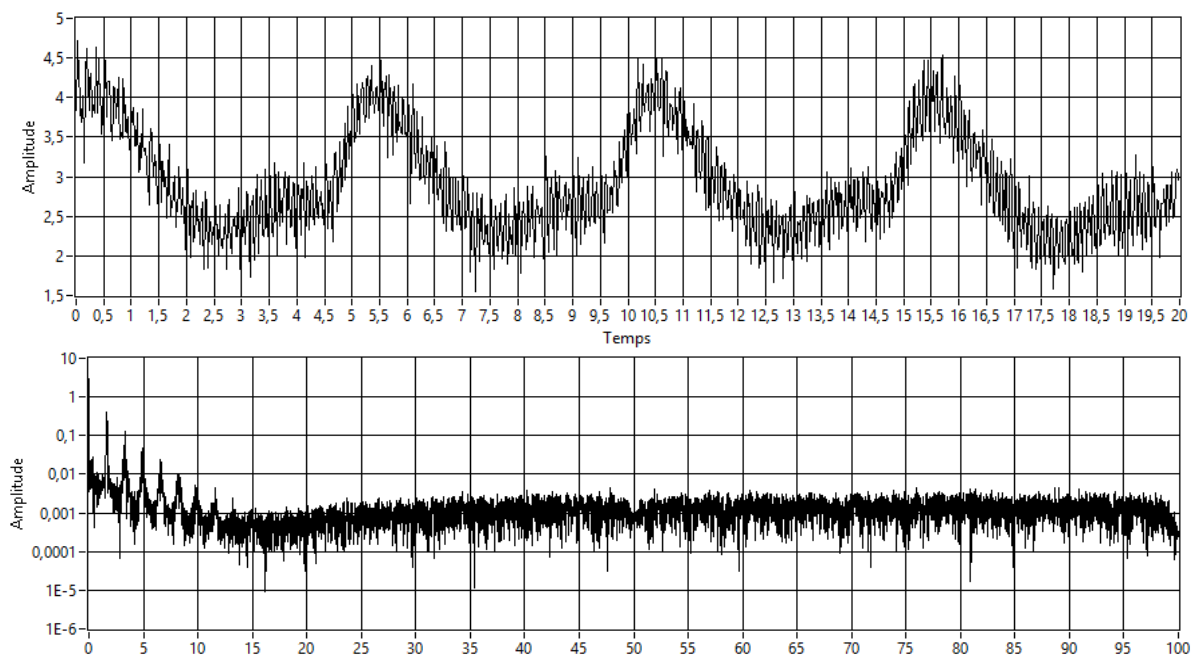


Figure 7 : l'allure temporelle et fréquentielle du signal d'entrée.

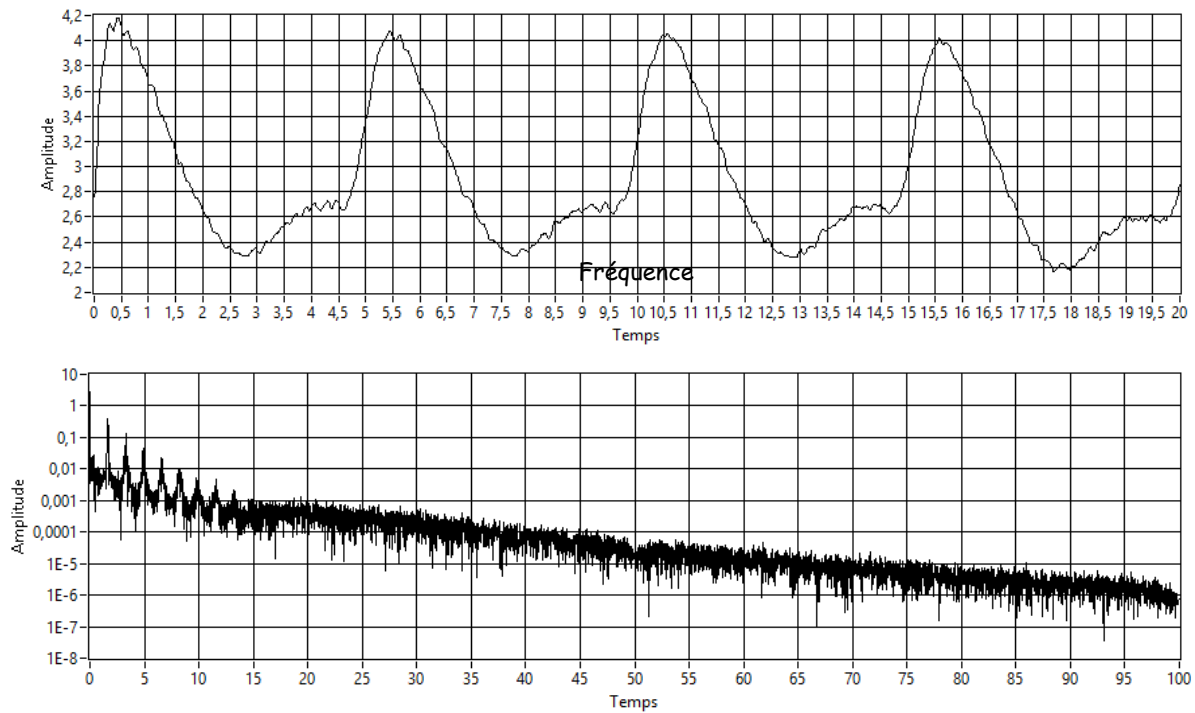


Figure 8 : l'allure temporelle et fréquentielle du signal de sortie.

1) Commenter les différents signaux et en déduire le filtre utilisé pour cette troisième étape.
Est-ce que la composante continue est préservée ?