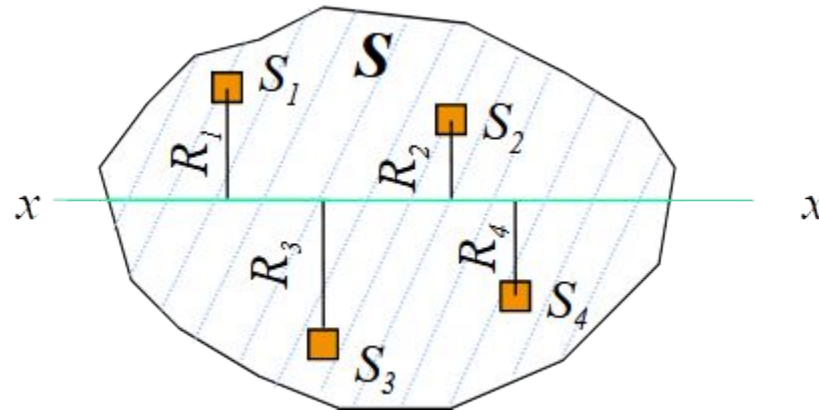


Moment d'inertie de surface

Théorème de Steiner

Le moment d'inertie I_x d'une surface S par rapport à un axe x - x est égal à la somme des produits de toutes les surface élémentaires S_n par le carré de leur distances respectives R_n à cet axe.



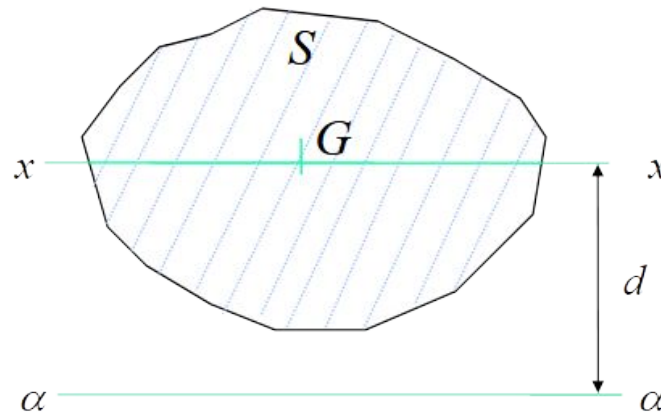
$$I_x = S_1 R_1^2 + S_2 R_2^2 + S_3 R_3^2 + S_4 R_4^2 + \dots$$

Les unités sont données en $\text{mm}^4 \Rightarrow I_x = \text{mm}^4$

Moment d'inertie de surface

Théorème de Huygens

Le moment d'inertie I_α d'une surface S par rapport à un axe, parallèle à l'axe $x-x$ passant par le centre de gravité G , est égal au moment d'inertie par rapport à cet axe $x-x$ augmenté du produit de la surface S par le carré de la distance d entre les 2 axes.

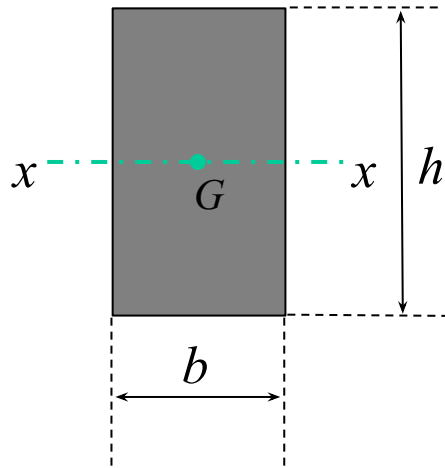


$$I_\alpha = I_x + Sd^2$$

La majorité des calculs de résistance des matériaux peut être réalisée à l'aide de fonctions simples établies pour les sections des profilés du commerce.

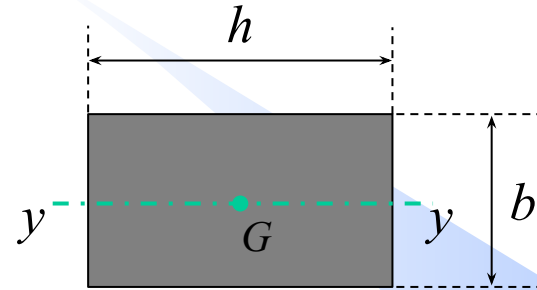
Cas d'une section rectangulaire

Considérons une section rectangulaire de largeur $b = 20$ mm et de hauteur $h = 60$ mm



$$I_x = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_x = \frac{20 \times 60^3}{12} = 360\,000 \text{ mm}^4$$



$$I_y = \frac{h b^3}{12}$$

$$I_y = \frac{60 \times 20^3}{12} = 40\,000 \text{ mm}^4$$



l'orientation du profilé impacte l'inertie de surface



Cas d'une section rectangulaire

Le **moment de résistance minima** (W_b) d'une surface S , appelé également **module d'inertie** ou **module de flexion**, est la valeur du moment d'inertie de cette surface par rapport à un axe $x-x$ passant par son centre de gravité G , divisé par la distance v de cet axe à la fibre la plus éloignée de la section étudiée (la partie qui travaille le plus).

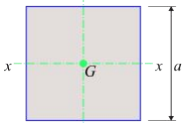
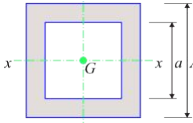
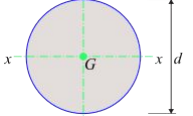
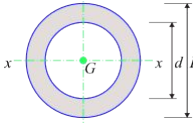
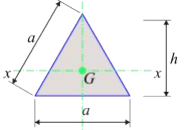
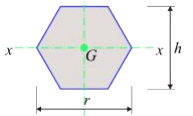
$$W_b = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}$$

$$W_b = \frac{20 \times 60^2}{6} = 12000 \text{ mm}^3$$

$$W_b = \frac{60 \times 20^2}{6} = 4000 \text{ mm}^3$$

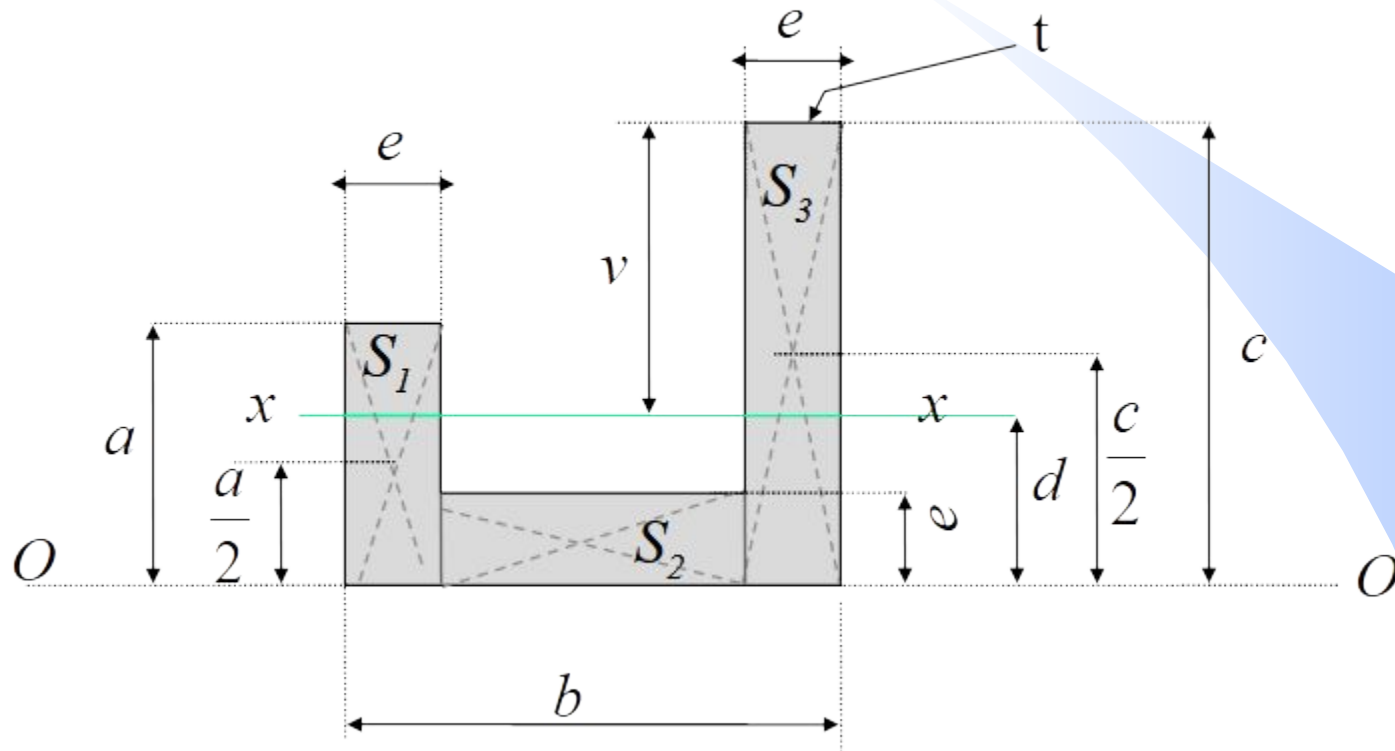
Module d'inertie I_{x-x} et Moment de résistance minima W_b sont indispensables pour calculer les résistances d'un profilé.

Section usuelles

Section	I_x/I_y	W_b	I_G (torsion)
	$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$	$W_b = \frac{a^3}{6}$	$I_G = \frac{2a^4}{12}$
	$I_x = I_y = \frac{a^4 - b^4}{12}$	$W_b = \frac{a^4 - b^4}{6a}$	$I_G = \frac{2(A^4 - a^4)}{12}$
	$I_x = \frac{b h^3}{12} \quad I_y = \frac{h b^3}{12}$	$W_{bx} = \frac{b h^2}{6} \quad W_{by} = \frac{h b^2}{6}$	$I_G = \frac{b h (b^2 + h^2)}{12}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_b = \frac{\pi d^3}{32}$	$I_G = \frac{\pi d^4}{32}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$	$W_b = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D}$	$I_G = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$
	$I_x = \frac{a h^3}{36} \quad I_y = \frac{h a^3}{48}$	$W_{bx} = \frac{3 a h^2}{72} \quad W_{by} = \frac{3 h a^2}{96}$	$I_G = \frac{a^4}{46,19}$
	$I_x = I_y = 0.06014 h^4$	$W_{bx} = 0.12028 h^3 \quad W_{by} = \frac{0.24056 h^3}{\sqrt{3}}$	$I_G = 0,1154 h^4$

Cas d'un profilé quelconque

Dans le cas d'un profilé quelconque, il suffit de découper la section en sections usuelles et d'appliquer les théorèmes.



Recherchons son moment d'inertie I_x ainsi que son moment de résistance minima W_b

I - Détermination de la distance d de l'axe $x-x$ passant par le centre de gravité de la section du profilé.

On introduit un axe de base $0-0$, choisi arbitrairement et permettant de calculer d (distance de $x-x$ à $0-0$).

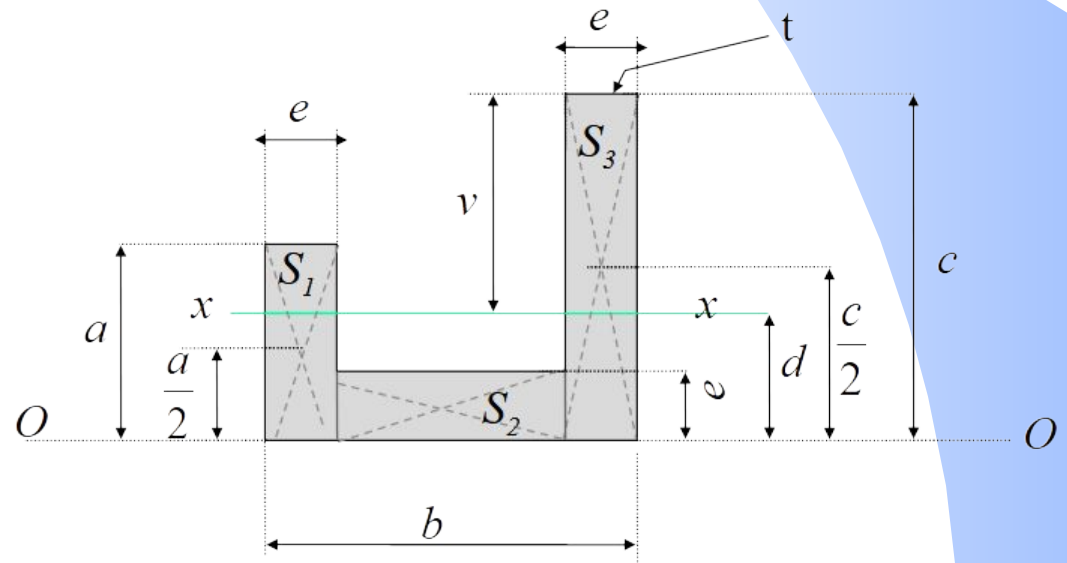
1) Calcul des surface S_1 , S_2 , S_3 et S = surface totale de la section

$$S_1 = ae$$

$$S_2 = (b-2e)e$$

$$S_3 = ce$$

$$S = S1 + S2 + S3 = ae + (b-2e)e + ce$$



2) Détermination de la distance par rapport à l'axe $O-O$ du centre de gravité (d_{S1} , d_{S2} , d_{S3}) de chaque surface (S_1 , S_2 , S_3) :

$$d_{S1} = a/2$$

$$d_{S2} = e/2$$

$$d_{S3} = c/2$$

3) Calcul des Moments de surface (M_{S1} , M_{S2} , M_{S3}) de chaque élément de surface (S_1 , S_2 , S_3) par rapport à l'axe $O-O$:

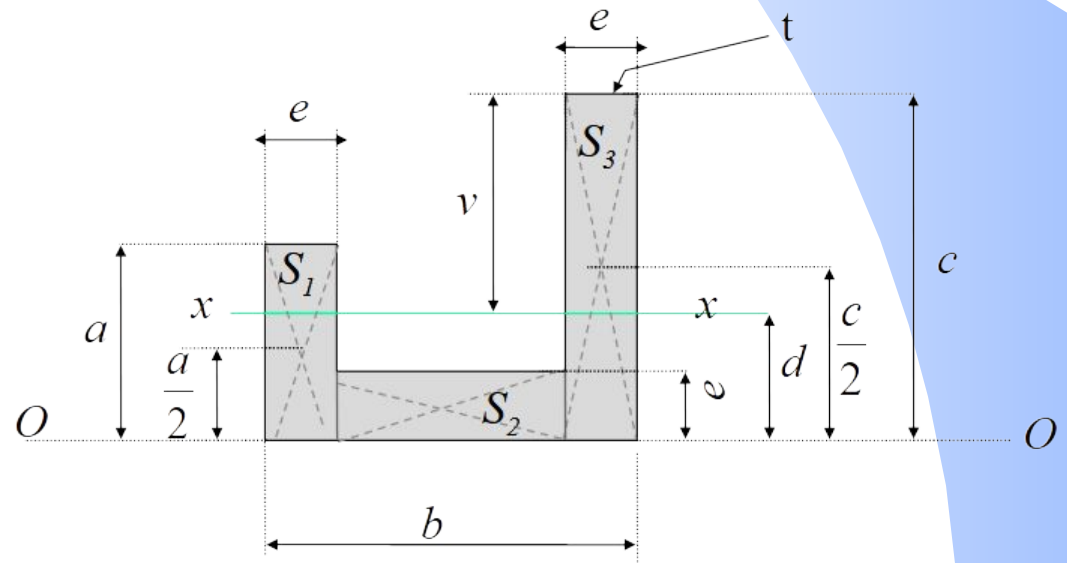
$$M_{S1} = d_{S1} S_1$$

$$M_{S2} = d_{S2} S_2$$

$$M_{S3} = d_{S3} S_3$$

4) Détermination de la position de l'axe $x-x$ passant par le centre de gravité :

$$M_S = d S \quad d = \frac{M_S}{S}$$



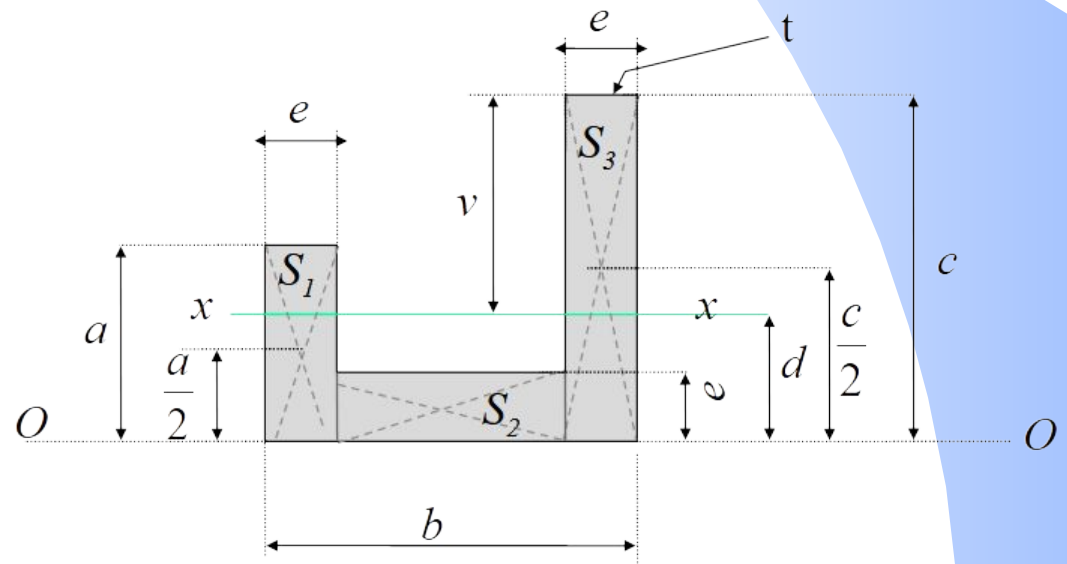
4) La moment d'inertie de la section S par rapport à l'axe $x-x$, passant par le centre de gravité, est égal à la somme de chacun des moments d'inertie des surface S_1 , S_2 et S_3 par rapport à l'axe $x-x$.

a) Considérant que l'axe $x-x$ ne passe pas par le centre de gravité de chacune de ces surfaces, il est possible d'appliquer la règle de calcul du moment d'inertie par rapport à chacun des axes de symétrie des sections S_1 , S_2 et S_3 distant d'une valeur h_1 , h_2 , h_3 de l'axe $x-x$:

$$h_{S1} = d - d_{S1}$$

$$h_{S2} = d - d_{S2}$$

$$h_{S3} = d - d_{S3}$$



b) Calcul du moment d'inertie I_{x-x} pour les différentes surfaces S_1 , S_2 et S_3 :

$$I_{x-x} \text{ pour } S_1 = I_{S1} + S_1 h_{S1}^2 = \frac{e a^3}{12} + S_1 h_{S1}^2$$

$$I_{x-x} \text{ pour } S_2 = I_{S2} + S_2 h_{S2}^2 = \frac{(b-2e) e^3}{12} + S_2 h_{S2}^2$$

$$I_{x-x} \text{ pour } S_3 = I_{S3} + S_3 h_{S3}^2 = \frac{e c^3}{12} + S_3 h_{S3}^2$$

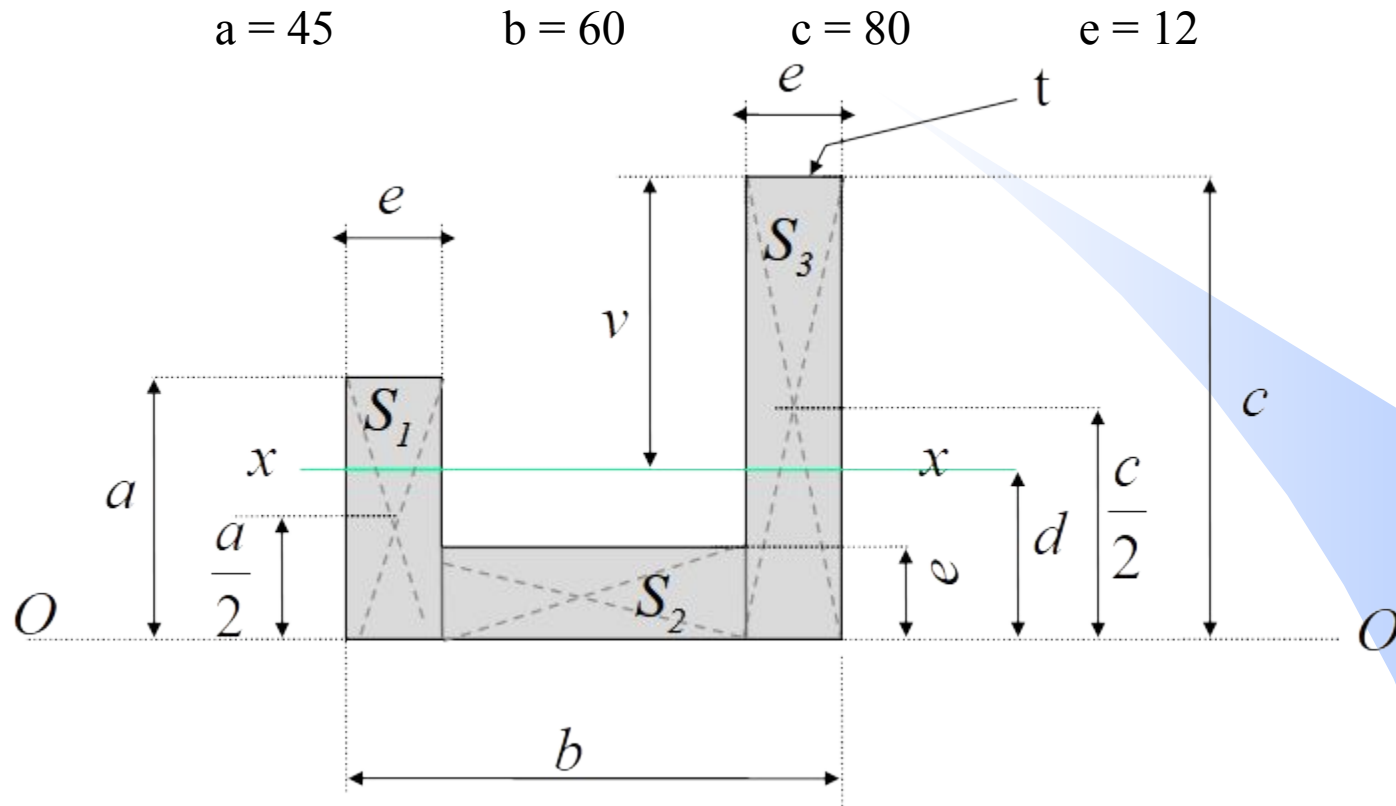
$$I_{x-x} \text{ pour } S = \left(\frac{e a}{12} + S_1 h_{S1}^2 \right) + \left(\frac{(b-2e) e^3}{12} + S_2 h_{S2}^2 \right) + \left(\frac{e c^3}{12} + S_3 h_{S3}^2 \right)$$

La fibre ou la ligne la plus éloignée de l'axe $x-x$ est repérée par la lettre t distante de $\nu = c - d$

permettant de déterminer le moment de résistance minima : $W_b = \frac{I_{x-x}}{\nu}$

$$W_b = \frac{\left(\frac{e a}{12} + S_1 h_{S1}^2 \right) + \left(\frac{(b-2e) e^3}{12} + S_2 h_{S2}^2 \right) + \left(\frac{e c^3}{12} + S_3 h_{S3}^2 \right)}{\nu}$$

Application numérique



I - Calcul des surfaces

$$S_1 = ae = 45 \cdot 12 = 540 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = (b - 2e)e = (60 - 2 \cdot 12) \cdot 12 = 423 \text{ mm}^2$$

$$S_3 = ce = 80 \cdot 12 = 960 \text{ mm}^2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = ae + (b - 2e)e + ce = 540 + 423 + 960 = 1932 \text{ mm}^2$$

II- Calcul des moments MS_x de la surface S par rapport à $O-O$

1) Distance par rapport à $O-O$:

$$d_{S1} = a/2 = 45/2 = 22.5 \text{ mm} \quad d_{S2} = e/2 = 12/2 = 6 \text{ mm} \quad d_{S3} = c/2 = 80/2 = 40 \text{ mm}$$

2) Distance par rapport à $O-O$:

$$\begin{aligned} M_{S1} &= d_{S1} S_1 \\ &= 22.5 * 540 \\ &= 12150 \text{ mm}^3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} M_{S2} &= d_{S2} S_2 \\ &= 6 * 432 \\ &= 2592 \text{ mm}^3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} M_{S3} &= d_{S3} S_3 \\ &= 40 * 960 \\ &= 38400 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Somme des moments :

$$M_S = M_{S1} + M_{S2} + M_{S3} = 12150 + 2592 + 38400 = 53142 \text{ mm}^3$$

3) Position de l'axe $x-x$ passant par le centre de gravité de la section profilé :

$$M_S = d S \quad d = \frac{M_S}{S} = \frac{53142}{1932} = 27.51 \text{ mm}$$

III- Détermination du moment d'inertie de la section par rapport à l'axe x-x

$$\begin{aligned} h_{S1} &= d - d_{S1} = 27.51 - 22.5 \\ &= 5.01 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{S2} &= d - d_{S2} = 27.51 - 6 \\ &= 21.51 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{S3} &= d - d_{S3} = 27.51 - 40 \\ &= -12.49 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x S1} &= I_{S1} + S_1 h_{S1}^2 = \frac{e a^3}{12} + S_1 h_{S1}^2 \\ &= \frac{12 \times 45^3}{12} + 540 \times 5.01^2 = 104679 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x S2} &= I_{S2} + S_2 h_{S2}^2 = \frac{(b - 2e) e^3}{12} + S_2 h_{S2}^2 \\ &= \frac{(60 - 2 \times 12) \times 12^3}{12} + 432 \times 21.51^2 = 205062 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x S3} &= I_{S3} + S_3 h_{S3}^2 = \frac{e c^3}{12} + S_3 h_{S3}^2 \\ &= \frac{12 \times 80^3}{12} + 960 \times (-12.49^2) = 661760 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

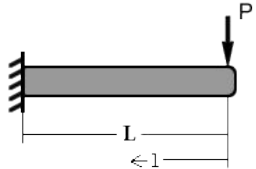
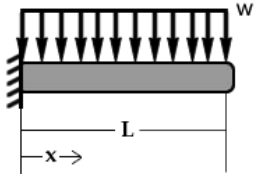
$$I_{x S} = I_{xS1} + I_{xS2} + I_{xS3} = 104679 + 205062 + 661760 = 971501 \text{ mm}^4$$

IV- Détermination du moment de résistance minima

$$\nu = c - d = 80 - 27,51 = 52.49 \text{ mm}$$

$$W_b = \frac{I_{x-x}}{\nu} = \frac{971501}{52.49} = 18508 \text{ mm}^3$$

V- Application à une poutre encastree

Sollicitation	Réaction d'appui	Flèche	Rotation	Équation de la déformée
	$R_A = P$ $M_A = PL$	$f = \frac{PL^3}{3EI}$	$\phi = \frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$R_A = wL$ $M_A = \frac{wL^2}{2}$	$f = \frac{PL^3}{8EI}$	$\phi = \frac{wL^3}{6EI}$	$y = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$

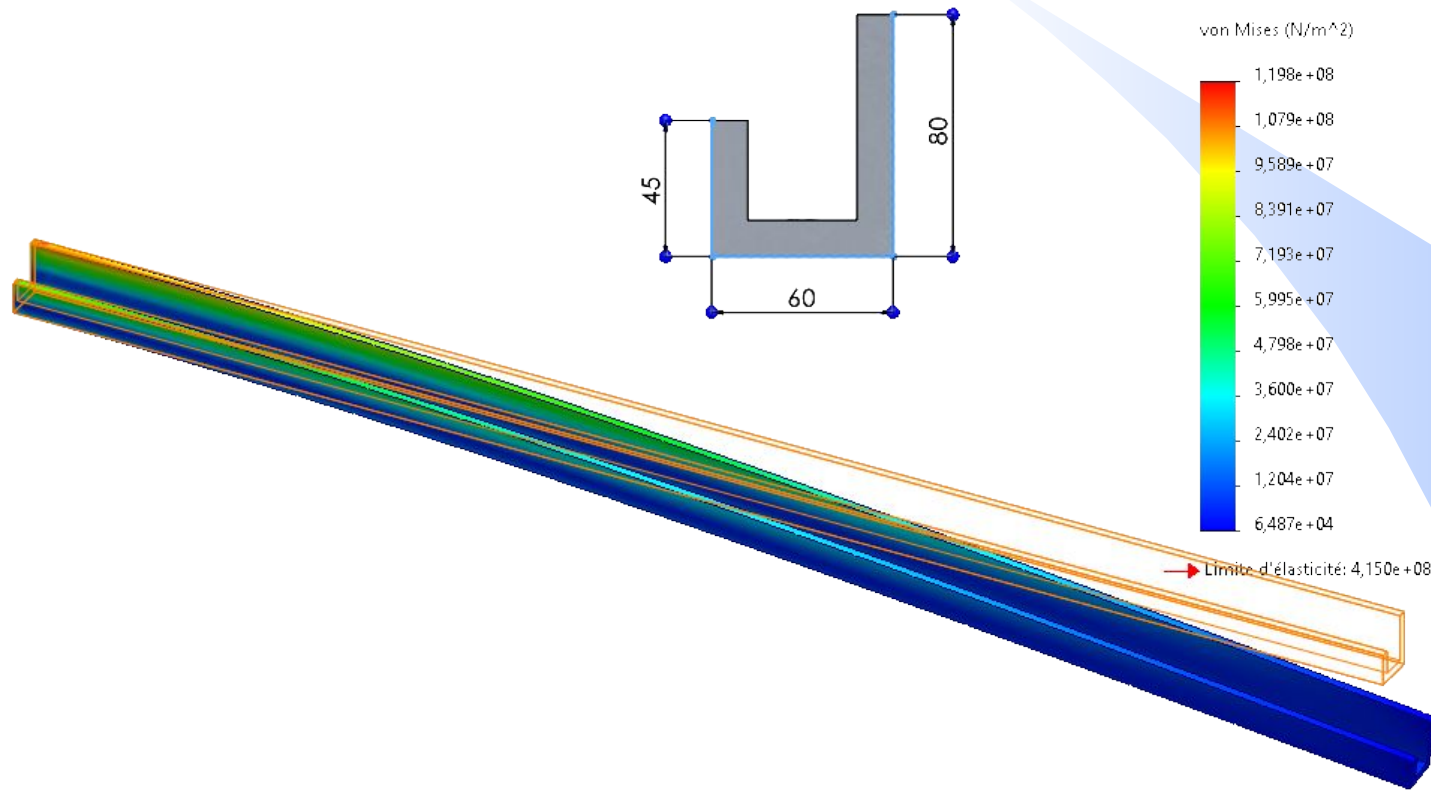
w représente une répartition uniforme du poids total w sur toute la longueur de la poutre

Dès lors que L est conséquent, ce qui le cas usuel, l'**Effort tranchant** R_A (*cisaillement*) est négligeable comparativement au **Moment fléchissant** M_A , nous pourrions donc nous limiter à l'évaluation suivante :

$$\sigma = \frac{M_A}{W_b} > s R_e$$

En considérant une poutre encastrée de longueur $L = 2\text{m}$ et une charge appliquée de 1000 N placée à l'extrémité, la contrainte maximale exercée est :

$$\sigma = \frac{M_A}{W_b} = \frac{1000 \times 2000}{18508} = 108,06 \text{ Nmm}^2$$



Dans le cas d'un aluminium 2014-T6 la résistance élastique R_e est de 415 MPa , permettant de disposer d'un facteur de sécurité de ~ 3.5