

I. LE PRODUIT DE CONVOLUTION ET SES APPLICATIONS :

A. Principe :

1. Définition:

Soit un signal $e(t)$ appliqué à l'entrée d'un système linéaire et $s(t)$ la réponse. On définit ci-dessous l'allure d'une impulsion Dirac $\delta(t)$ de durée T et d'amplitude $1/T$.

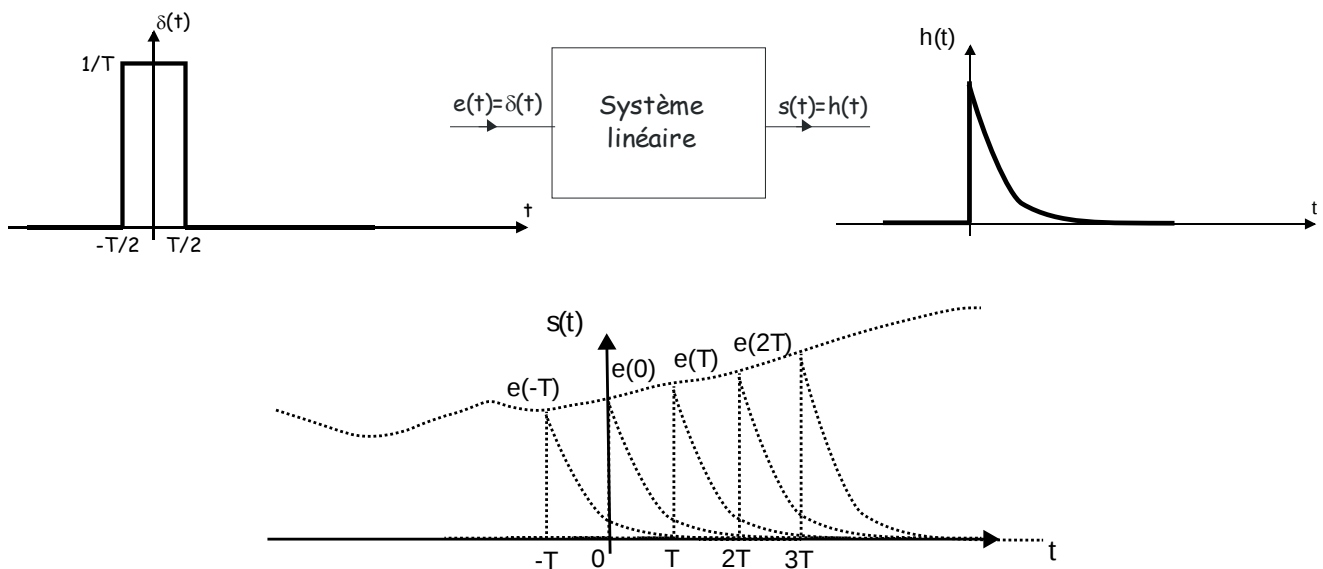
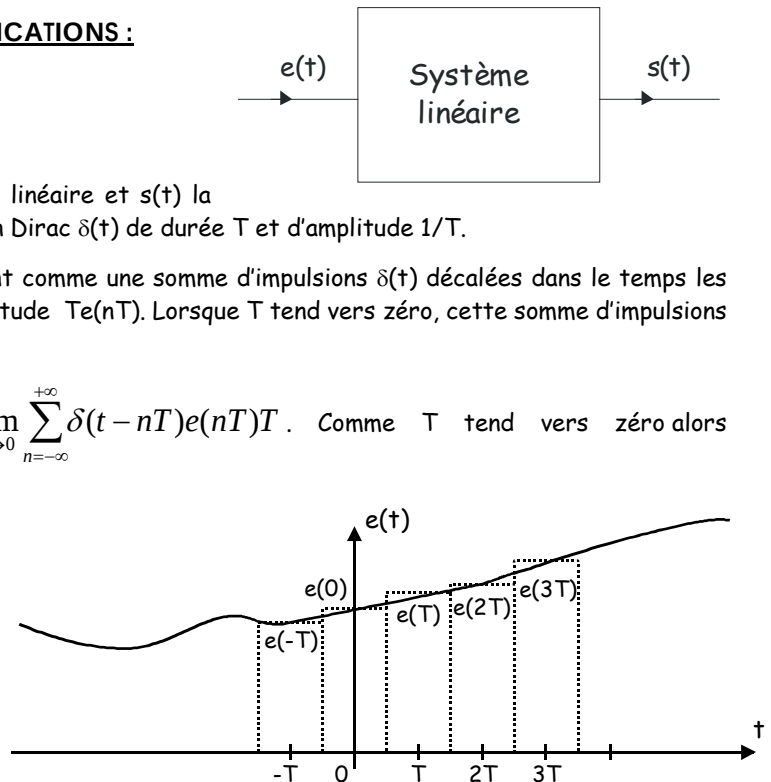
Le signal $e(t)$ peut être considéré approximativement comme une somme d'impulsions $\delta(t)$ décalées dans le temps les unes par rapport aux autres, d'une durée T et d'amplitude $Te(nT)$. Lorsque T tend vers zéro, cette somme d'impulsions pondérées sera équivalente au signal $e(t)$.

Il en découle l'expression de $e(t)$: $e(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e(nT) T$. Comme T tend vers zéro alors

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - u) e(u) du.$$

De même si $h(t)$ est la réponse du système linéaire à une impulsion $\delta(t)$ Dirac, alors la sortie devient

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(t - nT) e(nT) T.$$



Ce qui donne pour les mêmes raisons : $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - u) e(u) du$. Cette expression permet donc, connaissant la réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'entrée $e(t)$, de déterminer $s(t)$.

Elle s'appelle « produit de convolution » de $h(t)$ par $e(t)$. On la note pour simplifier $s(t) = [h * e](t)$ ou $s(t) = h * e$.

Comme le signal d'entrée est causal, et en prenant comme origine des temps le moment où le signal apparaît (par défaut $t=0$), le produit de

convolution s'écrit : $s(t) = \int_0^t h(t-u)e(u)du$.

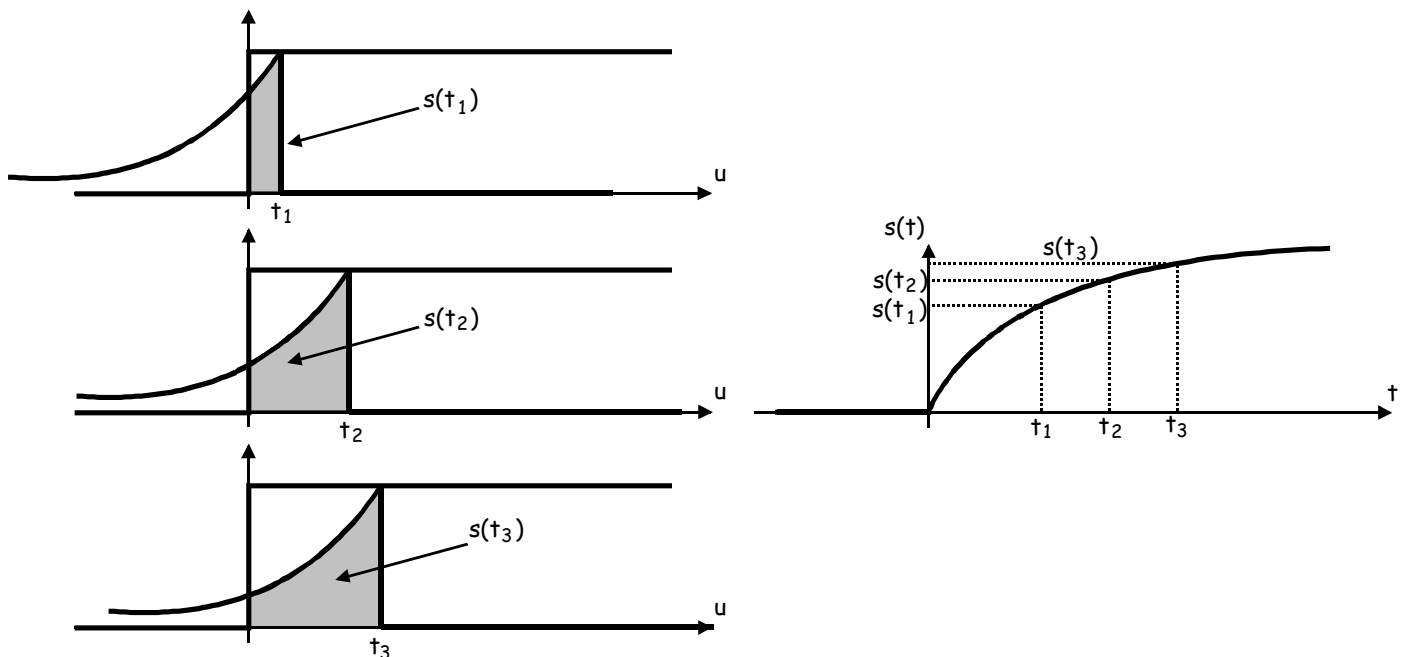
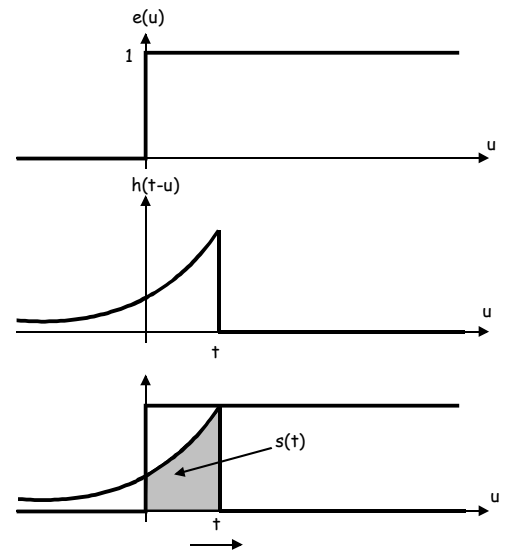
2. Représentation et significations physiques:

Le produit de convolution de $h(t)$ par $e(t)$ représente l'aire entre 0 et t du produit $h(t-u)e(u)$.

Dans l'exemple ci-dessous, on considère la réponse $s(t)$ à un échelon unitaire. La représentation de l'aire est alors plus compréhensible et correspond à $s(t)$ lorsque l'on décale t vers la droite.

Pour représenter $s(t)$ il faut donc pour chaque valeur de t calculer l'aire du produit $h(t-u)e(u)$.

On peut remarquer que pour obtenir $s(t)$ à un instant t , on a besoin de connaître la réponse impulsionnelle $h(t)$, mais aussi toutes les valeurs passées de l'entrée $e(t)$.



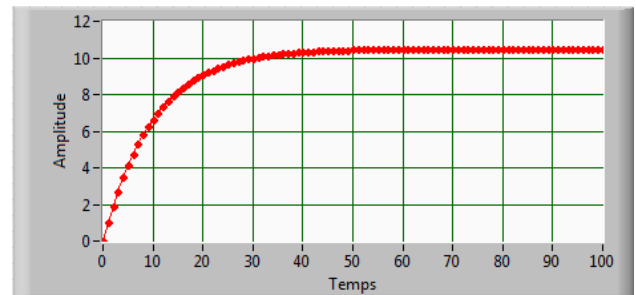
3. Application aux systèmes discrets :

Pour calculer $s(t)$, il faut connaître $e(t)$ et $h(t)$. Comme on travaille avec des signaux échantillonnés les signaux précédents deviennent $s(nT_e)$, $e(nT_e)$ et $h(nT_e)$ ou encore $s(n)$, $e(n)$ et $h(n)$. Le produit de convolution devient alors :

$$s(nT_e) = \sum_{i=0}^n h(nT_e - iT_e)e(iT_e)T_e.$$

4. Exercice :

La réponse à une impulsion Dirac d'un circuit R-C est $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$. On peut calculer la réponse $s(t)$ du circuit pour le cas où $e(t)$ est un échelon unité avec : $s(t) = e(t) * h(t)$. Le graphe ci-dessous permet de comparer la réponse théorique et celle obtenue à partir du produit de convolution. Vérifier par le calcul que la forme d'onde ci-dessous est juste.



B. Cas d'un signal échantillonné-bloqué :

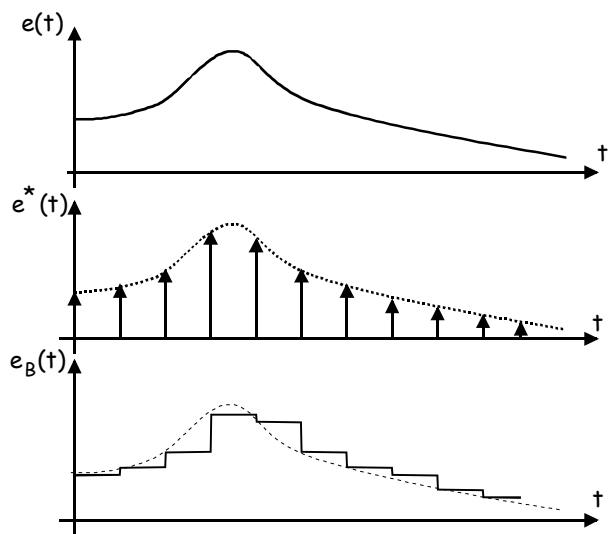
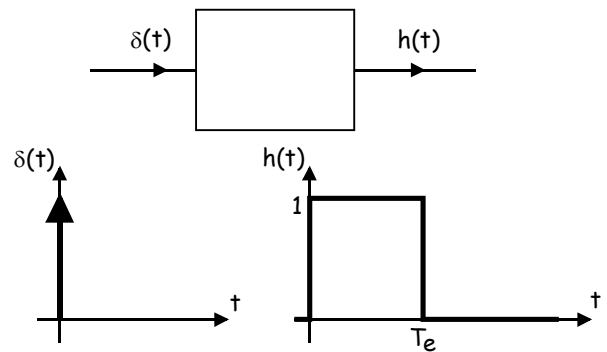
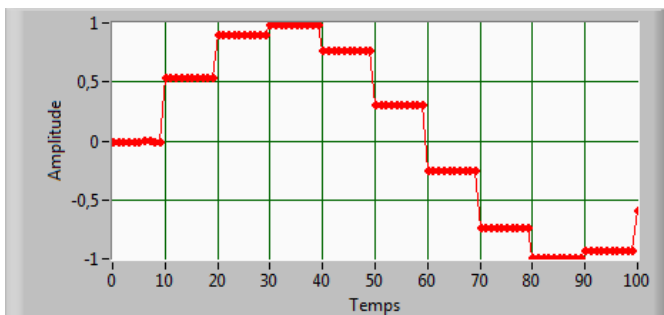
1. Principe :

Le signal produit par un système numérique est constitué de marches d'escalier de durée constante T_e reproduisant approximativement la forme du signal.

Cette fonction est équivalente à un échantillonnage idéal (multiplication par un peigne de Dirac fictif) et le filtrage par un bloqueur. Chaque impulsion Dirac présente en entrée génère en sortie une impulsion de durée T_e et d'amplitude unitaire.

2. Réalisation :

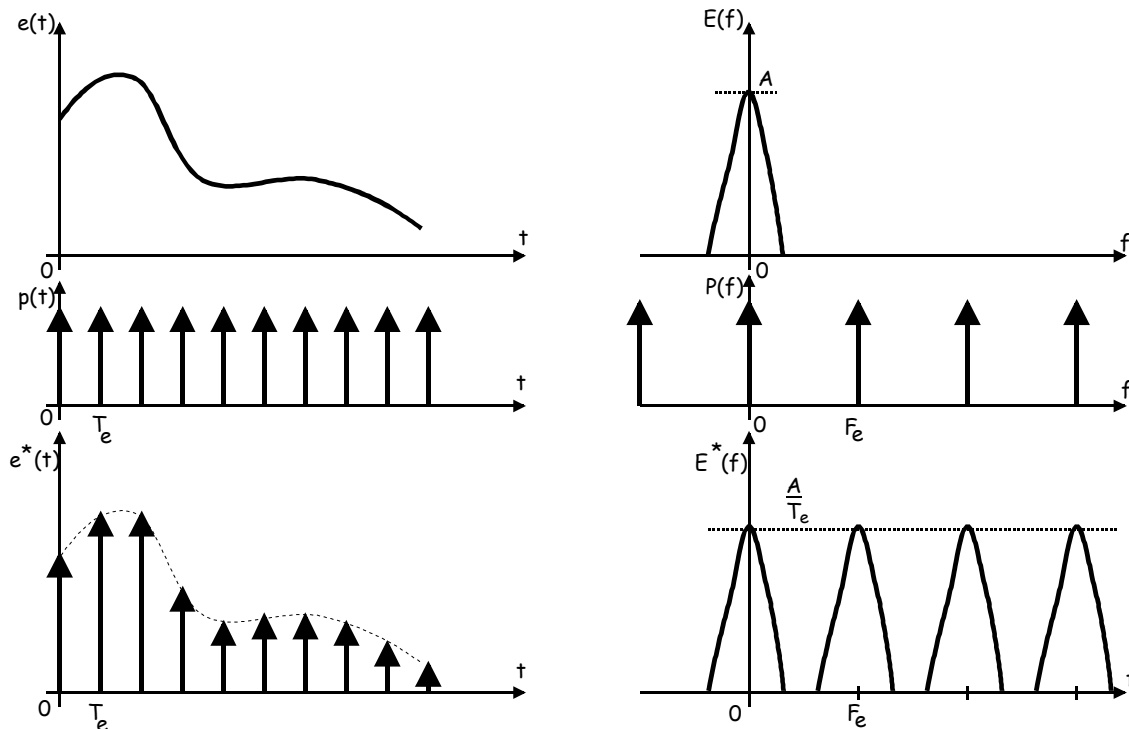
Chaque échantillon correspond à $e^*(t) = e(t) \times \delta(t - nT_e)$. Il faut donc diviser par T_e le produit de convolution pour tenir compte de la multiplication par une impulsion Dirac.



C. Spectre d'un signal échantillonné :

1. Principe :

On s'intéresse au spectre d'un signal échantillonné $e^*(t)$. La multiplication temporelle du signal $e(t)$ par un peigne Dirac, correspond dans le domaine fréquentiel à la convolution de la transformée $E(f)$ de $e(t)$ par le spectre du peigne de Dirac. Ce qui s'écrit $e^*(t) \Leftrightarrow E(f) * P(f)$.



2. Réalisation :

On peut reprendre ainsi toute les applications « temps-fréquence » du produit de convolution.

II. LES SIGNAUX DETERMINISTES:

Un signal est dit « déterministe » s'il est reproductible de manière identique à chaque fois qu'il est généré, autrement dit lorsque sa valeur peut être connue précisément à chaque instant.

Les signaux déterministes sont répartis en plusieurs sous-classes notamment selon leur durée finie ou infinie, et leur stationnarité.

Dans le cas des signaux déterministes à temps continu, une classification est faite autour des notions d'énergie et de puissance. Pour simplifier, nous dirons que les signaux d'énergie finie servent à modéliser les signaux de durée finie et les signaux de puissance finie les signaux de durée infinie.

A. Stationnarité :

Pour les signaux déterministes, une définition simple consiste à dire que les signaux stationnaires sont ceux qui possèdent un contenu fréquentiel identique dans le temps.

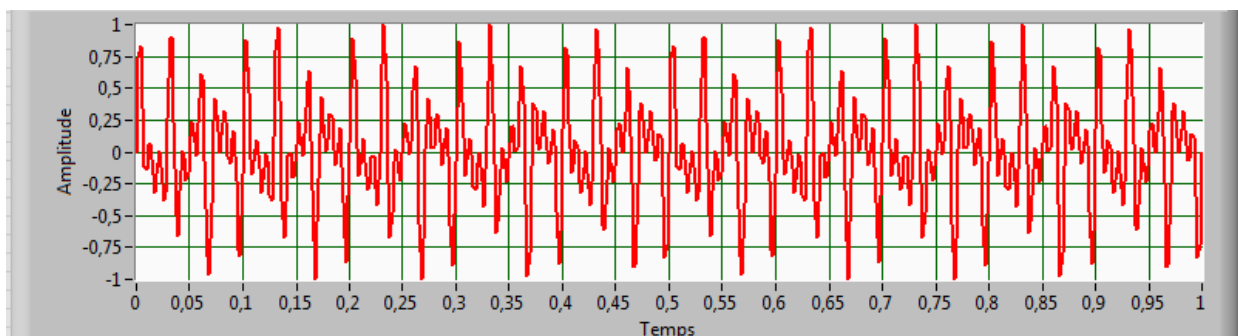


Figure 1: Signal stationnaire

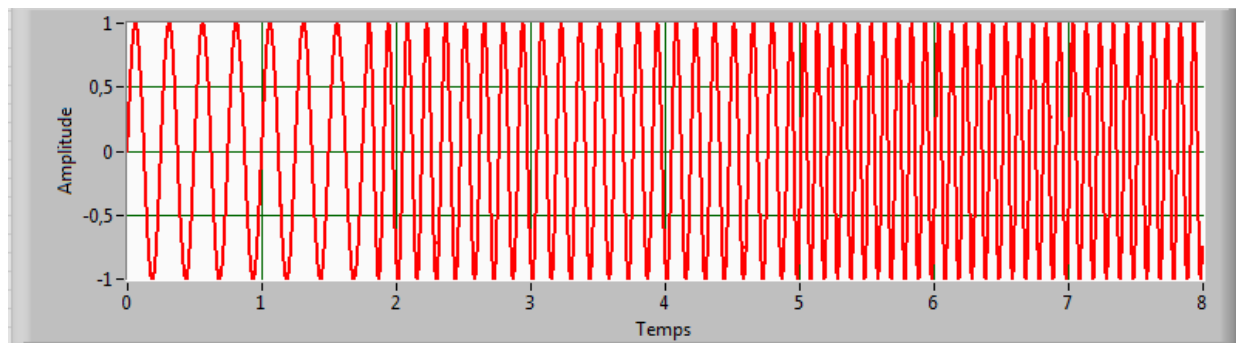


Figure 2: Signal non stationnaire

B. Energie et Puissance :

1. Cas des signaux à temps continu :

L'énergie d'un signal $s(t)$, fonction du temps t , est la quantité E définie par :

$$E = \int |s(t)|^2 dt \quad (1)$$

La puissance d'un signal $s(t)$, fonction de t , est la quantité P définie par :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |s(t)|^2 dt \quad (2)$$

Rem :

- Si $s(t)$ est tel que $0 < E < +\infty$, on dit que le signal est d'énergie finie et sa puissance $P = 0$.
- Si $s(t)$ est tel que $0 < P < +\infty$, on dit que le signal est de puissance finie et son énergie est infinie.

Exp :

2. Cas des signaux à temps discret :

Un signal déterministe à temps discret est une suite de valeurs issue de l'échantillonnage du signal à temps continu $s(t)$ (à spectre limité à $-f_e/2$ et $+f_e/2$). Dans ce cas le signal $s(t)$ devient $s(nT_e)$ et pour simplifier $s(n)$ ou $s^*(t)$.

L'énergie E du signal $s(n)$ devient alors : $E = \sum_n |s(n)|^2 \quad (3)$

La puissance est alors : $P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |s(n)|^2 \quad (4)$

Rem : comme pour les signaux à temps continu, on retrouve les mêmes propriétés :

-
- Si le signal est d'énergie finie et sa puissance $P = 0$.
- Si le signal est de puissance finie et son énergie est infinie.

Quelques exemples de signaux déterministes à temps discret :

- ✓ signal impulsion unité, d'énergie finie 1, défini par : $\delta(n) = 1$ si $n = 0$ sinon $\delta(n) = 0$.
- ✓ signal échelon unité défini par $u(n) = 1$ pour $n > 0$.

III. LES SIGNAUX ALEATOIRES :

Jusqu'à présent, nous n'avons rencontré que des signaux déterministes $\{s(n)\}$, c'est-à-dire des fonctions telles que, à chaque instant n , on dispose d'une règle permettant d'évaluer la quantité $s(n)$. Cette règle peut être spécifiée, par une expression mathématique, ou une équation. Les fonctions déterministes forment la base de l'analyse mathématique, mais beaucoup de phénomènes ne sont pas de cette nature.

A. Probabilité appliquée au traitement du signal:

La bonne caractérisation des signaux aléatoires à un instant t nécessite des connaissances en théorie de la probabilité.

Le signal est modélisé par ses caractéristiques statistiques.

1. Probabilité d'événement :

Soit x_i un ensemble d'événements inclus dans ω , la probabilité d'événement de valeur x_i est donné par la relation suivante :

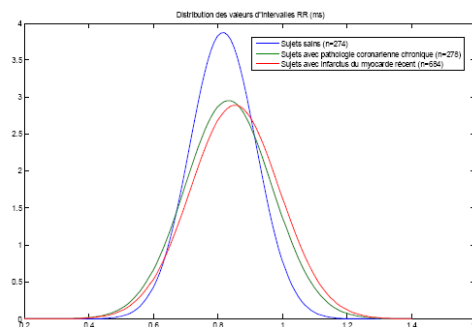
$$p(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x_i)}{n}. \text{ Avec } n \text{ le nombre d'expériences réalisées et } n(x_i) \text{ le nombre où } x_i \text{ s'est réalisé.}$$

Rem : $0 < p(x_i) < 1$.

2. Signal aléatoire et variable aléatoire:

Le signal est considéré comme un ensemble de n tirages (ou réalisations, expériences) c'est-à-dire une suite de variables aléatoires (v.a.) $s(t_i) = x_i$ issues d'une épreuve aléatoire et pouvant être caractérisée par sa loi de probabilité.

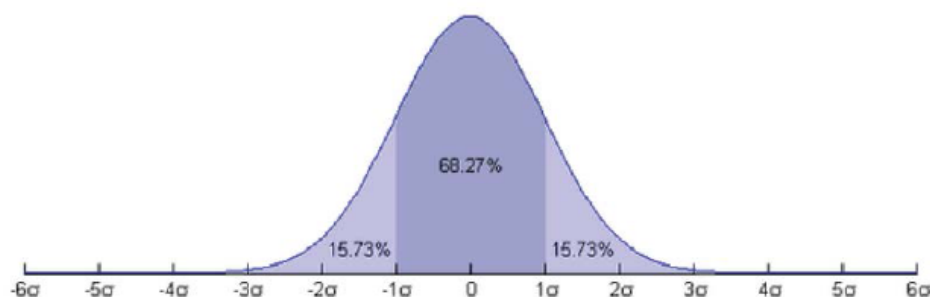
Le nombre (réel) x_i est déterminé par le résultat d'une expérience aléatoire.



3. Moments d'ordre 1 :

La description simplifiée des signaux aléatoires est réalisée par des éléments statistique (moments) d'ordre 1 comme :

- La moyenne statistique ou espérance mathématique : $m_s(t) = E[s(t)] = \sum_{i=0}^n x_i p[s(t) = x_i]$
- La moyenne centrée : $m_{sc}(t) = E[s(t) - m_s(t)]$
- La densité de probabilité : $\exp ddp(x) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_s)^2}{2\sigma_s^2}}$ (distribution normal)
- La fonction de répartition : $F(x) = \int_{-\infty}^x ddp(u) du$



4. Moments d'ordre 2:

La description des signaux aléatoires est réalisée par des éléments statistique (moments) d'ordre 2 comme :

- La variance (moment centré d'ordre 2) : $Var_s(t) = E[(s(t) - m_s(t))^2]$
- Puissance (ou énergie moyenne) : $E[s(t)^2] = \sum_{i=0}^n x_i^2 p[s(t) = x_i]$
- Covariance : $CoVar_s(t_1, t_2) = E[(s(t_1) - m_s(t_1)) \cdot (s(t_2) - m_s(t_2))]$ Cela correspond à la moyenne centrée du produit de deux échantillons du signal pris à des instants différents t_1 et t_2 .

Rem : $CoVar_s(t_1, t_1) = Var_s(t_1)$

5. Densité Spectrale de Puissance :

Un signal aléatoire ne possède pas de transformée de Fourier. Cependant, on peut lui associer une notion de densité spectrale de puissance $dsp_s(f)$ définie comme: $dsp_s(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[S_T(f)^2]$.

6. Définitions :

Un processus stochastique correspond à un phénomène dont le déterminisme n'est pas absolu et peut être étudié par la statistique (opposé à déterministe).

La description de signaux déterministes ne permet pas de modéliser les signaux réels (en particulier physiques ou physiologiques). En effet, il n'est pas possible de connaître avec certitude la valeur du signal à chaque instant ; on parle alors de **signal aléatoire** pour lequel il est alors possible de définir des propriétés statistiques.

a) Bruit blanc :

Un **bruit blanc** est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences. Il est d'énergie infinie et donc de puissance finie.

Par analogie avec la lumière blanche qui contient toutes les fréquences lumineuses avec la même intensité, le bruit blanc possède la même densité spectrale de puissance à toutes les fréquences.

b) Bruit coloré :

Par opposition au bruit blanc, un bruit coloré (rose par exemple) aura un spectre fini et sera d'énergie finie.

B. **AutoCorrélation:**

1. Principe :

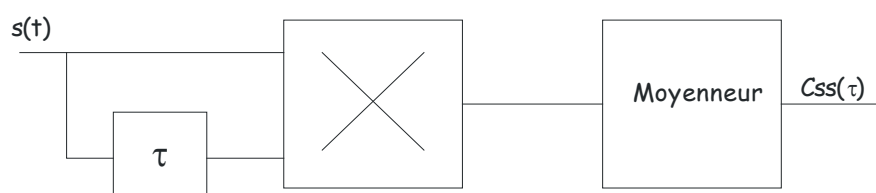
On définit la fonction d'autocorrélation d'un signal $s(t)$ par la relation : $Css(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau)dt$. Ce résultat peut

se modéliser physiquement par la valeur moyenne du produit $s(t) \cdot s(t-\tau)$ comme le montre la figure ci-dessus.

On remarquera que pour $\tau=0$, $Css(0)=S^2$ avec S valeur efficace de $s(t)$.

La relation précédente $Css(\tau)$ devient dans le cas d'une séquence d'échantillons $\{s(n)\}$ de nombre limité:

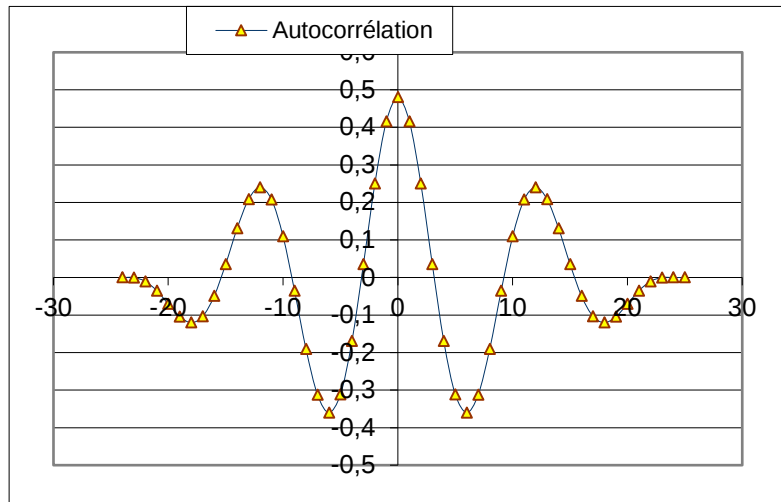
$$Css(k\Delta t) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} s(n) \cdot s(n-k) \quad \text{où } k\Delta t \text{ est une représentation discrète du retard } \tau.$$



2. Exemple :

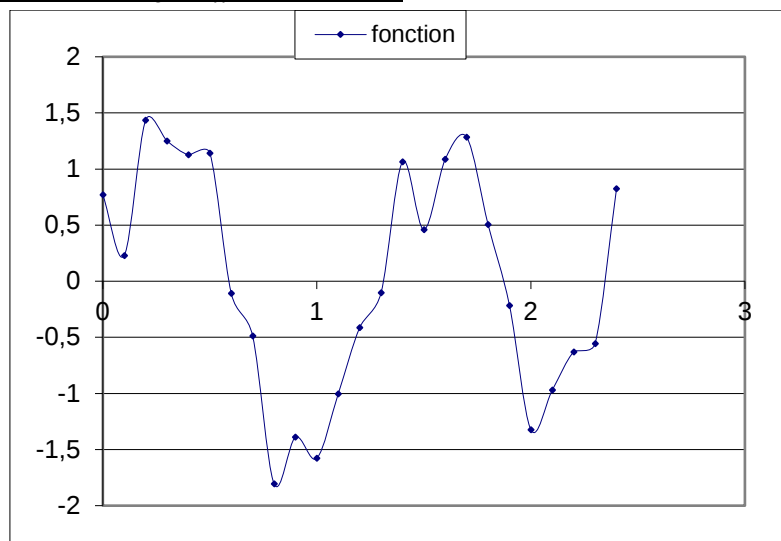
On considère une séquence $\{s(n)\}$ de M échantillons.

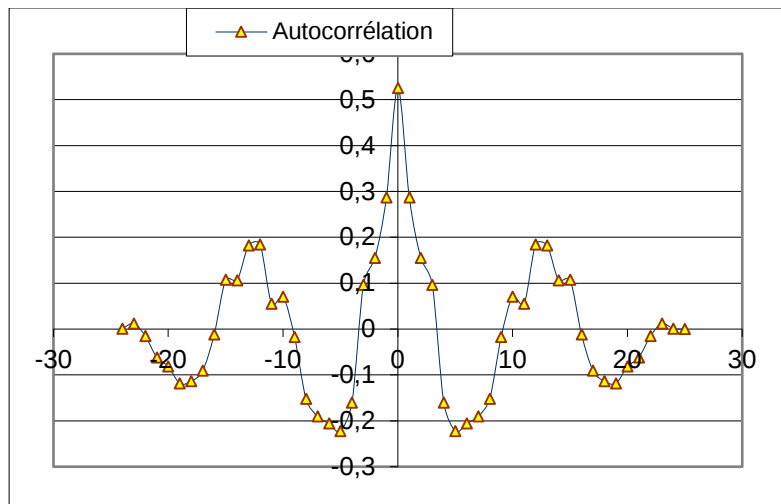
a) Autocorrélation d'un signal $s(t)$ sinusoïdal :



Rem : On observe bien un pic de corrélation pour $\tau=0$ correspondant à la valeur efficace au carré de $\{s(n)\}$. L'amplitude de la sinusoïde est fixée à 1.

b) Autocorrélation d'un signal $s(t)$ sinusoïdal bruité :





Rem : La fonction autocorrélation permet par exemple de signaler la présence de $\{s(n)\}$ même si le bruit est important.

C. CORRELATION :

1. Principe :

La **corrélation croisée** est parfois utilisée en statistique pour désigner la covariance.

La fonction d'inter-corrélation ou corrélation d'un signal $e(t)$ avec un signal $s(t)$ est donnée par la relation :-

$$Ces(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t)s(t-\tau)dt.$$

Ce résultat peut se modéliser physiquement par la valeur moyenne du produit $e(t)s(t-\tau)$

comme le montre la figure ci-contre. La réalisation de cette opération permet de détecter des ressemblances entre les signaux $e(t)$ et $s(t)$. Si les deux signaux sont indépendants, leur fonction de corrélation est nulle.

Pour des séquences d'échantillons $\{s(n)\}$ et $\{e(n)\}$ en nombres limités, la fonction $Ces(\tau)$ devient :

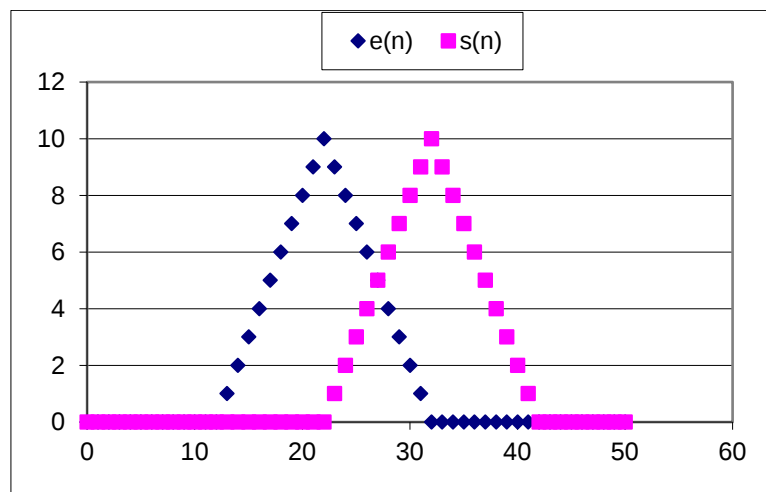
$$Ces(k\Delta t) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e(n).s(n-k)$$

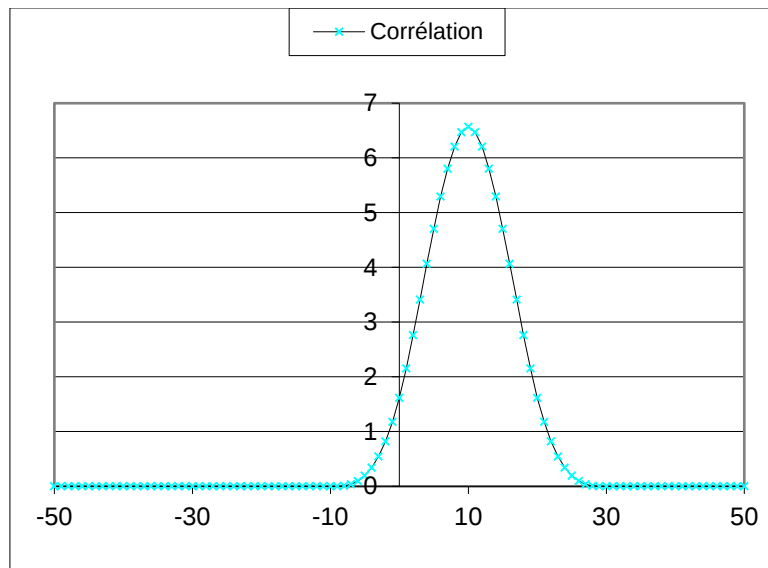
où $k\Delta t$ est une représentation discrète du retard τ .

2. Exemple :

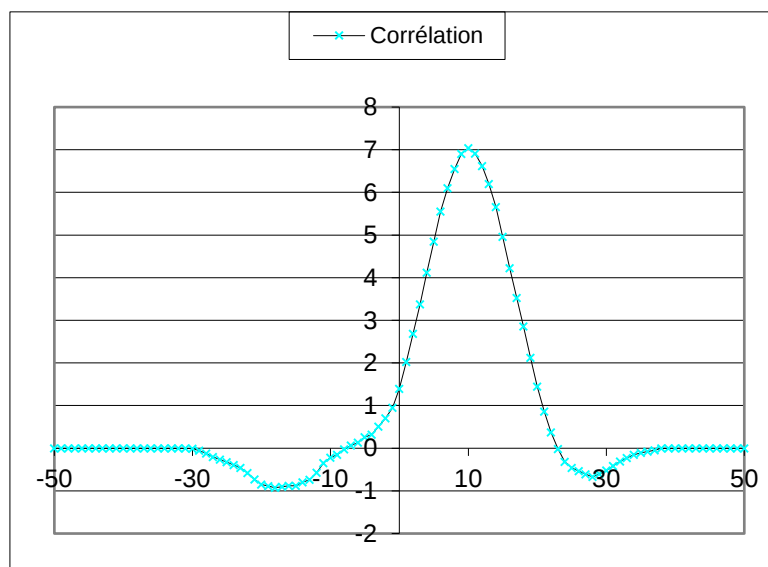
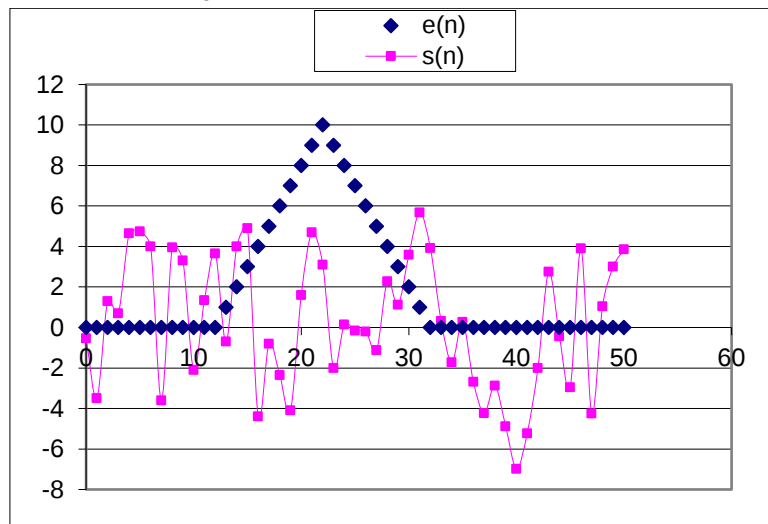
a) Signaux de forme d'onde identique :

Cas de la corrélation de signaux de forme d'onde identique mais décalée dans le temps :





b) Même chose mais avec un signal bruité :



Rem : La fonction corrélation permet de repérer par un pic une similitude entre deux signaux même bruités.