

VI. TRAITEMENT DE SIGNAUX ELECTROPHYSIOLOGIQUES PAR ONDELETTES (EN CONSTRUCTION) :

On a souvent intérêt à représenter un « signal » observé comme une superposition adéquate de fonctions élémentaires.

Une fois en possession de ces « fonctions élémentaires », on peut essayer d'obtenir une bonne reconstitution de l'objet étudié en n'utilisant qu'un nombre limité de telles fonctions, ce qui peut se concevoir comme une tâche d'approximation ou de compression.

A. L'analyse de Fourier (rappel):

1. La transformée de Fourier :

La plupart des signaux électrophysiologiques ne sont pas stationnaires, et c'est dans l'évolution de leurs caractéristiques (statistiques, fréquentielles, temporelles, spatiales) que réside l'essentiel de l'information qu'ils contiennent. L'analyse de Fourier propose une approche globale du signal et toute notion de localisation temporelle disparaît dans l'espace de Fourier ; il faut donc trouver un compromis, une transformation qui renseigne sur le contenu fréquentiel tout en préservant la localisation afin d'obtenir une représentation temps/fréquence.

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = TF[s(t)]$$

2. La transformée de Fourier Glissante :

La transformée de Fourier à fenêtre glissante permet de limiter le domaine d'intégration temporel (ou spatial) à l'aide d'une fonction «fenêtre» que l'on pourra faire glisser pour explorer le signal.

$$S(f, t) = TFFG[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \psi(\tau, t, f) d\tau$$

B. Introduction aux ondelettes :

Dans le traitement de signal, on recherche une localisation dans les deux représentations du signal. La transformée en ondelettes est, comme celle de Fourier, un passage d'une représentation à une autre mais comme la transformée à fenêtres, elle permet aussi de mesurer les variations dans le temps des composantes fréquentielles (spectrales) d'un signal. Néanmoins, la résolution temps-fréquences de la transformée en ondelettes est différente.

L'idée de l'ondelette est de pouvoir faire varier les largeurs en temps et en fréquences d'une fonction tout en la translatant le long du signal comme dans la transformée de Fourier fenêtrée.

Une ondelette mère ψ est une fonction de base que l'on va traduire et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser le signal.

1. Valeur moyenne :

L'ondelette doit être une fonction de moyenne nulle ; en d'autres termes, ψ doit être une onde. $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$.

2. Translation dilatation :

On introduit les facteurs de translation a et d'échelle b : $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{b}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right)$



3. Transformée en ondelette :

La transformée en ondelette d'une fonction $s(t)$ continue s'écrit donc comme une décomposition en fonctions $\psi_{a,b}(t)$

$$\text{de } s(t) : W[s(a,b)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi_{a,b}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{b}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) dt$$

On se déplace sur le plan temps-fréquence en faisant varier a et b . La valeur que l'on obtient est alors la décomposition spectrale locale de f . L'énergie de $\psi_{a,b}(t)$ est concentrée autour de a sur une largeur $b\sigma_t$ ou σ_t est la largeur du rectangle de l'ondelette mère.

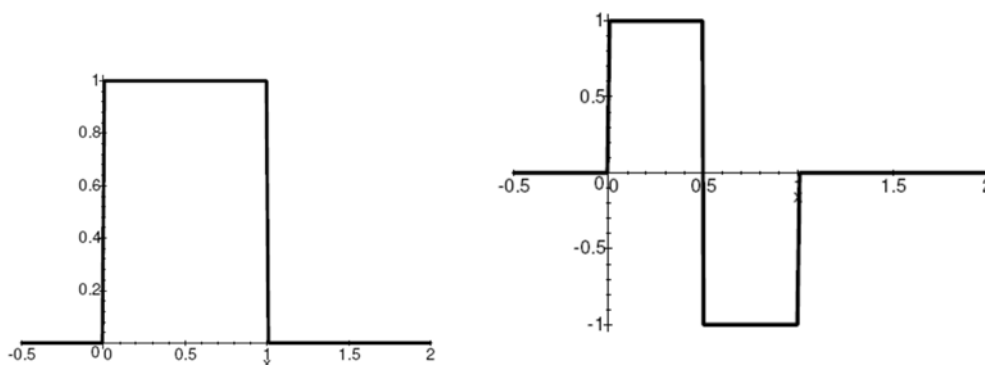


Figure 13 : Ondelette de Haar et sa fonction échelle.

On peut évaluer aussi la transformée de Fourier de $\psi_{a,b}(t)$ pour voir la localisation et la largeur du rectangle en fréquences.

$$\Psi_{a,b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{b}} \psi\left(\frac{t-a}{b}\right) e^{-j\omega t} dt$$

Donc l'énergie de $\Psi_{a,b}(\omega)$ est concentrée autour d'une fréquence centrale sur un intervalle égale à $\frac{\sigma_\omega}{b}$. En

conclusion, la résolution de l'ondelette est définie par un rectangle de côtés $\frac{\sigma_\omega}{b}$, $b\sigma_t$.

A noter que la transformée inverse se déduit facilement : $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W[s(a,b)] \psi_{a,b}(t) da.db$.

4. Avantages :

Le fait que la transformée utilise des fonctions bien localisées dans le plan temps-fréquence lui donne beaucoup d'avantages :

- La résolution en fréquence de la transformée dépend du facteur de dilatation, on peut donc choisir arbitrairement celle-ci suivant ce que l'on désire analyser.
- Pour des signaux physiques présentant des variations très rapides, l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces variations et analyser celles-ci.
- La localisation en temps est précieuse pour nombre d'applications.
- La transformée en ondelette peut représenter complètement et efficacement un signal quelconque en peu de coefficients.

C. La Multi résolution :

Comme pour l'analyse de Fourier qui utilise un algorithme rapide appelé FFT permettant une économie substantielle de calculs. Dans le cas des ondelettes, un tel algorithme existe également : la multi résolution. L'avantage de cet algorithme est double :

- Il permet d'obtenir une décomposition temps fréquences d'un signal.
- Il nécessite moins de calcul que la FFT.

1. Principe :

Une multi résolution analyse le signal à haute fréquences, pour en prélever les détails, ensuite elle analyse le signal à une résolution deux fois moins fine, et elle réitère l'opération en grossissant son échelle d'un facteur deux, sans se préoccuper des échelles intermédiaires, jusqu'à obtenir une description complète du signal ; on parle alors d'une étude multi-résolution du signal, d'où l'appellation de cet algorithme.

D'un point de vue pratique, cette méthode nécessite deux fonctions en plus du signal analysé : la fonction d'échelle $\varphi_{a,b}(t)$ et une ondelette $\psi_{a,b}(t)$ associée à cette fonction d'échelle.

2. Méthode :

La fonction d'échelle va nous donner une approximation du signal ; la fonction d'échelle lisse le signal. Les ondelettes, elles, vont coder les différences entre le signal de départ et le signal approximé par la fonction d'échelle.

Les différentes étapes dans une multi résolution d'un signal $s(t)$ numérisé sur N échantillons sont les suivantes :

- La première étape consiste à décomposer le signal $s(t)$ à partir de plusieurs fonctions d'échelle $\varphi_{a,b}(t)$ translatées d'une unité. Cette nouvelle fonction $\chi_1(t)$ n'est rien d'autre que l'approximation lissée du signal $s(t)$ par la fonction d'échelle à cette résolution. Ce qui donne : $\chi_1(t) = \sum_{a=0}^{N-1} C_{a,1} \varphi_{a,1}$ avec $C_{a,1}$ les coefficients codant la forme approximative du signal.
- Dans un deuxième temps, on reconstruit le signal $s(t)$ à partir de son approximation $\chi_1(t)$ et d'une décomposition en plusieurs fonctions d'ondelette $\psi_{a,b}(t)$ translatées d'une unité. Ce qui donne :
$$s(t) = \chi_1(t) + \sum_{a=0}^{N-1} k_{a,1} \psi_{a,1}$$
 avec $k_{a,1}$ les coefficients d'ondelette codant les « détails » du signal.
- Pour la troisième étape on recommence la même opération de décomposition mais cette fois-ci sur le signal $\chi_1(t)$ et en utilisant la fonction d'échelle dilatée d'un facteur deux. On obtient ainsi une approximation

$\chi_2(t)$ de $\chi_1(t)$ encore plus lisse du signal $s(t)$. On code aussi les détails avec l'ondelette $\psi_{a,b}(t)$

également dilaté d'un facteur deux. Cela donne finalement :

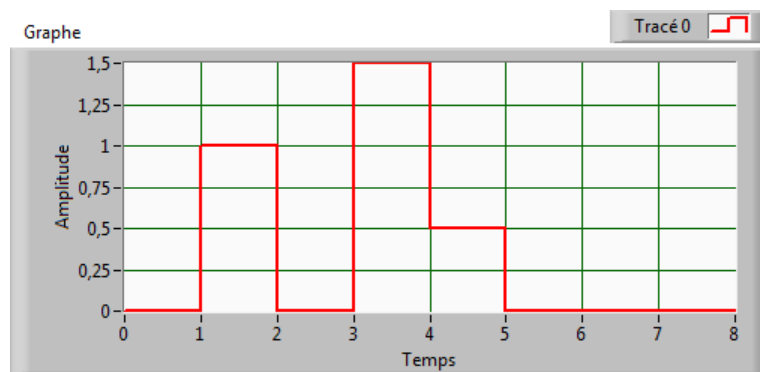
$$\chi_1(t) = \chi_2(t) + \sum_{a=0}^{\frac{N}{2}-1} k_{a,2} \psi_{a,2} .$$

- On reproduit les étapes précédentes un certain nombre de fois en dilatant d'un facteur 2 la fonction d'échelle

et d'ondelette. On aura alors : $s(t) = \chi_n(t) + \sum_{a=0}^{\frac{N}{2}-1} k_{a,1} \psi_{a,1} + \sum_{a=0}^{\frac{N}{2}-1} k_{a,2} \psi_{a,2} + \dots$. L'ensemble des coefficients $k_{a,1}, k_{a,2}, \dots$ obtenus permettent de reconstruire le signal d'origine à partir de la fonction lissée $\chi_n(t)$.

3. Exercice :

On considère le signal $s(t)$ ci-dessous relativement simple, que nous allons analyser l'aide de l'ondelette de Haar et de sa fonction d'échelle associée de durée unitaire.



Tracer les signaux obtenus par des décompositions successives et retrouver ainsi les coefficients constituant la décomposition en ondelette discrète. On se limitera à 3 décompositions successives.

D. Applications :

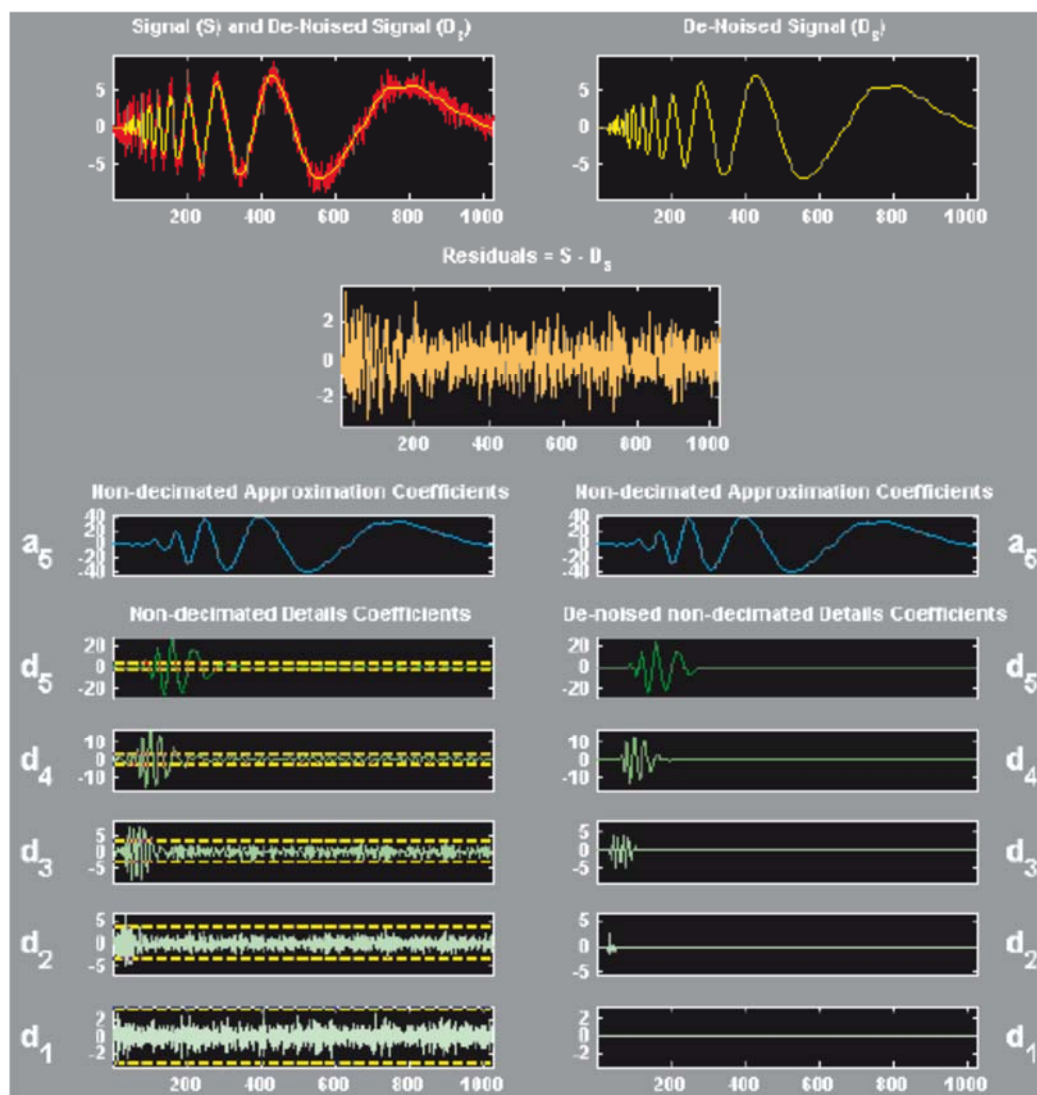
1. Le « débruitage » :

La difficulté du débruitage réside dans le fait que le bruit peut aussi bien être de haute fréquence, que de basse fréquence. Les ondelettes fournissent une méthode assez simple pour extraire les signaux du bruit blanc.

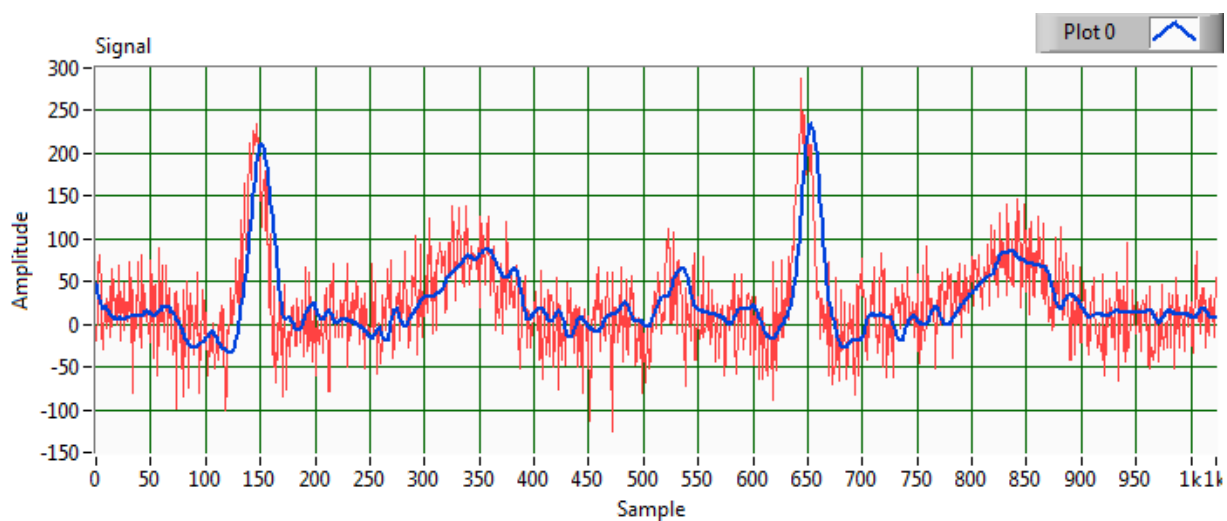
On transforme le signal en ondelettes, on élimine (remplace par 0), à toutes les résolutions, les coefficients inférieurs à un certain seuil. Ensuite, on reconstruit le signal avec les coefficients restants.

Donc pour résumer, dans l'espace physique, le bruit masque le signal, dans l'espace des ondelettes, signal et bruit se dissocient.

Exemple : signaux ECG, EEG...



Cas d'un signal ECG bruité :



2. La compression de données :

La transformée en ondelettes est à la base de l'algorithme de JPEG2000 (meilleur que la compression par bloc).

A. Analyse du signal par ondelette :

La transformée en ondelettes est utilisée ici pour décomposer le signal présentant des variations très rapides, l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces variations et analyser celles-ci. Elle permet de représenter le signal avec peu de coefficient et l'éliminer (remplacer par 0) ceux qui sont gênants (bruit).

On étudiera ici le principe de calcul de ces coefficients par la méthode de multi-résolution.

1. Principe de l'analyse multi-résolution :

Une multi résolution analyse le signal à haute fréquences, pour en prélever les détails, ensuite elle analyse le signal à une résolution deux fois moins fine, et elle réitère l'opération en grossissant son échelle d'un facteur deux, sans se préoccuper des échelles intermédiaires, jusqu'à obtenir une description complète du signal ; on parle alors d'une étude multi-résolution du signal. On considère le signal $s(t)$ ci-dessous relativement simple, que nous allons analyser l'aide de l'ondelette de Haar et de sa fonction d'échelle associée de durée unitaire. La fonction d'échelle va nous donner une approximation du signal ; la fonction d'échelle lisse le signal. Les ondelettes, elles, vont coder les différences entre le signal de départ et le signal approximé par la fonction d'échelle.

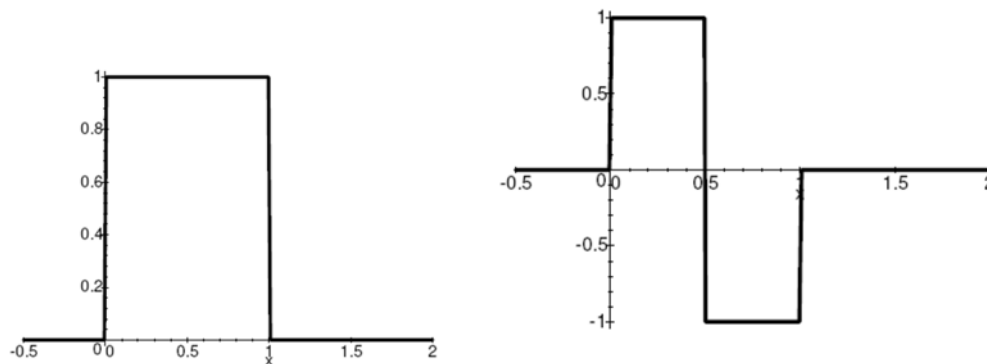


Figure 14 : fonction échelle et ondelette de Haar.

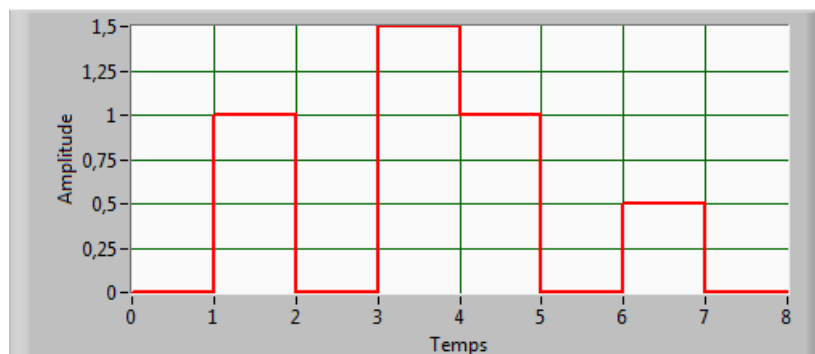
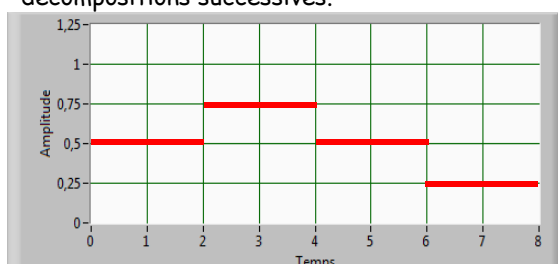
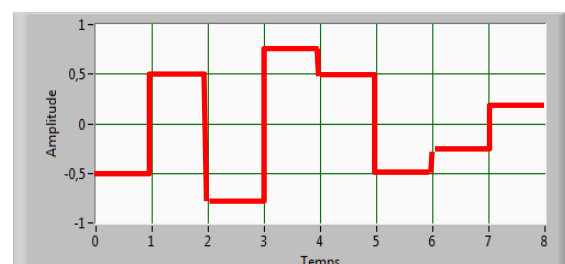


Figure 15: signal à analyser.

- Tracer les signaux obtenus par décompositions successives du signal donné figure 12 (approximation et détail) et retrouver ainsi les coefficients constituant la décomposition en ondelette discrète. On se limitera à 3 décompositions successives.

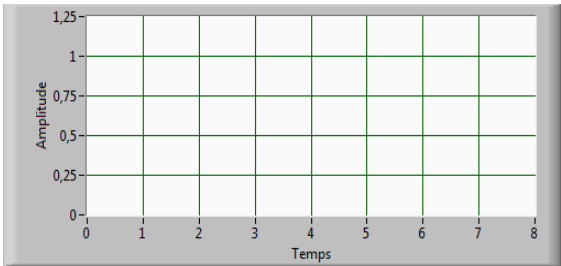


Approximation (fonction échelle)



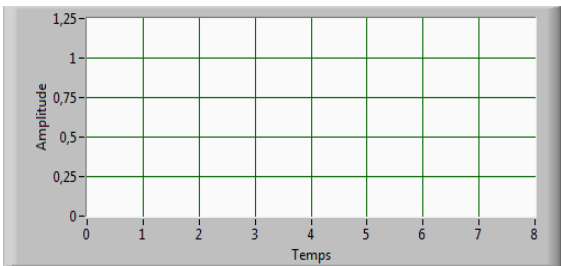
détail (ondelette):

$$C_{0,1} =; C_{1,1} =; C_{2,1} =; C_{3,1} =$$



Approximation (fonction échelle)

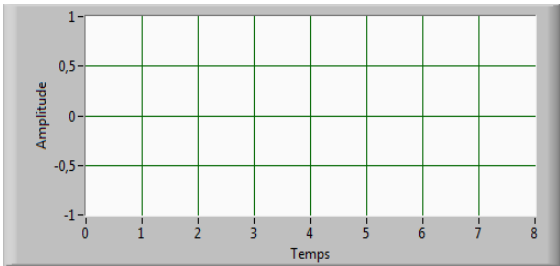
$$C_{0,2} =; C_{1,2} =$$



Approximation (fonction échelle)

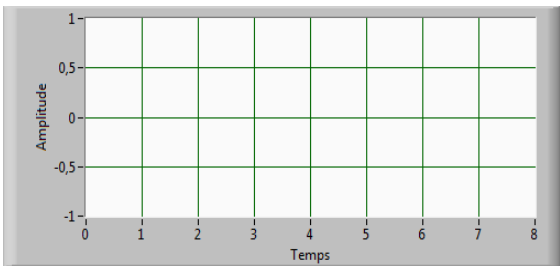
$$C_{0,3} =$$

$$K_{0,1} =; K_{1,1} =; K_{2,1} =; K_{3,1} =$$



détail (ondelette):

$$K_{0,2} =; K_{1,2} =$$



détail (ondelette):

$$K_{0,3} =$$

- Montrer que l'on peut reconstruire le signal à partir d'une suite de coefficients que l'on consignera dans le tableau ci-dessous.

Coef.								
-------	--	--	--	--	--	--	--	--