

Notes de cours : Commande événementielle

ENSEM - 3A NRJ

Romain Postoyan

romain.postoyan@univ-lorraine.fr

Septembre 2025

Sommaire

1	Introduction	5
2	Modèle	7
2.1	Modèle en l'absence d'échantillonnage	7
2.2	Prise en compte de l'échantillonnage	8
2.3	Modèle complet hybride	10
2.4	Modèles alternatifs	11
2.4.1	En considérant l'entrée échantillonné $\hat{u}$	11
2.4.2	Sans introduire l'erreur induite par l'échantillonnage	12
2.5	Le phénomène de Zénon	12
3	Lois d'échantillonnage	15
3.1	Objectif	15
3.2	Rappel sur la stabilité et le théorème de Lyapunov direct	16
3.3	Un théorème de Lyapunov direct pour le système (3.3)	18
3.4	Seuil relatif	20
3.5	Seuil absolu	21
3.6	Combinaison des seuils absolu et relatif	23
3.7	Simulations numériques	24
3.7.1	Seuil absolu	24
3.7.2	Seuil relatif	24
3.7.3	Combinaison des seuils absolu et relatif	25
3.8	Lois dynamiques	26
3.8.1	Seuil décroissant sur $V(x)$	26
3.8.2	Loi dynamique d'Antoine Girard	29
3.8.3	Conclusion	30
4	Temps d'inter-transmission : quelles garanties ?	31
4.1	Introduction	31
4.2	Problématique	32
4.2.1	Cas scalaire $n_x = 1$	32
4.2.2	Cas planaire $n_x = 2$	33
4.2.3	λ_1 et λ_2 complexes conjuguées, non-réelles	33

4.2.4	λ_1 et λ_2 réelles et distinctes	33
4.2.5	λ_1 et λ_2 réelles, égales et de multiplicité géométrique 2	35
4.3	Conclusion	35
5	Commande par retour de sortie	37
5.1	Modèle avec sortie	37
5.2	Phénomène de Zénon	37
5.3	Passage des lois de transmission au cas du retour de sortie	39
5.4	Régularisation temporelle	39
6	Commande robuste	41
6.1	Incertitudes de modèle	41
6.2	Perturbations exogènes	42
6.3	Bruits de mesure	44
6.4	Résumé	45
7	Validation expérimentale	47
7.1	Objectif	47
7.2	Plateforme	48
7.3	Loi de commande événementielle	48
7.4	Résultats expérimentaux	48
8	Conclusion	51
8.1	Commande événementielle ou échantillonnage périodique ?	51
8.2	Autres objectifs de l'automatique	51
8.3	Autres paradigmes de transmission événementielle	52
8.4	Défis	52
	Glossaire	53
	Bibliographie	55

Chapitre 1

Introduction

L'essor des réseaux de communication numériques et des plateformes de calcul embarqué offre de nombreux avantages pour l'implémentation des contrôleurs (facilité d'installation et de maintenance, diminution des coûts etc.). En contrepartie, ce type d'implémentation soulève de nouveaux défis en automatique car les ressources de calcul et/ou de communication disponibles sont sujettes à restrictions et peuvent d'ailleurs être partagées avec d'autres tâches que celle de contrôle. L'approche classique de l'automatique consistant à mettre à jour le contrôleur et à communiquer de façon périodique avec les capteurs et les actionneurs s'avère inadaptée en règle générale dans ce cadre. En effet, pour être efficace, la période d'échantillonnage doit typiquement être sélectionnée suffisamment petite pour faire face au pire cas. Cela conduit alors à de fréquentes transmissions et de fréquents calculs, qui peuvent excéder les capacités disponibles. De plus, calculs et communications se produisent même lorsque cela n'est pas nécessaire. Si l'objectif est par exemple d'amener l'état du système à un point d'équilibre et que celui-ci est atteint, il n'y a alors plus besoin de mettre à jour le contrôleur et de communiquer (en l'absence de perturbation). Or une implémentation périodique continuera aveuglément de générer transmissions et calculs à la même fréquence gaspillant ainsi les ressources disponibles.

Il est donc nécessaire d'envisager de nouveaux paradigmes pour l'implémentation des lois de commande dans ce contexte. Une alternative a vu le jour ces deux dernières décennies : la commande à échantillonnage (ou transmission) événementielle, appelée communément commande événementielle. Ce paradigme consiste à adapter les communications entre le système et son contrôleur, ainsi que la mise à jour de ce dernier, en fonction des besoins du système et non du temps écoulé depuis la dernière transmission comme c'est le cas avec l'échantillonnage périodique. Ainsi, les données sont transmises au contrôleur (et/ou aux actionneurs) uniquement lorsque cela est nécessaire pour que le système en boucle fermée satisfasse l'objectif fixé. Plus précisément, transmissions des données et exécution du contrôleur sont déclenchées lorsque les données mesurées actuelles deviennent significativement différentes des dernières communiquées. Toute la question est alors de déterminer ce qui est entendu par « significativement différent ». Cela se formalise sous la forme d'un critère qui dépend typiquement des données à l'instant présent et des dernières transmises. Le défi est alors de définir ce critère afin de satisfaire l'objectif de commande tout en garantissant l'existence d'un temps minimum strictement positif entre deux transmissions, pré-requis à toute implémentation.

Le but de ce cours est de présenter les principales techniques du domaine. Dans un souci de

pédagogie, ce cours se concentre sur le problème de la stabilisation d'un point de fonctionnement (l'origine) d'un système linéaire par commande événementielle par retour d'état. Néanmoins, les techniques exposées et les défis méthodologiques que celles-ci soulèvent sont au cœur de la plupart des méthodes disponibles dans la littérature pour d'autres classes de systèmes (non-linéaires, à retard, de dimension infinie) et d'autres objectifs de l'automatique (estimation, poursuite de trajectoire, régulation etc.).

Ce document est organisé de la façon suivante. La première étape consiste à formaliser les objectifs et à modéliser mathématiquement le problème. Les lois fondamentales de transmission pour la stabilisation sont ensuite présentées et discutées. La quantité de transmissions générée par les lois de transmission est dans un troisième temps évoquée plus en détails. L'exposé s'élargit ensuite à la commande par retour de sortie et la question de la robustesse aux perturbations et incertitudes de modèle est abordée. Un exemple de validation expérimentale d'une commande événementielle pour la poursuite de trajectoire d'un robot mobile par réseau sans fil est exposé avant de conclure.

Ces notes de cours reprennent en partie l'article [\[Pos23\]](#).

Chapitre 2

Modèle

2.1 Modèle en l'absence d'échantillonnage

Nous considérons des systèmes à commander dont les dynamiques sont linéaires et décrites par la représentation d'état suivante

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.1)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état, $n_x \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande, $n_u \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$.

Nous rappelons que $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ où $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est le temps. Quelques précisions également concernant la notation utilisée :

- $\mathbb{Z}_{>0}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs, autrement dit $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$;
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ est l'ensemble des réels non-négatifs, $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$;
- pour $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$ désigne l'ensemble des matrices réelles de n lignes et m colonnes.

Nous nous permettons d'omettre la dépendance des variables en t , sauf lorsque cela est important.

L'objectif est de déterminer une loi de commande par retour d'état échantillonnée de façon événementielle afin de stabiliser globalement, asymptotiquement $x = 0$.

Nous procédons par émulation pour cela. Dans un premier temps, nous ignorons donc l'échantillonnage des données entre le système (2.1) et le contrôleur à déterminer. Le problème est exclusivement en temps continu.

Nous supposons dans ce but que la paire (A, B) est contrôlable¹ (stabilisable suffit en réalité). Cela implique que nous pouvons toujours déterminer un retour d'état statique de la forme

$$u = Kx, \quad (2.2)$$

où la matrice $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ est telle que $A + BK$ est Hurwitz, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives. Ainsi, l'origine du système (2.1) en boucle fermée avec

1. Ce qui est équivalent au fait que la matrice $[B \ AB \ \dots \ A^{n_x-1}B]$ est de rang n_x , d'après le critère de Kalman.

(2.2), $\dot{x} = (A + BK)x$, est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable. Nous reviendrons sur ce point par la suite, voir également le cours d'1A d'automatique linéaire. À noter que la commande Matlab pour obtenir K est la suivante : $K = \text{-place}(A, B, [\text{valeurs propres désirées}])$.

Remarque. Il est tout à fait possible d'envisager un contrôleur proportionnel intégral (dérivée) en lieu et place de (2.2). Lorsque cela est fait à partir d'une sortie qui ne représente pas l'état complet x du système, des précautions devront être prises comme cela est expliqué par la suite au chapitre 5.

2.2 Prise en compte de l'échantillonnage

Dans la partie précédente, l'échantillonnage fut ignoré. Nous le prenons désormais en compte. Nous notons les instants de transmission/d'échantillonnage t_i , $i \in \mathcal{I}$ où $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ avec $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, ou $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Lorsque $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$, cela signifie que nous arrêterons de transmettre à t_N , tandis que lorsque $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il y aura une infinité d'instant de transmissions, comme c'est le cas lorsque l'échantillonnage est périodique puisqu'alors $t_{i+1} = t_i + T$ où $T > 0$. La définition de $\mathcal{I}$ dépend du critère de transmission et du type de bloqueur utilisé. Cela devrait être plus clair par la suite.

Nous avons donc le schéma de commande de la figure 2.1, où $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état échantillonné. Dans le cours, nous nous concentrons sur le cas où $\hat{x}$ est généré à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro. En d'autres termes, nous avons, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}(t) &= 0 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \hat{x}(t_i^+) &= x(t_i). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cette équation mérite plusieurs commentaires :

- la première équation de (2.3) signifie que $\hat{x}$ est constant entre deux instants d'échantillonnage successifs ;
- dans la deuxième équation, $\hat{x}(t_i^+)$ est la limite à droite de $\hat{x}$ en $t = t_i$. Ainsi, à chaque instant d'échantillonnage/de transmission, $\hat{x}$ est mise à jour à la valeur actuelle de l'état x ;
- l'équation (2.3) combine équation différentielle ordinaire en temps continu, $\hat{\dot{x}} = 0$, et équation aux différences en temps discret, $\hat{x}(t_i^+) = x(t_i)$, on appelle cela un système *hybride*. Par solution de (2.3), on entend une fonction $\hat{x} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ (absolument) continue qui vérifie $\hat{\dot{x}}(t) = 0$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1})$, et $\hat{x}(t_i^+) = x(t_i)$ tout simplement, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

La figure 2.2 fournit une illustration de (2.3) qui devrait permettre de mieux l'appréhender.

La loi de commande appliquée au système n'est donc plus donnée par l'équation (2.2) mais

$$u = K\hat{x}. \quad (2.4)$$

En conséquence, (2.1) en boucle fermée avec (2.15) donne

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x}, \quad (2.5)$$

pour tout $t \in [t_i, t_{i+1})$ où $i \in \mathcal{I}$. Lorsqu'une transmission se produit, cela n'affecte pas (directement) l'état x . Prenons l'exemple d'un robot pour nous en convaincre : lorsqu'une nouvelle valeur de loi de

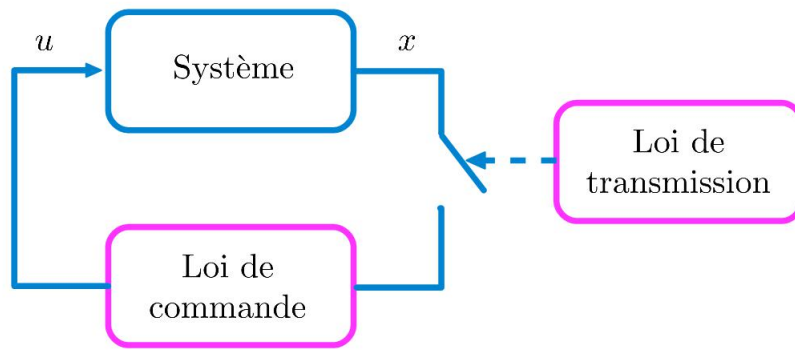
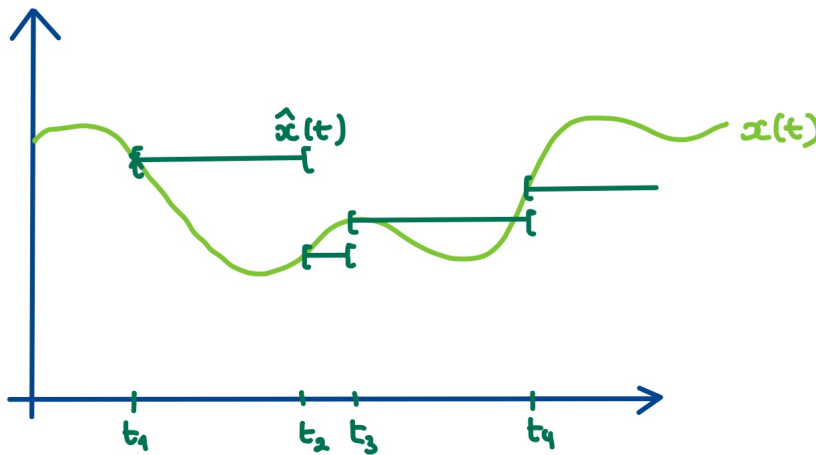


FIGURE 2.1 – Schéma de la boucle de commande échantillonnée.

FIGURE 2.2 – Illustration du tracé d'un état échantillonné $\hat{x}$.

commande parvient au robot, la position et la vitesse de ce dernier ne change pas. Ainsi,

$$x(t_i^+) = x(t_i), \quad (2.6)$$

pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Dans la partie suivante, nous allons rassembler les équations dérivées ci-dessus pour en déduire une description complète des dynamiques mises en jeu.

Remarque. Nous pouvons envisager d'autres types de bloqueurs, à l'instar de ceux que vous avez dû voir en cours de "Commande numérique". En voici un autre exemple, appelé "bloqueur-modèle",

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + BK\hat{x}(t) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \hat{x}(t_i^+) &= x(t_i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Remarquons que la dynamique continue de $\hat{x}$ est la même que celle du système continu en boucle

fermée, $\dot{x} = Ax + BKx$, sauf que $\hat{x}$ remplace x puisque ce dernier n'est pas disponible entre deux instants de transmission. Nous pouvons aussi déduire de (2.7) qu'après une seule transmission $x(t_1) = \hat{x}(t_1^+)$. Par conséquent, $\hat{x}(t) = x(t)$ pour tout $t > t_i$ puisque x et $\hat{x}$ ont les mêmes dynamiques en temps continu et sont initialisés à la même valeur.

Ce type de bloqueur dit "intelligent" est plus sophistiqué à mettre en œuvre en pratique mais permet de réduire grandement le nombre de transmissions.

Remarque. La loi de transmission de la figure 2.1 est localisée au niveau des capteurs. Selon le dispositif expérimental, celle-ci peut tout aussi bien être localisée au niveau du contrôleur comme ce sera le cas au chapitre 7, voire aux deux, auquel cas on parle de commande événementielle asynchrone, cf. [APDN17, DBH17] par exemple.

Remarque. Le point de fonctionnement à stabiliser est $x = 0$ et ce sans perte de généralité. En effet, si le point de fonctionnement désiré est $\bar{x} \neq 0$, il est possible de se ramener à un problème de stabilisation de l'origine en procédant comme suit. Soit $\bar{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ tel que $A\bar{x} + B\bar{u} = 0$. Le changement de coordonnées $z := x - \bar{x}$ permet d'obtenir : $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t_i) = A(z(t) + \bar{x}) + Bu(t_i) = Az(t) - B\bar{u} + Bu(t_i)$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$, $i \in \mathcal{I}$. En posant $v := u - \bar{u}$, l'équation d'état devient $\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t_i)$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$, $i \in \mathcal{I}$, qui est de la même forme que (2.1), et l'objectif est alors de stabiliser $z = 0$.

2.3 Modèle complet hybride

Nous introduisons maintenant par commodité une nouvelle variable que nous appelons *l'erreur induite par l'échantillonnage*

$$e := \hat{x} - x, \quad (2.8)$$

et donc $e \in \mathbb{R}^{n_x}$, puisque $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$. Le nom de e est explicite : cette variable traduit l'écart entre l'état échantillonné $\hat{x}$ et l'état actuel du système x .

Étudions les dynamiques de cette variable e . Soit $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathcal{I}$, d'après (2.3) et (2.5),

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= 0 - Ax - BK\hat{x} \\ &= -Ax - BK(\hat{x} - x + x) \\ &= -(A + BK)x - BKe. \end{aligned} \quad (2.9)$$

À chaque instant d'échantillonnage t_i , $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, nous avons

$$e(t_i^+) = \hat{x}(t_i^+) - x(t_i^+). \quad (2.10)$$

D'après (2.3) et (2.6),

$$\begin{aligned} e(t_i^+) &= x(t_i) - x(t_i) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cette dernière équation a une explication intuitive : lorsqu'une transmission a lieu, $\hat{x} = x$, il n'y a pas d'erreur induite par l'échantillonnage donc $e = 0$.

En résumé, les dynamiques de la variable e sont

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BK e(t) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Par ailleurs, nous pouvons réécrire la dynamique continue de x en fonction de (x, e) et non plus $(x, \hat{x})$ comme dans (2.5). Cela donne

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} \\ &= Ax + BK(\hat{x} - x + x) \\ &= (A + BK)x + BKe, \end{aligned} \quad (2.13)$$

pour tout $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathcal{I}$. Cette dernière équation est claire : nous retrouvons la partie continue $(A + BK)x$ en l'absence d'échantillonnage, qui est perturbée par BKe . Notre objectif sera en quelque sorte de définir un critère de transmission tel que la perturbation BKe ne détruise pas la stabilité globale asymptotique (exponentielle) de $x = 0$.

Nous pouvons enfin présenter le modèle complet dans les coordonnées (x, e)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BKe(t) \\ \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BKe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (2.14)$$

Il s'agit donc d'un système hybride car il y a, à la fois, des dynamiques en temps continu décrites par des équations différentielles ordinaires, et des dynamiques en temps discret décrites par des équations aux différences.

Il existe plusieurs formalismes pour décrire ce genre de systèmes dynamiques, ce qu'on entend par solution pour de tels systèmes, etc. Nous nous contenterons dans ce cours de la formulation ci-dessus, ce qui présentera un inconvénient mineur comme nous le verrons ultérieurement.

2.4 Modèles alternatifs

Le modèle (3.3) sera celui sur lequel nous travaillerons dans le reste de ces notes. Il existe néanmoins des modèles équivalents qui ont leurs avantages selon notre objectif. Nous en voyons deux ci-dessous.

2.4.1 En considérant l'entrée échantillonnée $\hat{u}$

Nous avons considéré ci-dessus l'état échantillonné $\hat{x}$. Nous aurions aussi pu prendre l'entrée échantillonnée $\hat{u}$ au lieu de $\hat{x}$. Les dynamiques de $\hat{u}$ sont alors

$$\begin{aligned} \dot{\hat{u}}(t) &= 0 \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \hat{u}(t_i^+) &= u(t_i) = Kx(t_i). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans ce cas, il est logique de définir l'erreur induite par le réseau comme $e = \hat{u} - u$. En adaptant les développements ci-dessus, on obtient le modèle suivant

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Be(t) \\ \dot{e}(t) &= -K(A + BK)x(t) - KBe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (2.16)$$

Ce modèle est parfois pratique pour l'analyse.

2.4.2 Sans introduire l'erreur induite par l'échantillonnage

Lorsque nous simulons un système à commande échantillonnée de façon événementielle à l'aide de Matlab-Simulink, il est souvent plus aisé de ne pas introduire l'erreur induite par l'échantillonnage et d'écrire le modèle complet dans les coordonnées $(x, \hat{u})$ ou $(x, \hat{x})$. Le premier cas correspond au modèle suivant

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\hat{u}(t) \\ \dot{\hat{u}}(t) &= 0 \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ \hat{u}(t_i^+) &= Kx(t_i). \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (2.17)$$

C'est ce modèle que nous simulerons en TP.

2.5 Le phénomène de Zénon

Pour conclure ce chapitre, notons que les systèmes hybrides ne se circonscrivent pas au seul cadre de la commande échantillonnée. Dès que des phénomènes discrets ou discontinus se produisent, il est légitime de proposer un tel modèle. Il en va ainsi des convertisseurs de puissance et plus généralement de n'importe quel système électrique muni d'interrupteurs dont l'ouverture et la fermeture peut se modéliser comme un phénomène discret. Une autre grande classe de problèmes est celle des systèmes mécaniques sujets à impacts, à l'instar des robots marcheur : l'impact correspondant à la dynamique discrète. Considérons d'ailleurs probablement le plus simple d'entre eux : l'exemple de la balle rebondissante (solide, homogène), cf. figure 2.3.

La balle est en chute libre entre deux impacts, impacts qui sont modélisés par des dynamiques discrètes. Nous avons ainsi en ramenant l'étude de la balle à celle de son centre,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_2 \\ -\gamma \end{pmatrix} & x_1 > 0 \text{ ou } (x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\lambda x_2 \end{pmatrix} & x_1 = 0 \text{ et } x_2 < 0 \end{cases} \\ x^+ &= \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\lambda x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

- $x_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est la hauteur de la balle,

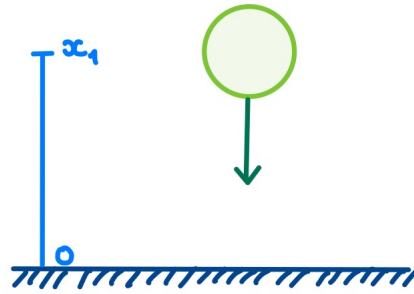


FIGURE 2.3 – Balle rebondissante.

- $x_2 \in \mathbb{R}$ est sa vitesse verticale,
- $\gamma > 0$ la constante gravitationnelle,
- $\lambda \in]0, 1[$ le coefficient d'amortissement lié aux impacts.

Considérons le cas où $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) > 0$. Après quelques calculs non-explicités, nous pouvons établir que les instants de saut/d'impact t_i , $i \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, vérifient la relation suivante

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\lambda^i}{\gamma} x_2(0).$$

Ainsi, en supposant que $t_1 = 0$,

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j=1}^i \frac{2\lambda^j}{\gamma} x_2(0) \\ &= \frac{2}{\gamma} x_2(0) \frac{1 - \lambda^{i+1}}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$t_i \rightarrow \frac{2}{\gamma} x_2(0) \frac{1}{1 - \lambda} \text{ quand } i \rightarrow \infty.$$

La solution saute un nombre infini de fois en temps fini : on appelle cela le *phénomène de Zénon*.

En quoi cela nous concerne-t-il ? Nous devons concevoir des lois d'échantillonnage qui excluent ce phénomène car cela signifierait que nous devrions transmettre un nombre infini de fois en temps fini ce qui est irréalisable et va à l'encontre de notre motivation première : commander en transmettant le moins possible. En pratique, nous demandons une propriété plus forte : nous souhaitons avoir la garantie qu'il existe un *temps minimum strictement positif entre t_i et t_{i+1}* . Mathématiquement, la formulation qui nous intéresse dans ce cours est la suivante : pour tout $x(0), e(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta.$$

On appelle η un temps minimum d'inter-transmission.

Chapitre 3

Lois d'échantillonnage

3.1 Objectif

Pour rappel, le modèle établi au chapitre 3.3 est

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BKe(t) \\ \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BKe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (3.1)$$

Il nous reste à définir les instants d'échantillonnage $t_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, afin de préserver les propriétés de stabilité du système en temps continu, c'est-à-dire $\dot{x} = (A + BK)x$. Pour ce faire, nous n'allons pas définir d'expression explicite des t_i . Nous allons plutôt construire une fonction Γ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui dépendra de l'erreur induite par l'échantillonnage e voire de l'état x . En fonction du signe de $\Gamma(x, e)$, nous déclencherons ou non une transmission. Ainsi, dans le cas où le critère Γ dépend de x et de e , nous aurons, pour tout¹ $i \in \mathcal{I}$,

$$t_i = \inf \{t > t_{i-1} : \Gamma(x(t), e(t)) \geq 0\}. \quad (3.2)$$

où $t_0 = 0$.

Nous pouvons donc ré-écrire (3.1) sans faire apparaître le temps

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BKe \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BKe \\ x^+ &= x \\ e^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{quand } \Gamma(x, e) \leq 0, \\ &\text{quand } \Gamma(x, e) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'objectif de ce chapitre est de construire la fonction Γ afin de garantir :

- la stabilité (globale exponentielle) de $x = 0$ pour le système (3.3);
- l'existence d'un temps minimum d'inter-transmission strictement positif, c'est-à-dire que pour

1. Rappelons que $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ avec $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, ou $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$

toute solution telle que $x(0) \neq 0$ de (3.3), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta, \quad (3.4)$$

ce qui nous permettra d'éviter le phénomène de Zénon.

Avant cela, nous devons faire un rappel sur la stabilité des systèmes dynamiques et revoir un théorème de Lyapunov direct.

3.2 Rappel sur la stabilité et le théorème de Lyapunov direct

Considérons le système linéaire temps-invariant

$$\dot{x} = Fx, \quad (3.5)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état, $n_x \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $F \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

Définition 1. L'origine $x = 0$ est globalement exponentiellement stable (GES) pour le système (3.5) s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour toute condition initiale x_0 , la solution correspondante de (3.5) vérifie pour tout $t \geq 0$,

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0|. \quad (3.6)$$

□

Remarques :

- Nous parlons de la stabilité d'un point pour un système dynamique. L'expression "un système est stable" est un raccourci à utiliser avec précaution.
- La définition 1 garantit bien les deux propriétés attendues de la stabilité asymptotique d'un point :
 - (i) lorsque la condition initiale x_0 est proche de l'origine, l'état x reste à proximité de l'origine. En effet, d'après (3.6), pour tout $t \geq 0$, $|x(t)| \leq c_1 |x_0|$. Par conséquent, si $|x_0|$ est "petit", $|x(t)|$ le sera également pour tout $t \geq 0$.
 - (ii) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$. En effet, puisque $|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t}$ pour tout $t \geq 0$ et $c_2 > 0$, $|x(t)| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

L'"ingrédient" supplémentaire de la stabilité exponentielle par rapport à la stabilité asymptotique est que toute solution converge exponentiellement vite vers l'origine.

Comment vérifie-t-on que $x = 0$ est GES pour le système (3.5)? Il suffit pour cela d'étudier les valeurs propres de F .

Théorème 1. L'origine du système (3.5) est GES si et seulement si F est Hurwitz, c'est-à-dire que les valeurs propres de F sont à parties réelles strictement négatives. □

Cela est bien joli mais le système qui nous intéresse, (3.3), n'est plus linéaire, il ne s'écrit pas sous la forme (3.6). Nous ne pouvons donc pas utiliser le théorème 1 pour étudier la stabilité de $x = 0$. Une alternative consiste à exploiter les fonctions de Lyapunov. Énonçons le théorème de Lyapunov pour l'étude de la stabilité de $x = 0$ pour les systèmes linéaires de la forme (3.5).

Théorème 2. *L'origine du système (3.5) est GES si et seulement si il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R})$, $a_1, a_2, a_3 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$*

$$\begin{aligned} a_1|x|^2 &\leq V(x) \leq a_2|x|^2 \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} F x &\leq -a_3|x|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

□

La première ligne de (3.7) implique que V est définie positive² et radialement non-bornée, c'est-à-dire que $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$. La deuxième ligne de (3.7) peut être interprétée comme suit. Le terme $\frac{\partial V(x)}{\partial x} F x$ correspond en quelque sorte à $\frac{d}{dt} V(x(t))$ où x est solution de (3.5). En effet, $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} F x(t)$, nous retrouvons le terme de gauche dans la deuxième ligne de (3.7). Ainsi cette dernière implique $\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$ quand $x(t) \neq 0$, et donc $V(x(t))$ décroisse vers zéro avec le temps, ce qui garantit in fine, que $x(t)$ converge vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. La forme particulière du majorant de $\frac{\partial V(x)}{\partial x} F x$, c'est-à-dire $-a_3|x|^2$, permet, avec la première ligne de (3.7), de prouver que la stabilité est exponentielle.

La bonne nouvelle est qu'il est aisé de construire une fonction de Lyapunov V pour (3.5) lorsque F est Hurwitz bien sûr. Nous utilisons pour cela le lemme suivant.

Lemme 1. *La matrice F est Hurwitz si et seulement si pour toute matrice $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive³, il existe une unique matrice $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive telle que*

$$F^\top P + PF = -Q. \quad (3.8)$$

Voyons comment utiliser le lemme 1 pour construire une fonction de Lyapunov V satisfaisant les conditions du théorème 2. Nous supposons pour cela que F est Hurwitz. Soit $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive et $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive telle que $F^\top P + PF = -Q$. Une telle matrice P existe d'après le lemme 1. Nous posons

$$V(x) := x^\top P x \quad (3.9)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$. Puisque V est symétrique et définie positive, les inégalités suivantes sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\lambda_{\min}(P)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)|x|^2, \quad (3.10)$$

où $\lambda_{\min}(P)$ et $\lambda_{\max}(P)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de P . Rappelons que les valeurs propres de P sont réelles puisque cette matrice est symétrique, nous pouvons donc

2. Cela signifie que $V(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3. La matrice Q est définie positive si et seulement si $x \mapsto x^\top Q x$ est définie positive.

bien parler de valeurs propres minimale et maximale. La première ligne de (3.7) est vérifiée avec $a_1 = \lambda_{\min}(P)$ et $a_2 = \lambda_{\max}(P)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} F_x &= (F_x)^\top P x + x^\top P F_x \\ &= x^\top F^\top P x + x^\top P F x \\ &= x^\top (F^\top P + P F) x, \end{aligned} \quad (3.11)$$

or $F^\top P + P F = -Q$, donc

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} F_x = -x^\top Q x, \quad (3.12)$$

et puisque Q est symétrique et définie positive, $x^\top Q x \geq \lambda_{\min}(Q)|x|^2$. Par conséquent,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} F_x \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2. \quad (3.13)$$

La deuxième inégalité de (3.7) est donc satisfaite avec $a_3 = \lambda_{\min}(Q) > 0$.

Ces développements nous seront utiles pour construire et analyser les lois d'échantillonnage. À noter que sous Matlab, la commande `lyap` permet d'obtenir la matrice P étant données A , B et Q : $P = \text{lyap}((A+BK)', Q)$.

3.3 Un théorème de Lyapunov direct pour le système (3.3)

Les résultats de stabilité de la section 3.2 s'appliquent aux systèmes linéaires en temps continu, cf. (3.5). Or le système d'intérêt dans ce chapitre est (3.3) et est hybride. Nous devons donc adapter ceux-ci. C'est le sujet de cette section.

Tout d'abord, notons que l'état du système (3.3) n'est plus uniquement constitué de x mais aussi de e . Ainsi, lorsque nous parlons de stabilité de $x = 0$, cela correspond en réalité à l'ensemble

$$\mathcal{A} := \{(x, e) : x = 0\}. \quad (3.14)$$

Il nous faut donc redéfinir la notion de stabilité vue ci-dessus pour le cas où l'attracteur n'est pas l'origine mais l'ensemble $\mathcal{A}$.

Définition 2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est (uniformément) globalement exponentiellement stable (GES) pour le système (3.3) s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0) , la solution (x, e) correspondante de (3.3) vérifie pour tout $t \geq 0$,

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0|. \quad (3.15)$$

□

Nous avons quasiment la même définition que dans la définition 1. À noter que $|x(t)|$ dans (3.15) correspond à la distance de $(x(t), e(t))$ à l'attracteur $\mathcal{A}$, qui se définit mathématiquement de la façon suivant : $|(x, e)|_{\mathcal{A}} := \inf\{|(x', e') - (x, e)| : (x', e') \in \mathcal{A}\}$. Ainsi $|(x, e)|_{\mathcal{A}} = |x|$.

Pour prouver la stabilité exponentielle de l'ensemble $\mathcal{A}$ pour le système (3.3), nous appliquerons le théorème de Lyapunov suivant.

Théorème 3. *Supposons qu'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R})$, $a_1, a_2, a_3, \eta > 0$ telles que les conditions ci-dessous sont vérifiées.*

(i) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$*

$$a_1|x|^2 \leq V(x) \leq a_2|x|^2. \quad (3.16)$$

(ii) *Pour tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x}$ tel que $\Gamma(x, e) \leq 0$,*

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -a_3|x|^2. \quad (3.17)$$

(iii) *pour toute condition initiale (x_0, e_0) où $x_0 \neq 0$, pour toute solution correspondante (x, e) de (3.3), il existe un temps minimum d'inter-transmission $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$,*

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta. \quad (3.18)$$

Alors l'ensemble $\mathcal{A}$ est globalement exponentiellement stable pour le système (3.3).

Nous retrouvons des conditions similaires à celles du théorème 1. En effet, les conditions (i) et (ii) du théorème 3 nous rappellent fortement celles du théorème 1 à ceci près que l'item (ii) ne doit être vérifiée que lorsque $\Gamma(x, e) \leq 0$. À cela s'ajoute l'item (iii), qui non seulement évite le phénomène de Zénon et est attendue en pratique, mais est utilisée pour prouver la propriété de stabilité du théorème 3; la preuve en question n'est pas fournie dans ces notes. Nous excluons l'origine, $x_0 = 0$, dans l'item (iii) ci-dessus car dans ce cas une singularité peut se produire au niveau du temps d'inter-transmission comme nous le verrons par la suite.

Puisque $A + BK$ est Hurwitz, un choix logique pour la fonction V du théorème 3 est $V(x) = x^\top P x$ où P est symétrique, définie positive et satisfait

$$(A + BK)^\top P + P(A + BK) = -Q, \quad (3.19)$$

avec Q une matrice symétrique et définie positive. Dans ce cas, l'item (i) du théorème 3 est vérifiée avec $a_1 = \lambda_{\min}(P)$ et $a_2 = \lambda_{\max}(P)$ comme nous l'avons vu précédemment. Par contre, regardons de plus près l'item (ii) du théorème 3. Soit $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &= \left((A + BK)x + BKe \right)^\top P x + x^\top P \left((A + BK)x + BKe \right) \\ &= x^\top \left((A + BK)^\top P + P(A + BK) \right) x + 2x^\top P B K e \\ &= -x^\top Q x + 2x^\top P B K e. \end{aligned} \quad (3.20)$$

À cause du terme $2x^\top P B K e$, il n'est pas évident que la condition (ii) du théorème 3 est vérifiée. D'ailleurs, ce terme admet une interprétation simple : il représente l'effet induit par l'échantillonnage qui va, en général, détruire la stabilité du système lorsque l'erreur e est trop grande. Tout le défi en échantillonnage événementiel est de contrôler la "taille" de e via le critère Γ afin de garantir la condition (ii) du théorème 3, mais aussi l'item (iii) dudit théorème. C'est ce que nous allons voir dans la suite de chapitre.

3.4 Seuil relatif

Revenons à (3.20) et considérons $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &= -x^\top Qx + 2x^\top PBKe \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2x^\top PBKe \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Faisons apparaître le terme $\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2$ où $\sigma \in]0, 1[$ est un paramètre de réglage,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 - \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e|. \quad (3.22)$$

Lorsque $-\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e| \leq 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \\ &= -(1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

et l'item (ii) du théorème 3 est vérifiée avec $a_3 = (1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q) > 0$ puisque $\sigma \in]0, 1[$. Revenons à la condition $-\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e| \leq 0$ qui nous a permis d'obtenir (3.23). Nous pouvons la réécrire de façon équivalente sous la forme

$$\begin{aligned} -\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e| &\leq 0 \\ 2|x||PBK||e| &\leq \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \\ |e| &\leq \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}|x|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nous pouvons donc définir

$$\Gamma(x, e) = |e| - \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}|x|. \quad (3.25)$$

Voici notre loi d'échantillonnage ! Nous la devons à Paulo Tabuada, professeur à UCLA aux États-Unis, en 2007. Elle est appelée seuil relatif, car un seuil, $\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}|x|$ est imposée à la norme de $|e|$, seuil qui est relatif puisqu'il dépend de $|x|$. Celui-ci est donc grand lorsque $|x|$ l'est et inversement. Après chaque instant de transmission, $e = 0$ d'après (3.3) et donc $\Gamma(x, 0) = -\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}|x| \leq 0$ de telle sorte que la solution du système (3.3) est donnée par la résolution de sa partie continue.

La condition (iii) quant à elle est également vérifiée, sa preuve est un peu technique et donc éludée ici.

Formalisons les développements ci-dessous.

Théorème 4. *Considérons le système (3.3) avec Γ défini dans (3.25) où $\sigma \in]0, 1[$. Les conditions du théorème 3 sont vérifiées et l'ensemble $\mathcal{A}$ est donc globalement exponentiellement stable.* $\square$

Remarque. Nous avons développé le seuil relatif en partant de la dernière inégalité de (3.20) ci-dessus. Nous pouvons obtenir une version moins conservative en partant de (3.20), c'est-à-dire

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) = -x^\top Qx + 2x^\top PBKe. \quad (3.26)$$

En suivant le même raisonnement que ci-dessus, nous pouvons introduire $\sigma x^\top Qx$ où $\sigma \in]0, 1[$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) = -x^\top Qx + \sigma x^\top Qx - \sigma x^\top Qx + 2x^\top PBKe. \quad (3.27)$$

Ainsi, lorsque $-\sigma x^\top Qx + 2x^\top PBKe \leq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &\leq -(1 - \sigma)x^\top Qx \\ &\leq -(1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q)|x|^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

et l'item (ii) du théorème 3 est satisfait avec $\sigma_3 = (1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q) > 0$. Nous pouvons également montrer la satisfaction de l'item (iii) du théorème 3 de telle sorte que le théorème 4 reste vrai pour Γ défini par

$$\Gamma(x, e) = 2x^\top PBKe - \sigma x^\top Qx. \quad (3.29)$$

Cette technique générera en général moins de transmissions qu'avec Γ de (3.25).

Concluons cette section sur le seuil relatif par une discussion sur ses avantages et inconvénients.

Avantages :

- la stabilité exponentielle est préservée (nous verrons que ce n'est pas toujours le cas) ;
- cette technique génère souvent moins de transmissions que la suivante de part l'adaptation du seuil sur $|e|$ à la valeur de l'état $|x|$;
- il existe un temps minimum d'inter-transmission $\eta > 0$ *global* sauf en l'origine, c'est-à-dire que pour toute solution (x, e) du système (3.3) telle que $x(0) \neq 0$, pour tout $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta. \quad (3.30)$$

En d'autres termes, η ne dépend pas des conditions initiales du système. Cela évite le cas où η devient très petit lorsque les conditions initiales sont prises de plus en plus loin de l'attracteur $\mathcal{A}$, à l'instar de la technique suivante.

Inconvénients :

- sa non-robustesse, comme nous le verrons au chapitre 6, qui est due au fait qu'il n'existe pas de temps minimum d'inter-transmission strictement positif quand $x_0 = 0$.

3.5 Seuil absolu

L'idée de la technique du seuil absolu repose sur une idée simple : il s'agit de transmettre uniquement lorsque la norme de l'erreur induite par l'échantillonnage, $|e|$, est plus grand qu'une constante $\rho > 0$ que nous sommes libre de choisir. Cela donne lieu au critère

$$\Gamma(e) = |e| - \rho, \quad (3.31)$$

qui est donc indépendant de x dans cette section. Nous devons cette technique à Karl-Erik Årzén de l'université de Lund en Suède en 1999.

Il y a un prix à payer pour cette simplicité : la stabilité ne sera plus exponentielle. Nous pouvons le voir à partir de l'analyse de Lyapunov. En effet, d'après (3.21),

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e|. \quad (3.32)$$

Lorsque $|e| \leq \rho$, autrement dit $\Gamma(e) \leq 0$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK|\rho. \quad (3.33)$$

Nous ne pourrions plus conclure que l'item (ii) du théorème 3 est vérifié, car lorsque $|x|$ est proche de 0, le terme $2|x||PBK|\rho$ domine $-\lambda_{\min}(Q)|x|^2$. Par contre, cela ne se produit que lorsque $|x|$ est de l'ordre de ρ . En poussant plus loin ce raisonnement, ce que nous ne faisons pas dans ces notes, nous pouvons obtenir le théorème suivant.

Théorème 5. *Considérons le système (3.3) avec Γ défini dans (3.31) où $\rho > 0$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0) , toute solution correspondante (x, e) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0| + c_3 \rho. \quad (3.34)$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

D'après l'item (i) du théorème 5, la composante en x des solutions de (3.3) converge exponentiellement mais pas nécessairement vers 0 à cause du terme $c_3 \rho$, terme qu'on peut toutefois prendre aussi petit qu'on veut. On parle de stabilité globale exponentielle *pratique* de $\mathcal{A}$ dans ce cas. Le prix à payer cependant est que plus ρ est petit, plus le temps entre deux transmissions sera petit en général. En d'autres termes, plus nous voudrions être précis, plus il faudra communiquer.

Avantages :

- simplicité de mise en oeuvre, il n'y a aucun calcul à mener pour obtenir Γ ;
- robustesse en général.

Inconvénients :

- la composante en x des solutions ne converge plus vers 0, nous perdons en précision ;
- le temps minimum d'inter-transmission n'est pas global, il devient de plus en plus petit lorsque les conditions initiales des solutions de (3.3) sont de plus en plus loin de l'attracteur $\mathcal{A}$. Cependant il existe bien un temps minimum d'inter-transmission à l'origine.

3.6 Combinaison des seuils absolu et relatif

Nous pouvons très bien combiner les deux techniques précédentes. Nous devons cette idée à Tijds Donkers et Maurice Heemels, tous deux enseignants-chercheurs à TU Eindhoven aux Pays-Bas.

Nous avons donc le critère Γ , pour tout $x, e \in \mathbb{R}^{n_x}$

$$\Gamma(x, e) = |e| - \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x| - \rho \quad (3.35)$$

où $\sigma \in]0, 1[$ et $\rho > 0$ sont deux paramètres de réglage. Ainsi, la loi d'échantillonnage garantit (sauf à l'instant initial éventuellement) l'inégalité suivante le long des solutions de (3.3)

$$|e| \leq \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x| + \rho. \quad (3.36)$$

Nous retrouvons bien à la fois le seuil relatif et le absolu. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 6. *Considérons le système (3.3) avec Γ défini dans (3.35) où $\sigma \in]0, 1[$ et $\rho > 0$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0) , toute solution correspondante (x, e) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0| + c_3 \rho. \quad (3.37)$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

Remarque. Nous pouvons aussi définir Γ de la façon suivante

$$\Gamma(x, e) = |e| - \max \left\{ \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|, \rho \right\}. \quad (3.38)$$

Ainsi, sauf à l'instant initial éventuellement, l'inégalité suivante le long des solutions de (3.3)

$$|e| \leq \max \left\{ \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|, \rho \right\}. \quad (3.39)$$

Nous retrouvons ici aussi à la fois le seuil relatif et le absolu. Le théorème 6 reste valide dans ce cas.

Avantages :

- génère souvent moins de transmissions que les deux techniques précédentes ;
- le temps minimum d'inter-transmission est global ;
- permet de palier le problème de robustesse du seuil relatif, cf. chapitre 6.

Inconvénients :

- la composante en x des solutions ne converge plus vers 0, nous perdons en précision par rapport au seuil relatif.

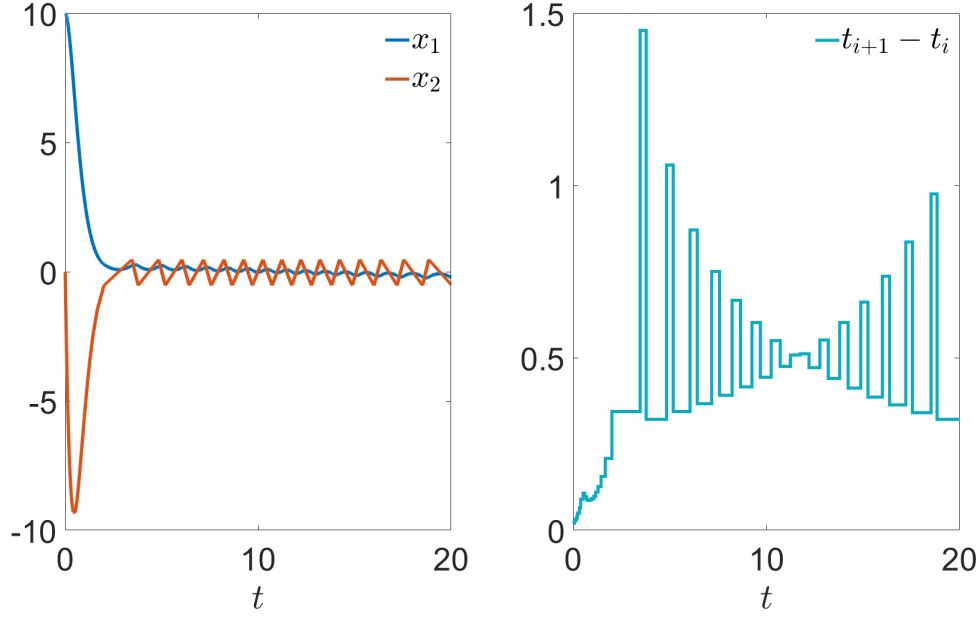


FIGURE 3.1 – État du système de l'exemple de la section 3.7.1 (gauche) et temps d'inter-transmissions (droite).

3.7 Simulations numériques

3.7.1 Seuil absolu

Soit le système (3.1) dit double-intégrateur où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. La paire (A, B) est bien contrôlable. Le gain $K = \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix}$ de (2.2) est construit, ainsi la matrice $A + BK$ est Hurwitz car ses valeurs propres sont $-2 - i$ et $-2 + i$. La figure 3.1 représente $x = (x_1, x_2)^\top$ solution de (3.3), (3.31) initialisée en $x_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}^\top$, ainsi que les temps inter-transmission associés, i.e., $t_{i+1} - t_i$, lorsque $\rho = 1$. L'état x converge bien vers un voisinage de l'origine et les instants de transmissions ne sont pas périodiques mais s'adaptent à l'état du système. Le tableau 3.1 indique les temps moyen entre deux transmissions successives (τ_{moyen}), le temps inter-transmission minimum observé (τ_{min}) et la valeur moyenne de $|x(20)|$ pour 10 simulations correspondant à 10 conditions initiales uniformément distribuées sur le cercle de rayon 10 centrée en l'origine sur l'intervalle de temps $[0, 20]$. On remarque que plus ρ est petit, plus la précision finale sur l'état en terme de norme de x est petit en général mais plus le nombre de transmissions est élevé, confirmant le compromis attendu entre précision et quantité de transmissions.

3.7.2 Seuil relatif

La technique du seuil relatif est cette fois simulé avec $\sigma \in]0, 0.4654[$. La figure 3.2 représente $x = (x_1, x_2)^\top$, qui est la solution de (3.3), (3.25) initialisée en $x_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}^\top$, ainsi que les instants d'échantillonnage associés lorsque $\sigma = 0.9 \cdot 0.4654$. L'état x converge bien exponentiellement vers l'origine contrairement au cas du seuil absolu, cf. figure 3.1. De plus, le temps inter-transmissions varie bien au cours du temps, s'adaptant ainsi à l'état du système. Le tableau 3.2 fournit les données

	$\rho = 10$	$\rho = 1$	$\rho = 0.1$
τ_{moyen}	0.7459	0.4561	0.0973
τ_{min}	0.1563	0.0156	0.0016
$ x(20) $ (moyen)	4.9499	0.5496	0.0503

TABLE 3.1 – Temps moyen entre deux transmissions successives (τ_{moyen}), temps minimum observé (τ_{min}) et valeur moyenne de $|x(20)|$ pour 10 conditions initiales différentes sur l'intervalle de temps $[0, 20]$ pour l'exemple de la section 3.7.1.

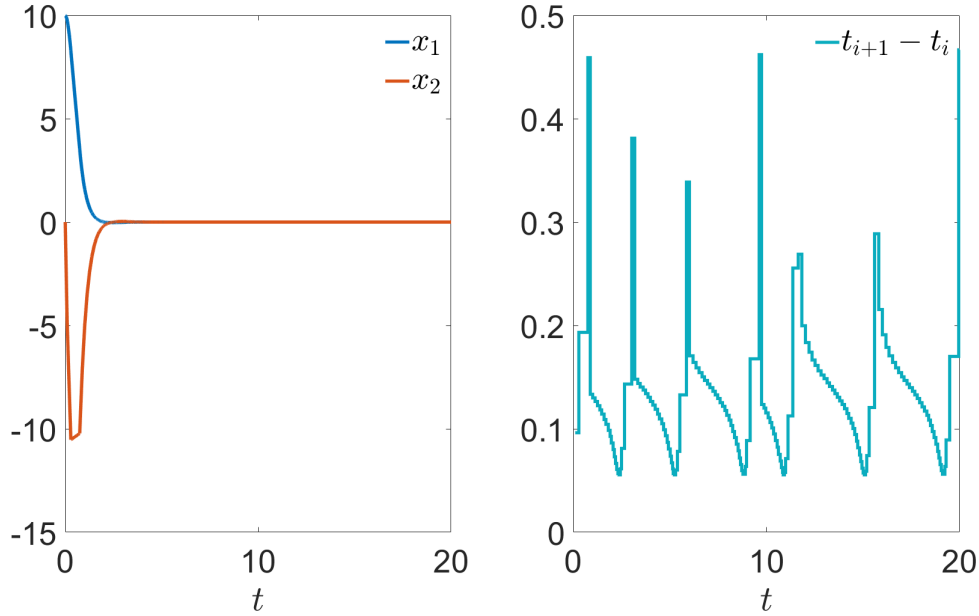


FIGURE 3.2 – État du système de l'exemple de la section 3.7.2 (gauche) et temps d'inter-transmissions (droite).

correspondantes à celle du tableau 3.1 pour la technique du seuil relatif et différentes valeurs de σ . Une bien plus grande précision en terme de la norme moyenne de x à l'instant final $t = 20$ est observé par rapport au seuil absolu, cf. tableau 3.1. On remarque que lorsque $\sigma = 0.1 \cdot 0.4654$, les valeurs de τ_{moyen} et de τ_{min} obtenues sont du même ordre de grandeur que pour $\rho = 0.1$ dans le tableau 3.1, mais la performance en terme de $|x(20)|$ et donc de précision est bien meilleure avec le seuil relatif (facteur 10^{16}).

3.7.3 Combinaison des seuils absolu et relatif

La figure 3.3 représente $x = (x_1, x_2)^T$, solution de (3.3), (3.35) initialisée en $x_0 = [10, 0]^T$, ainsi que les instants d'échantillonnage associés lorsque $\sigma = 0.9 \cdot 0.4654$ et $\rho = 1$. Les valeurs prises par $t_{i+1} - t_i$ peuvent être bien plus grandes que celles observées avec les seuils absolu et absolu pris séparément. Le tableau 3.3 fournit les données correspondantes à celle des tableaux 3.1 et 3.2. Celui-ci confirme le compromis offert par la combinaison des seuils absolu et relatif en terme de communication et de précision.

Paramètre du seuil	$0.9 \cdot 0.4654$	$0.5 \cdot 0.4654$	$0.1 \cdot 0.4654$
τ_{moyen}	0.1229	0.0990	0.0500
τ_{min}	0.0554	0.0434	0.0212
$ x(20) $ (moyen)	$3.5220 \cdot 10^{-20}$	$3.1305 \cdot 10^{-19}$	$8.4807 \cdot 10^{-18}$

TABLE 3.2 – Temps moyen entre deux transmissions successives (τ_{moyen}), temps minimum observé (τ_{min}) et valeur moyenne de $|x(20)|$ pour 10 conditions initiales différentes sur l'intervalle de temps $[0, 20]$ pour l'exemple de la section 3.7.2.

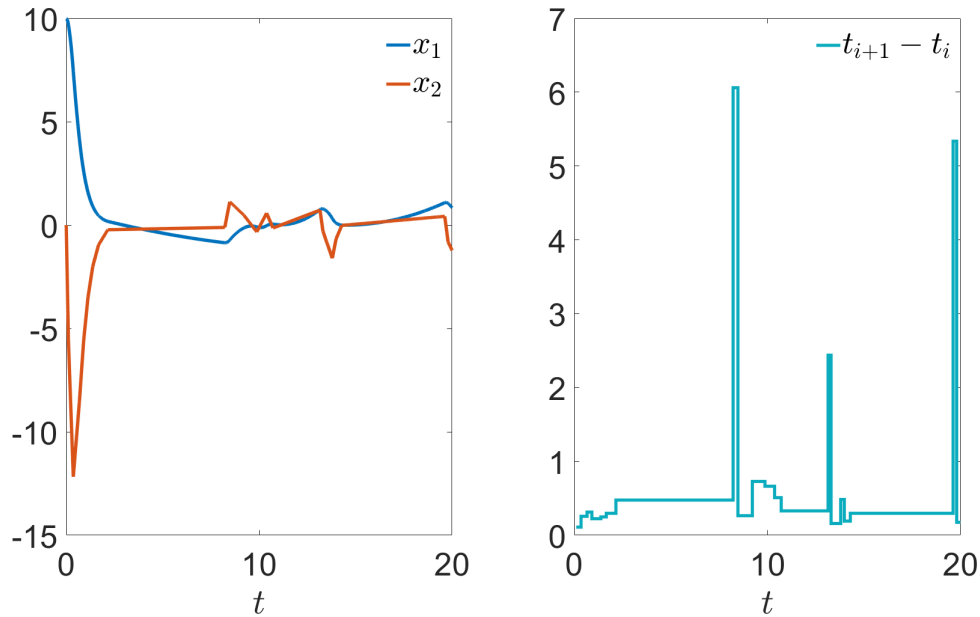


FIGURE 3.3 – État du système de l'exemple de la section 3.7.3 (gauche) et temps d'inter-transmissions (droite).

3.8 Lois dynamiques

3.8.1 Seuil décroissant sur $V(x)$

Revenons à la technique du seuil relatif. L'idée est de définir Γ de telle sorte que l'item (ii) du théorème 3 soit vérifiée, c'est-à-dire que tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x}$ tel que $\Gamma(x, e) \leq 0$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -a_3 |x|^2. \quad (3.40)$$

Nous forçons ainsi toute solution (x, e) de (3.3) de vérifier

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -a_3 |x(t)|^2, \quad (3.41)$$

pour tout $t > 0$. Ainsi, nous pouvons montrer que

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0, \quad (3.42)$$

	$\rho = 10$	$\rho = 1$	$\rho = 0.1$
τ_{moyen}	0.6213	0.6623	0.4875
τ_{min}	0.1393	0.0681	0.0570
$ x(20) $ (moyen)	0.5271	1.4833	0.0414

TABLE 3.3 – Temps moyen entre deux transmissions successives (τ_{moyen}), temps minimum observé (τ_{min}) et valeur moyenne de $|x(20)|$ pour 10 conditions initiales différentes sur l'intervalle de temps $[0, 20]$ pour l'exemple de la section 3.7.3 avec $\sigma = 0.9 \cdot 0.4654$.

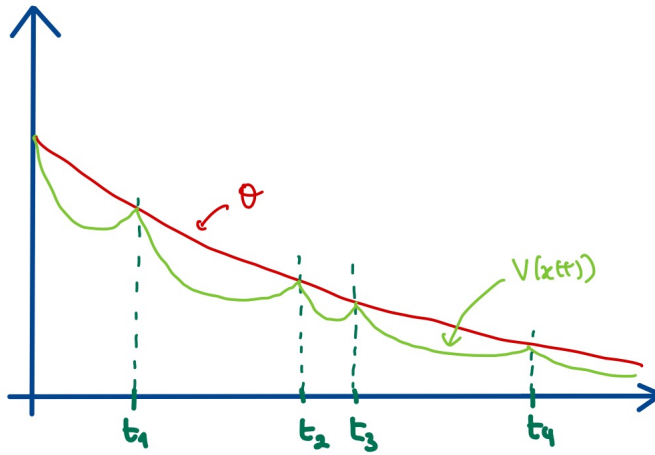


FIGURE 3.4 – Illustration d'un seuil possible à imposer sur $V(x)$.

pour tout $t > 0$, dès que $x(0) \neq 0$. Nous en déduisons que $V(x(t))$ décroît vers 0 et $x(t)$ converge bien (exponentiellement vite) vers 0.

Si nous souhaitons garantir que $V(x(t))$ converge vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, il n'est pas nécessaire d'imposer (3.42). En effet, nous pouvons tolérer que la dérivée $V(x(t))$ soit positive du moment que $V(x(t))$ reste plus petit ou égal qu'un seuil qui décroît vers 0 avec le temps, comme l'illustre la figure 3.4.

Introduisons la variable $\theta \in \mathbb{R}$ pour définir le seuil décroissant sur $V(x)$. Cette variable ne peut pas décroître plus rapidement que $V(x(t))$ en l'absence d'échantillonnage, qui est le cas idéal, autrement le phénomène de Zénon se produirait. Or, nous avons pour toute solution x du système en temps continu (en absence d'échantillonnage) $\dot{x} = (A + BK)x$,

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = -x(t)^T Q x(t), \quad (3.43)$$

pour tout $t > 0$. Soit $\mu > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z^T Q z \geq \mu V(z)$. Nous pouvons par exemple prendre $\mu = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$; il est néanmoins possible de déterminer un plus grand μ en général à l'aide de solveur d'inégalités linéaires matricielles (LMI) comme Sedumi ou Yalmip sous Matlab. Ainsi,

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -\mu V(x(t)). \quad (3.44)$$

La constante μ correspond à la vitesse de décroissance idéale de $V(x(t))$. Nous sommes prêts pour définir les dynamiques de la variable seuil θ

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -(1 - \sigma)\mu\theta \\ \theta^+ &= \theta\end{aligned}\tag{3.45}$$

où $\sigma \in]0, 1[$ est un paramètre de réglage. Nous remarquons que θ décroît vers 0 moins vite que $V(x(t))$ le long des solutions du système continu $\dot{x} = (A + BK)x$ d'après (3.44) puisque $\sigma \in]0, 1[$.

L'idée est de définir Γ comme

$$\Gamma(x, \theta) = V(x) - \theta.\tag{3.46}$$

Ainsi, $\Gamma(x, \theta) \leq 0$ est équivalent à

$$V(x) \leq \theta.\tag{3.47}$$

Puisque θ converge vers 0 exponentiellement vite, $V(x)$ en fait de même le long des solutions de (3.3). Plus formellement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 7. *Considérons le système (3.3) augmenté de (3.45) avec Γ défini dans (3.46) où $\sigma \in]0, 1[$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0, θ_0) , toute solution correspondante (x, e, θ) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|(x(t), \theta(t))| \leq c_1 e^{-c_2 t} |(x_0, \theta_0)|.\tag{3.48}$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

Le théorème 7 garantit que l'ensemble $\{(x, e, \theta) : x = 0, \theta = 0\}$ est globalement exponentiellement stable. Nous devons cette technique à Xiaofeng Wang et Michael Lemmon de l'université de Notre-Dame aux États-Unis en 2008.

Remarque. En réalité, la définition de Γ dans (3.46) induit le phénomène de Zénon car après une transmission $V(x) = \theta$ et nous devrions transmettre à nouveau. Nous évitons cet artefact en ne générant des transmissions que lorsque $V(x) \geq \theta$ et $\frac{\partial V(x)}{\partial x}((A + BK)x + BKe) \geq -\mu V(x)$.

Remarque. Nous pouvons tout à fait combiner cette technique avec les précédentes.

Avantages :

- génère souvent moins de transmissions que les techniques précédentes ;
- le temps minimum d'inter-transmission est global ;
- préserve la stabilité globale exponentielle.

Inconvénients :

- nécessite l'implémentation d'une variable supplémentaire θ ;
- manque de robustesse due à une singularité du temps d'inter-transmission quand $x_0 = 0$.

3.8.2 Loi dynamique d'Antoine Girard

Une technique particulièrement populaire consiste à filtrer le critère de seuil relatif [Gir15]. En notant que la condition $|e| \leq \sigma|x|$ de la section 3.7.2 est équivalente à $|e|^2 \leq \sigma^2|x|^2$, la variable scalaire η est introduite dont la dynamique est, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= -\lambda\eta(t) + \left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}\right)^2 |x(t)|^2 - |e(t)|^2 \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\\ \eta(t_i^+) &= \eta(t_i),\end{aligned}\tag{3.49}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre de réglage et $\eta(0) \geq 0$. On remarquera que la variable η filtre bien la condition donnée par le seuil relatif $\left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}\right)^2 |x|^2 - |e|^2$. La fonction critère Γ est alors, pour $x, e \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\Gamma(x, e, \eta) = -\eta - \theta \left(\left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} \right)^2 |x|^2 - |e|^2 \right)\tag{3.50}$$

où $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est un paramètre de réglage additionnel. Dans ce cas, le long des solutions de (3.3), (3.49) et (3.50), $\eta + \theta \left(\left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} \right)^2 |x|^2 - |e|^2 \right) \geq 0$. On retrouve ainsi la technique de seuil relatif lorsque $\theta \rightarrow \infty$. Les mêmes propriétés de stabilité que pour le seuil relatif suivent et (3.4) sont vérifiées. De plus, pour un état auquel une transmission a lieu avec Γ de (3.50), le prochain instant de transmission par cette loi dynamique se produira plus tard que celui obtenu avec le seuil relatif (3.31). Pour une comparaison plus détaillée de ces deux techniques, voir [Gir15].

Le système complet s'écrit

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BKe \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BKe \\ \dot{\eta} &= -\lambda\eta + \left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} \right)^2 |x|^2 - |e|^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & -\eta - \theta \left(\left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} \right)^2 |x|^2 - |e|^2 \right) \leq 0 \\ & -\eta - \theta \left(\left(\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} \right)^2 |x|^2 - |e|^2 \right) \geq 0. \end{aligned}\tag{3.51}$$

$$\left. \begin{aligned} x^+ &= x \\ e^+ &= 0 \\ \eta^+ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 8. *Considérons le système (3.51) avec Γ défini dans (3.35) où $\sigma \in]0, 1[$ et $\rho > 0$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale $(x_0, 0, 0)$, toute solution correspondante (x, e, η) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0|.\tag{3.52}$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

Remarque. Les techniques du seuil absolu ou la combinaison seuils absolu et relatif admettent elles aussi une version dynamique, cf. [PPT22].

3.8.3 Conclusion

Le choix de la loi de transmission dépend des besoins et des connaissances du système de l'utilisateur. La technique du seuil absolu ne requiert aucune connaissance sur le système mais présente quelques désavantages mentionnés ci-dessus. D'autre part, la technique du seuil relatif garantit des propriétés de stabilité et sur le temps minimum entre deux transmissions plus fortes, mais requiert plus de connaissance pour obtenir le seuil en question. Par ailleurs, lorsqu'il est possible d'implémenter un système scalaire dynamique pour générer une des variables η vues aux sections 3.8.1 et 3.8.2, celles-ci sont à privilégier. La discussion sur les propriétés de ces lois de transmissions se poursuivra aux chapitres 5 et 6 aux cas de la commande par retour de sortie et de la commande robuste.

À noter également que les lois de transmissions présentées dans cette section ont originellement été développées pour des systèmes non-linéaires. Cela implique qu'il est tout à fait possible de mettre en place de telles stratégie de communication lorsque le système à contrôler a un modèle non-linéaire ; un exemple est présenté au chapitre 7. De plus, toutes ces techniques sont également robustes aux retards de transmissions, inévitables en pratique, du moment que ceux-ci restent petits, comme cela est expliqué dans [DBH17, Tab07].

Chapitre 4

Temps d'inter-transmission : quelles garanties ?

4.1 Introduction

Nous venons de voir plusieurs lois d'échantillonnage au chapitre 4. À y regarder de plus près, nous n'avons pas dit grand chose sur les temps d'inter-transmission, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps entre deux instants de transmission successifs. Les seules garanties présentées assurent l'existence d'un temps minimum strictement positif entre deux transmissions, temps qui peut être le même pour toute condition initiale ou dépendant de l'ensemble de conditions initiales. C'est important mais cela ne nous dit rien sur l'évolution du temps d'inter-transmission. Or, rappelons que l'objectif de la commande à échantillonnage événementiel est de transmettre sporadiquement. Il est donc fondé de vouloir en savoir plus sur la quantité de transmissions générées par la loi considérée.

Il s'avère que nous n'avons pas la réponse à ces questions dans la plupart des cas. En d'autres termes, pour une loi d'échantillonnage donnée, il nous est très difficile de fournir des garanties sur le comportement des temps de transmission en général, autre que l'existence d'un temps minimum. Pour palier ce manque, nous recourons aux simulations numériques. De multiples conditions initiales du système sont considérées, puis nous observons les instants de transmissions obtenus sur un intervalle de temps fixé.

Il existe néanmoins un cas pour lequel nous pouvons en dire plus. Nous avons proposé une étude en 2022 en collaboration avec Ricardo Sanfelice (Université de Californie Santa Cruz, États-Unis) et Maurice Heemels (TU Eindhoven, Pays-Bas) [PSH22] qui répond au problème pour la technique du seuil relatif (cf. chapitre 4.4) lorsque la dimension du système à contrôler est de 1 ou de 2. Nous passons en revue ces résultats dans ce chapitre.

4.2 Problématique

Rappelons que nous considérons le système suivant

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BKe \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BKe \\ x^+ &= x \\ e^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{quand } \Gamma(x, e) \leq 0, \\ &\text{quand } \Gamma(x, e) \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

et que la technique du seuil relatif correspond à l'expression de Γ suivante pour tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_e}$

$$\Gamma(x, e) = |e| - \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|, \quad (4.2)$$

où $\sigma \in]0, 1[$ est un paramètre de réglage et les matrices P et Q sont symétriques, définies positives et satisfont $(A + BK)^\top P + P(A + BK) = -Q$, cf. chapitre 3.

Par commodité, nous réécrivons (4.3) sous la forme

$$\Gamma(x, e) = |e| - \nu |x|, \quad (4.3)$$

où $\nu := \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} > 0$. Ainsi nous avons la garantie que le système (4.1) vérifie bien les propriétés de stabilité désirée, cf. théorème 4 du chapitre 4.

L'objectif de cette section est de fournir des propriétés analytiques sur la suite des instants de transmission t_i , $i \in \mathcal{I}$, générée par (4.3). Nous devons pour cela définir rigoureusement ce que nous appelons le temps d'inter-transmission, qui correspond à $t_{i+1} - t_i$. On supposera que $e(0) = 0$, c'est-à-dire qu'une transmission a lieu à l'instant initial, ainsi pour toute condition initiale¹ $x_0 \neq 0$, nous définissons

$$\tau_\nu(x_0) := \inf \{ \eta > 0 : |x_0 - x(\eta)| = \nu |x(\eta)| \}. \quad (4.4)$$

La quantité $\tau_\nu(x_0)$ correspond à $t_1 - t_0$ sachant que $t_0 = 0$, c'est-à-dire le premier temps d'inter-transmission.

Le temps d'inter-transmission est donc défini à l'instant $t \in [t_i, t_{i+1})$ par $\tau_\nu(x(t_i))$. Puisque $\hat{x}(t) = x(t)$ pour $t \in [t_i, t_{i+1})$, $\tau_\nu(x(t_i)) = \tau_\nu(\hat{x}(t))$.

Nous sommes prêts pour l'analyse de $\tau_\nu(\hat{x})$. Nous distinguons différent cas selon la dimension de l'état x du système noté n_x .

4.2.1 Cas scalaire $n_x = 1$

Lorsque l'état x est scalaire, nous avons le résultat suivant, qui peut surprendre (mais qui est vrai !).

Théorème 9. *Si $A \neq 0$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,*

$$\tau_\nu(\hat{x}(t)) = \frac{1}{A} \ln \left(\frac{\frac{A}{1+\nu} + BK}{A + BK} \right). \quad (4.5)$$

1. Nous excluons $x_0 = 0$ car le phénomène de Zénon se produit dans ce cas : le temps d'inter-transmission est nul.

Si $A = 0$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$\tau_v(\hat{x}(t)) = \frac{\nu}{|BK|}(1 + \nu). \quad (4.6)$$

Nous remarquons que l'expression de $\tau_v(\hat{x}(t))$ dans le théorème 9 ne dépend ni du temps t , ni de la condition initiale x_0 . Cela signifie que l'échantillonnage est *périodique* (tout ça pour ça !).

Nous en déduisons que la technique du seuil relatif n'a pas d'intérêt dans le cas scalaire puisqu'elle revient à échantillonner périodiquement. Passons au cas où $n_x = 2$, nous parlons alors de systèmes planaires.

4.2.2 Cas planaire $n_x = 2$

Nous distinguons différents cas selon la nature des valeurs propres de $A + BK$, que nous notons λ_1 et λ_2 . Par ailleurs, pour ne pas rendre la présentation trop technique, les résultats sont présentés de façon informelle. Dernier point et pas des moindres, ces résultats sont valides lorsque ν est petit ce qui est généralement le cas en pratique pour pouvoir garantir la stabilité du système (4.1).

4.2.3 λ_1 et λ_2 complexes conjuguées, non-réelles

Nous pouvons écrire $\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a - ib$ où $a < 0$ et $b > 0$. Dans ce cas, $\tau_v(\hat{x})$ est une fonction $\frac{\pi}{b}$ -presque périodique et ce, quelque soit la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^{2,*}$. Par "presque" périodique, nous entendons que $\tau(\hat{x})$ a une période qui varie autour de $\frac{\pi}{b}$ et l'écart est de l'ordre de ν . De plus, le choix de x_0 n'a quasiment aucun impact sur les valeurs prises par $\tau(\hat{x})$.

Considérons l'exemple suivant pour illustrer ces résultats

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (4.7)$$

Nous avons sélectionné $K = [-3 \ -7]$. Ainsi les valeurs propres de $A + BK$ sont

$$\lambda_1 = -2 + i \quad \lambda_2 = -2 - i. \quad (4.8)$$

La matrice Q est l'identité et nous en avons déduit la matrice P associée. La valeur maximale de ν est de 0.0728.

La théorie nous dit que les temps d'inter-transmission doivent osciller avec une période proche de π puisque $b = 1$ ici. C'est bien ce que nous observons sur la figure 4.1. L'écart entre la période théorique, π , et celle observée augmente avec la valeur de ν (noté σ sur la figure).

La figure 4.2 quant à elle illustre le fait que les valeurs du temps d'inter-transmission sont peu affectées par le choix de la condition initiale x_0 .

Nous déduisons de ces résultats qu'il suffit de générer une seule simulation sur $\frac{\pi}{b}$ unités de temps pour connaître le temps d'inter-transmission pour tout temps futur et toute condition initiale x_0 .

4.2.4 λ_1 et λ_2 réelles et distinctes

Supposons que $\lambda_1 > \lambda_2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{2,*}$, dans ce cas nous avons l'une des propriétés suivantes :

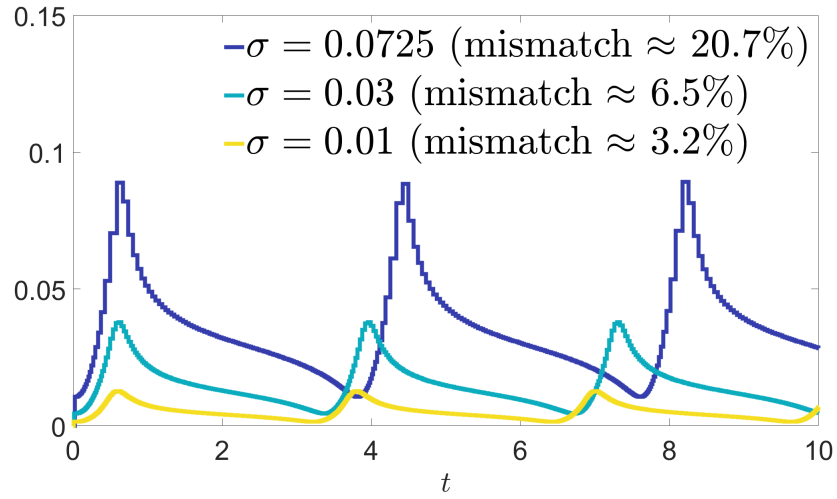


FIGURE 4.1 – Temps inter-transmission pour différentes valeurs de ν (σ dans la légende).

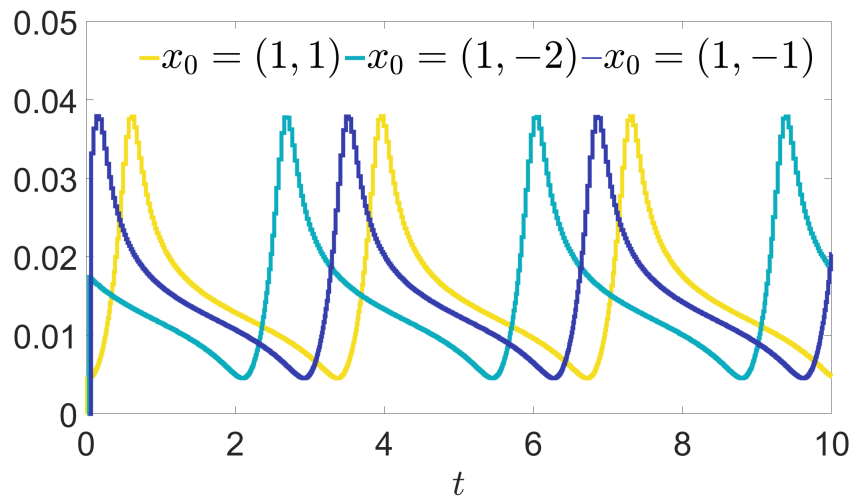


FIGURE 4.2 – Temps inter-transmission pour différentes conditions initiales.

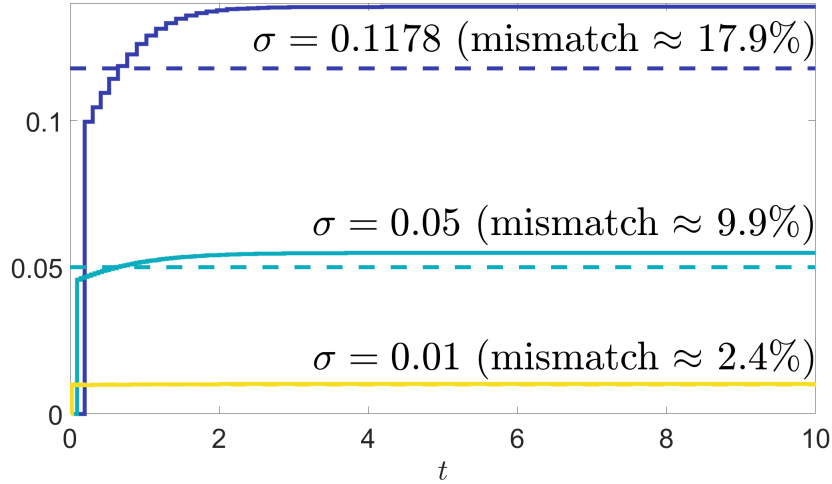


FIGURE 4.3 – Temps d'inter-transmission (ligne continue) et valeur de $\frac{\nu}{|\lambda_1|}$ (ligne pointillée) pour différentes valeurs de ν (notée σ).

- $\tau_\nu(\hat{x}(t))$ converge approximativement vers $\frac{\nu}{|\lambda_1|}$ quand $t \rightarrow \infty$;
- $\tau_\nu(\hat{x}(t)) \approx \frac{\nu}{|\lambda_2|}$ pour tout $t \geq 0$.

Ainsi, soit $\tau_\nu(\hat{x})$ converge vers une constante, soit il est toujours proche constante. Nous n'avons pas été capables de reproduire le second cas en simulation, à chaque fois le premier se produit comme l'illustre les résultats de simulation de la figure 4.3 pour le même exemple que précédemment avec $K = [0 \ -6]$ de telle sorte que $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$. La valeur maximale de ν est 0.1179 dans ce cas.

Nous constatons sur la figure 4.3 que les temps d'inter-transmission convergent bien asymptotiquement vers un voisinage de $\frac{\nu}{\lambda_1} = \nu$ et que l'écart entre cette borne théorique et celle observée grandit avec ν .

4.2.5 λ_1 et λ_2 réelles, égales et de multiplicité géométrique 2

Rappelons que la multiplicité géométrique correspond à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2$

Dans ce cas, nous avons que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^{2,*}$ et tout $t \geq 0$,

$$\tau_\nu(\hat{x}(t)) \approx \frac{\nu}{|\lambda_1|}. \quad (4.9)$$

En d'autres termes, l'échantillonnage est "quasiment" périodique comme dans le cas scalaire !

À noter que lorsque la multiplicité géométrique des valeurs propres est de 1, nous n'avons pas de réponse à la question. Nous conjecturons que $\tau_\nu(\hat{x}(t))$ converge approximativement vers $\frac{\nu}{|\lambda_1|}$ quand $t \rightarrow \infty$ dans ce cas.

4.3 Conclusion

Beaucoup reste à faire sur l'étude du temps d'inter-transmission, qui semble être une étape importante vers le transfert industriel de la commande à échantillonnage événementiel.

Dans le chapitre suivant, nous discutons de la validité des lois d'échantillonnage présentées au chapitre 4 lorsqu'on dépasse le cadre de la commande par retour d'état et lorsqu'on prend en compte les perturbations et les incertitudes de modèle.

Chapitre 5

Commande par retour de sortie

5.1 Modèle avec sortie

Jusqu'à présent, l'état x du système fut supposé mesuré par des capteurs et disponible pour la commande de telle sorte que les expressions de u dans (2.2) et du critère de transmission dépendent de x , cf. chapitre 3. En pratique, toutes les variables d'état qui composent le vecteur x ne sont pas toujours mesurées mais seule une sortie $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ l'est où $n_y \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dans ce cas, le contrôleur ne pourra dépendre que de y (et non de x) : on parle de commande par retour de sortie. Il est légitime de se demander si les résultats vus jusqu'à présent sont transposables dans ce cas. Pour cela, il faut dans un premier temps équiper le système (2.1) d'une équation de sortie ce qui conduit à, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t_i) & \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{5.1}$$

où x , u , A et B ont la même signification qu'au chapitre 2 et $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée. La matrice C est réelle, de dimension $n_y \cdot n_x$ et non-inversible, autrement cela reviendrait à mesurer tout l'état x .

5.2 Phénomène de Zénon

En suivant l'approche par émulation, une loi de commande statique (i.e., qui ne fait pas intervenir de variable additionnelle) par retour de sortie de la forme suivante est construite

$$u = Ky.\tag{5.2}$$

Cette loi est supposée garantir la stabilité globale exponentielle de l'origine de (5.1), c'est-à-dire que $A + BKC$ est Hurwitz. La synthèse d'une telle matrice de gain K est beaucoup plus ardue que pour le retour d'état du chapitre 2, cela reste néanmoins possible dans certains cas. Si cela pose problème, une alternative consiste à construire un contrôleur basé observateur lorsque le système (5.1) observable (détectable suffit en réalité), i.e., que le rang de la matrice $[C^\top (CA)^\top \dots (CA^{n_x-1})^\top]^\top$ est n_x . Les résultats présentés par la suite s'appliquent également à ce type de contrôleurs.

Une fois l'échantillonnage pris en compte, la loi de commande devient, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$u(t) = K\hat{y}(t) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad (5.3)$$

où $\hat{y}$ est la sortie échantillonnée dont les dynamiques sont, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}(t) &= 0 \\ \hat{y}(t_i^+) &= y(t_i) = Cx(t_i). \end{aligned} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\quad (5.4)$$

Il est naturel de définir l'erreur e induite par l'échantillonnage par

$$e = \hat{y} - y. \quad (5.5)$$

Exercice. Obtenir le modèle hybride dont le vecteur d'état est $(x^\top, e^\top)^\top$.

En suivant le chapitre 2, le modèle hybride suivant est obtenu, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BKC)x(t) + BKe(t) \\ \dot{e}(t) &= -C(A + BKC)x(t) - CBKe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (5.6)$$

Exercice. Supposons qu'il existe une fonction $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ définie positive, radialement non bornée et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout x, e ,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} ((A + BKC)x + BKe) \leq -\varepsilon|x|^2 - |y|^2 + |e|^2. \quad (5.7)$$

En déduire une loi de transmission de sortie ayant un seuil relatif.

En appliquant la même approche (omise dans cet article et qui repose sur une analyse de Lyapunov) que celle qui conduit à la condition (3.25), il est possible de déduire une version basée sortie de la technique du seuil relatif

$$|e| \leq \sigma|y|, \quad (5.8)$$

et donc

$$\Gamma(y, e) = |e| - \sigma|y|, \quad (5.9)$$

où σ est une constante suffisamment petite dont la valeur maximale dépend de A, B, C et K . Le critère (5.9) présente néanmoins un défaut majeur. Lorsque $y = 0$, pour garantir (5.8) il faut que $e = 0$ et donc transmettre. Cependant, après une transmission y reste égale à 0, il faut donc encore transmettre : le phénomène de Zénon se produit. C'est la principale difficulté du problème de commande événementielle par retour de sortie : le phénomène de Zénon peut se produire et la propriété (3.4) n'est alors pas vérifiée, cf. [DHvdWH11, BH14]. Ce problème apparaissait déjà dans le cas du retour d'état pour la technique du seuil relatif, cf. section 3.7.2, mais uniquement lorsque $x = 0$ ce qui ne se produit que si la solution est initialisée en $x = 0$, qui est le point de fonctionnement désiré. Ici le problème s'élargit

en quelque sorte à l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : Cx = y = 0\}$ et l'astuce invoquée à la section 3.7.2 consistant à définir $t_i = \infty$ lorsque $x = 0$ ne s'applique plus.

5.3 Passage des lois de transmission au cas du retour de sortie

La technique du seuil relatif n'est pas donc adaptée au retour de sortie. Celle du seuil absolu l'est en revanche. En effet, après chaque transmission, il faudra un certain temps à la norme de l'erreur e pour atteindre le seuil absolu $\rho > 0$. Il est ainsi possible d'établir que la propriété (3.4) est satisfaite comme dans la section 3.7.1. Quant à la stabilité, une propriété exponentielle pratique s'en suit toujours comme dans la section 3.7.1.

Plus généralement, le tableau 5.1 résume si les lois présentées au chapitre 3 permettent ou non de satisfaire les objectifs de stabilité et sur le temps minimum entre deux transmissions par retour de sortie. Pour plus d'informations, cf. [BH14].

Seuil relatif	Seuil absolu	Combinaison seuils absolu et relatif	Loi dynamique de [Gir15]	Seuil décroissant sur $V(x)$
non	oui	oui	non	non

TABLE 5.1 – Résumé des lois de transmission adaptables à la commande par retour de sortie et aussi à la présence de perturbations exogènes que nous verrons au chapitre 6.

Il ne faut néanmoins pas écarter toutes les lois de transmission vues jusqu'à présent. Il est en effet tout à fait possible de les combiner avec un seuil absolu (on parle aussi de régularisation spatiale) et ainsi garantir à la fois (3.4) et la propriété de stabilité désirée, cf. [BH14]. Dans ce cas, la propriété (3.4) sera vérifiée et il est possible de sélectionner les paramètres du critère de transmission de telle sorte que le système à données échantillonnées exhibe une propriété de stabilité exponentielle pratique. Une autre façon de modifier systématiquement ces lois de transmission consiste à imposer un temps minimum donné entre deux transmissions comme cela est expliqué dans la suite.

5.4 Régularisation temporelle

Puisque le défi majeur de la commande événementielle par retour de sortie est de garantir l'existence d'un temps minimum strictement positif entre deux transmissions, cf. (3.4), une solution consiste à tout simplement empêcher deux transmissions successives de se produire avant que $T > 0$ unités de temps de soient écoulées, où $T > 0$ est un paramètre de réglage : on parle de **régularisation temporelle**. Ainsi (3.4) sera a fortiori satisfait avec $\underline{\tau} = T$.

Il est nécessaire pour se faire de définir la variable τ afin de mesurer le temps écoulé depuis la dernière transmission. Les dynamiques de τ sont, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} \dot{\tau}(t) &= 1 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\\ \tau(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

À chaque transmission, τ est mise à jour à 0 et τ permet ainsi de compter le temps écoulé depuis.

Cela donne lieu au système hybride suivant lorsque le critère de transmission Γ de départ dépend de y et de e

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = (A + BK)x + BKe \\ \dot{e} = -C(A + BK)x - CBKe \\ \dot{\tau} = 1 \end{array} \right\} \Gamma(y, e) \leq 0 \text{ ou } \tau \in [0, T],$$

$$\left. \begin{array}{l} x^+ = x \\ e^+ = 0 \\ \tau^+ = 0 \end{array} \right\} \Gamma(y, e) \geq 0 \text{ et } \tau \geq T. \quad (5.11)$$

Dans (5.11), une transmission ne peut se produire que lorsque T unités de temps depuis la dernière transmission se sont écoulées, comme désiré. Tous les résultats du chapitre 3 restent vrais pour le système (5.11) lorsque T est sélectionné suffisamment petit [BDD⁺18, DT15].

Chapitre 6

Commande robuste

La robustesse est une question fondamentale de l'automatique, qui est au cœur même du principe de boucle fermée. Par robustesse, est entendu le « bon » comportement de système contrôlé et ce malgré (i) les incertitudes auxquelles est sujet le modèle utilisé pour synthétiser le contrôleur, (ii) les possibles perturbations exogènes qui peuvent affecter les dynamiques, (iii) les bruits sur les mesures recueillies. Chacun de ces trois aspects est discuté dans ce chapitre dans le cadre de la commande événementielle. Il est supposé que l'état complet x est mesuré.

6.1 Incertitudes de modèle

Supposons que nous ayons connaissance d'un modèle dit nominal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad (6.1)$$

mais que le processus à contrôler soit plus fidèlement décrit à l'aide du modèle suivant dont les matrices $A_r(t)$ et $B_r(t)$ ne sont pas connues

$$\dot{x}(t) = A_r(t)x(t) + B_r(t)u(t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[. \quad (6.2)$$

Cette situation se produit dès lors que certains paramètres ne sont pas parfaitement connus et varient avec le temps.

La prise en compte d'incertitudes sur le modèle (2.1) conduit alors au système suivant

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad (6.3)$$

où $\Delta A(t) := A_r(t) - A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et $\Delta B(t) := B_r(t) - B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ représentent les incertitudes sur les paramètres intervenant dans la définition des matrices A et B respectivement, incertitudes qui peuvent varier dans le temps. Ces matrices sont inconnues puisque $A_r(t)$ et $B_r(t)$ sont inconnues.

Il existe de nombreuses techniques permettant de stabiliser l'origine du système en l'absence d'échantillonnage (c'est-à-dire $\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))u(t)$ où $t \geq 0$) sous certaines conditions sur $\Delta A(\cdot)$ et $\Delta B(\cdot)$ bien sûr. Une fois une telle loi de commande obtenue, il est tout à fait possible de construire des lois de transmission événementielle comme celles décrites au chapitre 3.

Par exemple la technique du seuil relatif correspondant à la fonction critère Γ dans (3.25) restera valide, il faudra sélectionner $\sigma \in]0, \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}[$ et $P, Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ sont deux matrices symétriques définies positives vérifiant l'inégalité de Lyapunov $(A + \Delta A + (B + \Delta B)K)^T P + P(A + \Delta A + (B + \Delta B)K) \leq -Q$ et la propriété (3.4) reste satisfaite avec

$$\tau = \frac{1}{\max\{|A + BK| + M_A, |BK| + M_B\}} \frac{\sigma}{\sigma + 1}, \quad (6.4)$$

où $M_A, M_B > 0$ sont des majorants des normes $|\Delta A|_{[0, \infty]} = \sup_{\tau \in [0, \infty]} |\Delta A(\tau)|$ et $|\Delta B|_{[0, \infty]} = \sup_{\tau \in [0, \infty]} |\Delta B(\tau)|$ respectivement.

La technique du seuil absolu quant à elle ne requiert aucun changement. Plus généralement, une fois la loi de commande en temps continu construite, la prise en compte des incertitudes sur le modèle ne pose pas de souci majeur et n'est pas source du phénomène de Zénon en général, contrairement aux cas traités dans la suite de ce chapitre. Pour plus d'informations, cf. [PPT22] où de tels résultats sont développés en détails dans le cadre de la commande événementielle basée données.

6.2 Perturbations exogènes

Les perturbations exogènes sont inévitables en pratique. Il est donc fondamental de s'assurer du bon fonctionnement du système contrôlé en leur présence. Le système (2.1) devient alors

$$\dot{x} = Ax + Bu + w, \quad (6.5)$$

où $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ est un vecteur de perturbations inconnues, dont certaines composantes peuvent être nulles. Le vecteur de signaux temporels correspondant à w est supposé bornée au sens de la norme infinie, i.e., $|w|_{[0, \infty]} = \sup_{\tau \geq 0} |w(\tau)| < \infty$ et mesurable au sens de Lebesgue.

Il n'est plus possible de stabiliser exponentiellement l'origine de (6.5) à cause de l'entrée inconnue w . En effet, si l'on construit une loi de commande linéaire par retour d'état

$$u = Kx \quad (6.6)$$

alors le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x} = (A + BK)x + w. \quad (6.7)$$

Dès lors le problème est que $x = 0$ n'est plus un point d'équilibre, il n'y a donc aucune chance que celui-ci soit GES.

Une notion de stabilité appropriée dans ce contexte est celle de stabilité entrée-état (exponentielle) qui se traduit ici par l'existence de trois constantes $c_1 \geq 1, c_2, c_3 > 0$ telles que pour toute solution x de (6.5) ayant pour entrée w ,

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x(0)| + c_3 |w|_{[0, t]} \text{ où } |w|_{[0, t]} = \sup_{\tau \in [0, t]} |w(\tau)|, \quad (6.8)$$

le long des solutions de (6.7). Ainsi plus la norme infinie de w est petite, plus les solutions convergeront

vers un « petit » voisinage de l'origine. La bonne nouvelle est que la même synthèse de contrôleur qu'au chapitre 2 permet de garantir cette propriété. En d'autres termes, en sélectionnant K tel que $A + BK$ est Hurwitz, le système (6.7) est stable entrée-état.

Théorème 10. *Le système (6.7) est stable entrée-état si et seulement si $A + BK$ est Hurwitz.*

Nous avons également la caractérisation de Lyapunov suivante.

Théorème 11. *Le système (6.7) est stable entrée-état si et seulement s'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ telles que pour tout x, e, w ,*

$$\begin{aligned} a_1|x|^2 &\leq V(x) \leq a_2|x|^2 \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} ((A + BK)x + w) &\leq -a_3|x|^2 + a_4|w|^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

L'implémentation de la commande échantillonnée conduit à

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} + w \\ &= (A + BK)x + BK e + w. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Le modèle global s'écrit donc

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BK e + w \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BK e - w \\ x^+ &= x \\ e^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{quand } \Gamma(x, e) \leq 0, \\ \text{quand } \Gamma(x, e) \geq 0. \end{array} \quad (6.11)$$

La satisfaction des conditions de Lyapunov du théorème 11 ne pose pas de problème. Le souci provient de la possible occurrence du phénomène de Zénon comme nous le montrons ci-dessous.

Supposons que la perturbation soit de la forme

$$w = -Ax - BK\hat{x} - \hat{x}. \quad (6.12)$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} + w \\ &= Ax + BK\hat{x} - Ax - BK\hat{x} - \hat{x} \\ &= -\hat{x}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Considérons la loi du seuil relatif que l'on écrit $|e| \leq \nu|x|$ où $\nu > 0$ comme au chapitre 4. On peut alors prouver que

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{1}{1 + \nu} \\ t_2 &= 1 - \frac{1}{(1 + \nu)^2} \\ &\vdots \\ t_i &= 1 - \frac{1}{(1 + \nu)^i} \end{aligned} \quad (6.14)$$

et donc $t_i \rightarrow 1$ quand $i \rightarrow \infty$. Ainsi, $t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$: le phénomène de Zénon se produit. Nous devons cette observation à [BH14].

La loi du seuil relatif n'est donc pas robuste aux perturbations. Ce n'est pas le cas de toutes les approches vues jusqu'à présent comme le résume le tableau 6.1.

Seuil relatif	Seuil absolu	Combinaison seuils absolu et relatif	Loi dynamique de [Cir15]	Seuil décroissant sur $V(x)$
non	oui	oui	non	non

TABLE 6.1 – Résumé des lois d'échantillonnage adaptables en présence de perturbations exogènes.

Comme au chapitre 5.3, les lois de transmission peuvent être combinées avec un seuil absolu ou une régularisation temporelle afin de garantir à la fois (3.4) et la propriété de stabilité désirée, cf. [BH14]. Dans ce cas, la propriété (3.4) sera vérifiée et il est possible de sélectionner les paramètres du critère de transmission de telle sorte que le système à données échantillonnées exhibe bien une propriété de stabilité entrée-état, cf. [DT15, BH14].

6.3 Bruits de mesure

Lorsque les mesures de l'état sont bruitées, l'information disponible pour le contrôleur s'écrit

$$x_b := x + v, \quad (6.15)$$

où $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ représente le bruit additif sur la mesure de l'état x et $x_b \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état bruité. Le même type de propriété de stabilité que dans la section 6.2 est garantie pour le système en temps continu $\dot{x} = (A+BK)x + BKv$ en sélectionnant un retour d'état $u = Kx$ où la matrice K est telle que $A+BK$ est Hurwitz.

Concernant la prise en compte de l'échantillonnage, alors que l'adaptation du modèle (3.3) aux incertitudes paramétriques et à la présence de perturbations exogènes ne pose pas de problème particulier et fut donc éludée dans les sections 6.1 et 6.2, la présence de bruit sur les mesures requiert une attention particulière. En effet, l'erreur induite par l'échantillonnage doit être revue. Il est toujours possible de définir $e := \hat{x} - x$ comme au chapitre 2, mais il est important de souligner que cette erreur ne peut pas être utilisée pour définir les instants de transmissions car elle repose sur la connaissance parfaite de l'état x or seul x_b est mesuré. En revanche, l'erreur induite par l'échantillonnage des mesures bruitées est elle disponible. Celle-ci s'écrit

$$e_b := \hat{x}_b - x_b, \quad (6.16)$$

où $\hat{x}_b$ est l'état bruité échantillonné, $\hat{x}_b(t) = x_b(t_i)$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$ où $i \in \mathcal{I}$. Les dynamiques de $\hat{x}_b$ sont

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_b(t) &= 0 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}[\\ \hat{x}_b(t_i^+) &= x_b(t_i). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ainsi,

$$e_b = e + \hat{v} - v \quad (6.18)$$

Il est alors tentant d'écrire le modèle complet dans les coordonnées (x, e_b) . Néanmoins, dans ce cas

les dynamiques en temps continu dépendent de la dérivée de v (à supposer que v est dérivable), puisque $\dot{e}_b(t) = \dot{e}(t) - \dot{v}(t)$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$ et $i \in \mathcal{I}$. Pour éviter cet écueil, une alternative est d'écrire le modèle complet dans les coordonnées $(x, e, \hat{v})$, où $\hat{v}$ est la valeur (inconnue) du signal v au dernier instant de transmission. Cela donne, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BK(e(t) + \hat{v}(t) - v(t)) \\ \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BK(e(t) + \hat{v}(t) - v(t)) \\ \dot{\hat{v}}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad (6.19)$$

$$\left. \begin{aligned} x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0 \\ \hat{v}(t_i^+) &= v(t_i) \end{aligned} \right\} .$$

Le système (6.19) ne fait intervenir que v et $\hat{v}$, il n'est donc pas nécessaire que le signal associé au bruit v soit dérivable, ce qui serait une hypothèse restrictive. Dans ce cas aussi, la technique du seuil relatif ou sa variation dynamique (cf. chapitre 3) peuvent conduire au phénomène de Zénon, cf. [BH14]. Contrairement aux sections précédentes, la technique du seuil absolu peut également ne pas convenir. En effet, dans ce contexte, celle-ci consiste à imposer la condition

$$|e_b| \leq \rho, \quad (6.20)$$

où $\rho > 0$ est toujours un paramètre de réglage. Après une transmission, e_b est bien mise à jour à zéro, cependant sans hypothèse sur les variations de v , une transmission peut alors se produire en un temps arbitrairement rapide. Pour palier ce problème, le paramètre ρ doit être sélectionné strictement plus grand que deux fois $|v|_{[0,\infty]}$. Puisque $|v|_{[0,\infty]}$ est la plupart du temps inconnue, il suffit alors de sélectionner ρ strictement deux fois plus grand qu'un majorant de $|v|_{[0,\infty]}$, qui est pour le coup souvent disponible. Il est alors possible de garantir une propriété de stabilité entrée-état pour le système (6.19) ainsi que (3.4).

Il est possible d'ajouter un tel seuil absolu aux techniques vues au chapitre 3 afin d'obtenir des lois de transmissions événementielles applicables en présence de bruits, cf. [SPH24] pour plus d'informations. Il est à noter également que l'approche par régularisation temporelle permet elle aussi d'adapter les lois de transmission à ce contexte [APDN17].

6.4 Résumé

Les deux messages principaux de cette section sont que souvent les lois de transmission événementielle ne sont pas robustes aux perturbations exogènes et aux bruits de mesure, contrairement aux incertitudes de modèle. Deux techniques génériques permettent de palier ce possible problème : l'ajout d'un seuil absolu et la régularisation temporelle. Pour d'informations, cf. [DT15, BH14, SPH24, APDN17].

Chapitre 7

Validation expérimentale

Avant de passer aux conclusions, cette section présente des résultats expérimentaux d'une loi de commande événementielle pour la poursuite de trajectoire d'un robot mobile.

7.1 Objectif

L'objectif est de piloter automatiquement via un réseau sans fil un robot mobile afin que celui-ci suive une trajectoire désirée. Les dynamiques du robot sont représentées par le modèle ci-dessous, pour $i \in \mathcal{I}$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t_i) \cos(x_3(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t_i) \sin(x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= u_2(t_i) \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad (7.1)$$

où $x_1, x_2(t) \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées cartésiennes du robot, $x_3(t)$ est l'angle entre le cap et l'axe des abscisses à l'instant $t \geq \mathbb{R}_{\geq 0}$, quant à $u_1(t_i)$ et $u_2(t_i)$, il s'agit des entrées échantillonnées. Le vecteur d'état complet est noté $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et le vecteur d'entrée de commande $u := (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, comme dans les sections précédentes. Le modèle (7.1) est non-linéaire contrairement à (2.1), cependant, comme cela est mentionné au chapitre 3, les techniques présentées jusqu'à présent sont transposables, sous certaines conditions vérifiées ici, aux systèmes non-linéaires.

Le but est donc de déterminer l'expression de u ainsi que la suite des instants de transmissions afin que quelle que soit la solution de (7.1), celle-ci suive la trajectoire de référence $t \mapsto x_r(t) := (x_{r,1}(t), x_{r,2}(t), x_{r,3}(t))$, qui est une trajectoire admissible de (7.1). Ce dernier point signifie qu'il existe une condition initiale et un vecteur de signaux d'entrée $u_r : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ tel que x_r est solution de (7.1). Puisque la trajectoire de référence est définie par l'utilisateur, le contrôleur la connaît ainsi que u_r . Par poursuite de trajectoire, il est entendu que $x(t) - x_r(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ quelle que soit la condition initiale de x , tout en garantissant la propriété (3.4).

Il est temps de décrire la plateforme expérimentale dans les grandes lignes ; pour plus de détails voir [PBG⁺15].

7.2 Plateforme

Une caméra permet de mesurer le vecteur x à haute fréquence. Ces mesures sont transmises via un réseau filaire haut débit à l'ordinateur sur lequel est implémenté le contrôleur. De par la haute fréquence des mesures et les propriétés du réseau entre la caméra et l'ordinateur, il est supposé que l'état $x(t)$ est disponible à tout instant $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le contrôle. Le contrôleur évalue à tout instant le critère de transmission ; en réalité, cela est fait de façon périodique mais cet échantillonnage peut être négligé. Lorsque le critère est positif, le contrôleur émet la nouvelle valeur de la loi de l'entrée u vers le robot via un réseau sans fil, comme l'illustre la figure 7.1. Le robot est un modèle Khepera III.

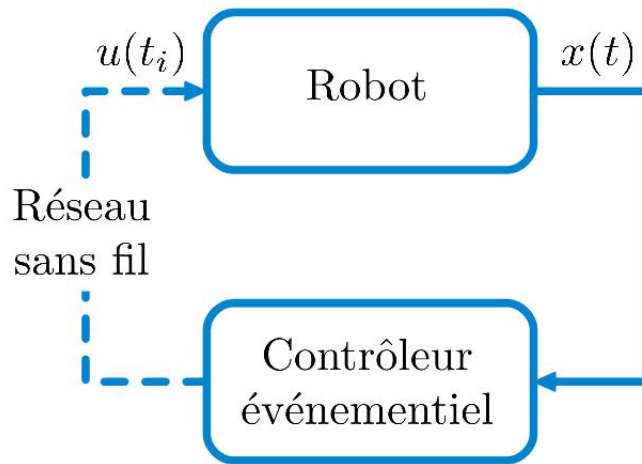


FIGURE 7.1 – Commande d'un robot mobile via un réseau sans fil.

7.3 Loi de commande événementielle

L'approche par émulation est suivie pour construire la loi de commande événementielle. Ainsi, la loi de commande fut construite en ignorant la présence du réseau sans fil et l'échantillonnage induit en utilisant la technique du « backstepping » selon [JN97]. Quant à la loi de transmission, celle-ci est une adaptation de la technique combinant seuils relatif et absolu afin de répondre aux spécificités du contexte, cf. [PBG⁺15].

7.4 Résultats expérimentaux

La figure 7.2 représente les résultats obtenus pour une trajectoire de référence décrivant une ellipse. Lorsque la loi de transmission est événementielle, le tracé est en bleu et les cercles représentent les instants auxquels une transmission se produit via le réseau sans fil. Comme le suggère la figure 7.2, les transmissions sont plus fréquentes lorsque le robot doit changer de cap et se font sporadiques lorsque ce n'est pas le cas. La loi de commande remplit ainsi sa mission en ne communiquant que

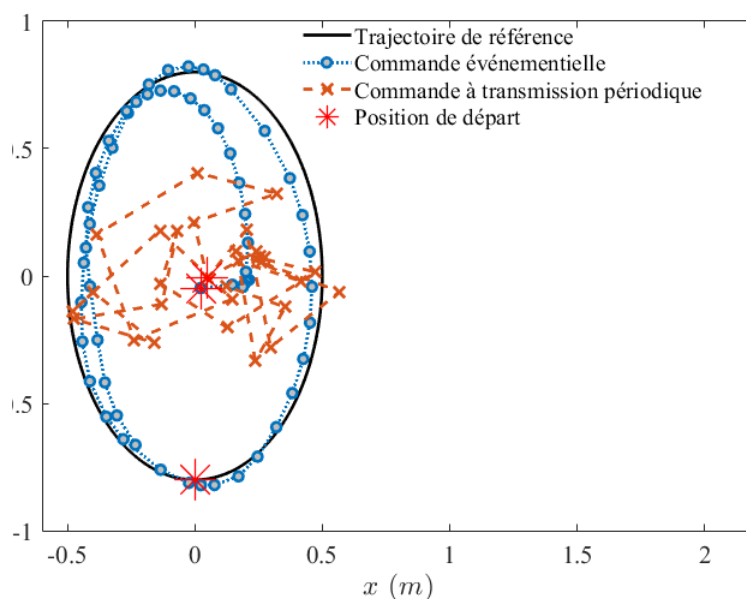


FIGURE 7.2 – Résultats expérimentaux pour une trajectoire de référence décrivant une ellipse. Les positions initiales du robot sont indiquées par les points rouges. Les cercles ou croix représentent une transmission.

lorsque cela est nécessaire afin que le robot suive la trajectoire désirée. Le robot y parvient à une erreur près qui est due aux incertitudes de modèle et aux possibles retards de transmissions, qui ne furent pas toujours négligeables lors de la phase d'essai.

Une question éludée jusqu'à présent dans cet article est celle de la supériorité (ou non) de la commande événementielle comparée à une commande par échantillonnage périodique. Afin de proposer une comparaison la plus juste qu'il soit, le temps moyen entre deux transmissions événementielles obtenus, appelé T_{moyen} , fut évalué. Ce temps fut ensuite utilisé pour implémenter la même loi de commande par « backstepping » avec cette fois des transmissions se produisant toutes les T_{moyen} unités de temps. Ainsi, les deux stratégies de transmission (événementielle et périodique) génèrent exactement le même nombre de transmissions sur le réseau sans fil le temps de l'expérience. La figure 7.2 montre que l'approche périodique ne permet pas au robot de suivre la trajectoire de référence, contrairement à la stratégie événementielle. L'avantage de cette dernière est claire ici. Une explication possible est que la commande événementielle est capable de s'adapter rapidement aux changements, par exemple lorsque le robot doit tourner, et utilise en contrepartie peu le réseau lorsque le robot doit suivre une ligne de faible courbure à vitesse constante. Des résultats similaires furent obtenus lorsque la trajectoire de référence décrit un lemniscate, cf. figure 7.3.

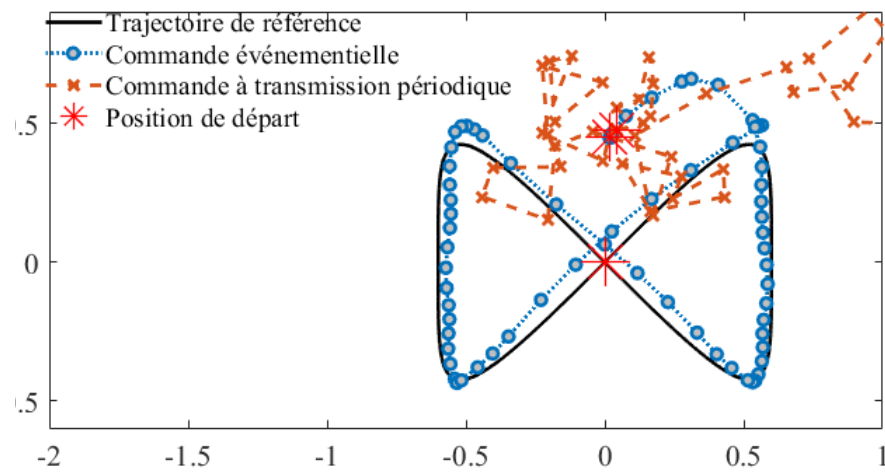


FIGURE 7.3 – Résultats expérimentaux pour une trajectoire de référence décrivant un lemniscate. Les positions initiales du robot sont indiquées par les points rouges. Les cercles ou croix représentent une transmission.

Chapitre 8

Conclusion

Ces notes de cours offrent une introduction à la commande événementielle, cf. [HJT12] également. Elles se concluent sur une discussion en quatre temps sur les points suivants : (i) commande événementielle ou échantillonnage périodique ? (ii) le développement de stratégies événementielles pour d'autres problèmes de l'automatique ; (iii) les autres paradigmes de transmission événementielles, et finalement (iv) quelques-uns des défis restant à relever dans le domaine.

8.1 Commande événementielle ou échantillonnage périodique ?

La commande événementielle est principalement motivée par opposition à celle par échantillonnage périodique. Tout d'abord il est important de souligner que ces deux paradigmes sont complémentaires, chacun ayant ses avantages et inconvénients. L'échantillonnage périodique est simple à mettre en œuvre mais peut générer de fréquentes transmissions et calculs du contrôleur. La commande événementielle en revanche adapte transmissions et calculs aux besoins du système. En contrepartie, elle requiert l'évaluation d'un critère, ce qui peut être contraignant. Le choix entre les deux dépend avant tout du contexte et de ses spécificités.

Par ailleurs, bien que les résultats de simulations numériques ou expérimentaux, cf. chapitre 7, illustrent les atouts de la commande événementielle, les preuves théoriques démontrant sa supériorité manquent encore. De récents travaux proposent de premiers arguments solides pour la commande optimale événementielle des systèmes linéaires perturbés lorsque des bloqueurs type modèle (cf. remarque au chapitre 2) sont employés [AK18]. Il est ainsi montré que pour une même quantité/fréquence de transmissions, une loi de commande événementielle donnée permet d'obtenir de meilleures performances, plus précisément un plus petit coût quadratique que le meilleur possible à l'aide de l'échantillonnage périodique.

8.2 Autres objectifs de l'automatique

Cet article se concentre sur la stabilisation d'un point d'équilibre. Néanmoins, les techniques présentées sont au cœur de la plupart des résultats disponibles pour d'autres problèmes phare de l'automatique comme l'estimation, la commande optimale, la commande prédictive, la poursuite de trajectoires comme évoqué au chapitre 7, voire même la synthèse d'algorithmes d'optimisation. Une

thématique connaît d'ailleurs un intérêt croissant : la commande événementielle des systèmes multi-agents de par son potentiel pour la commande de flotte de robots qu'ils soient aériens, terrestres ou marins par exemple, cf. [NGC19] pour un état de l'art sur la question et [DPH17] pour une validation expérimentale pour le pilotage d'une fil d'automobiles dont nous verrons des vidéos illustratives lors des séances de cours.

8.3 Autres paradigmes de transmission événementielle

Il existe d'autres paradigmes de commande événementielle. Tous sont néanmoins intimement liés à celui exposé dans cet article. La commande **périodico-événementielle**, déjà évoquée, consiste à prendre en compte la nature numérique du dispositif sur lequel est évalué en temps réel le critère de transmission Γ . Un avantage de ce paradigme est que la propriété (3.4) est d'évidence satisfaite puisque les transmissions ne se produisent qu'aux instants d'échantillonnage auxquels est évalué Γ . Le défi de ce paradigme est de construire Γ et la suite de ses instants d'évaluation afin de répondre aux objectifs de commande. Des approches efficaces sont disponibles pour les systèmes linéaires [HDT13] et non-linéaires [WPNH20].

On pourra toujours reprocher à la commande (périodico-)événementielle de nécessiter l'évaluation de façon continue, ou du moins, suffisamment fréquemment d'un critère de transmission. Une alternative consiste, à chaque instant de transmission, de déterminer quand la prochaine transmission doit avoir lieu en fonction de l'état actuel du système : on parle de **commande (auto-)événementielle** ou **(auto-)déclenchée**, *self-triggered control* en anglais, cf. [AT10]. Puisque le système fonctionne alors en boucle ouverte entre deux instants de transmission successifs, il est impératif de s'assurer de la robustesse du système ; des résultats dans ce sens sont disponibles dans [JAT10].

Dernier point, cet article se concentre sur le cas où un événement correspond à une transmission de données. Il existe en automatique d'autres approches dites événementielles où l'événement à une toute autre signification comme la mise à jour d'une variable de contrôle en « reset control » [PQTZ18], ou l'activation du signal de contrôle en « maximum hands off control » [NQN15] par exemple.

8.4 Défis

De nombreux défis restent encore à lever pour permettre le plein essor de la commande événementielle. On citera notamment le développement d'arguments analytiques prouvant la supériorité de ce paradigme par rapport à l'approche classique périodique.

Un autre défi majeur sera d'apporter des garanties sur la diminution de la consommation des ressources énergétiques dédiées au contrôleur. La question est complexe comme l'illustre le cas des réseaux de communication sans fil, pour lesquels transmettre moins souvent ne signifie pas nécessairement dépenser moins d'énergie, car cela dépend également de la qualité du réseau aux instants de transmission. Néanmoins, les résultats de la littérature sont très encourageants et promettent un grand avenir à ce champ de recherche de l'automatique en plein développement.

Glossaire

Commande (auto-)événementielle (self-triggered control) : Lois de commande recevant ou communiquant des données avec le système à des instants définis selon la valeur de l'état ou de la sortie du système au dernier instant de transmission.

Commande événementielle (event-triggered control) : Lois de commande recevant ou communiquant des données avec le système à des instants définis selon l'état ou la sortie actuelle du système.

Commande périodico-événementielle (periodic event-triggered control) : Lois de commande recevant ou communiquant des données avec le système à des instants définis selon l'état ou la sortie évalués à des instants échantillonnés.

Co-synthèse (co-design) : Approche consistant à construire la loi de commande et celle de transmission conjointement.

Émulation (emulation) : Approche consistant à construire la loi de commande dans un premier temps en ignorant l'échantillonnage puis à prendre ce dernier en considération et finalement synthétiser la loi de transmission.

Matrice Hurwitz (Hurwitz matrix) : Matrice réelle, carrée dont les valeurs propres sont toutes à partie réelle strictement négative.

Phénomène de Zénon (Zeno phenomenon) : Nombre infini de sauts (qui correspondent à des transmissions dans le cadre de cet article) en temps fini.

Régularisation temporelle (Temporal regularization) : Technique consistant à imposer un temps minimum donné entre deux transmissions successives.

Système hybride (hybrid system) : Système dynamique défini à la fois par des dynamiques en temps continu et en temps discret.

Bibliographie

- [AK18] D.J. Antunes and B.A. Khashooei. Consistent dynamic event-triggered policies for linear quadratic control. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 5(3) :1386–1398, 2018.
- [APDN17] M. Abdelrahim, R. Postoyan, J. Daafouz, and D. Nešić. Robust event-triggered output feedback controllers for nonlinear systems. *Automatica*, 75 :96–108, 2017.
- [AT10] A. Anta and P. Tabuada. To sample or not to sample : self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(9) :2030–2042, 2010.
- [BDD⁺18] D.P. Borgers, V.S. Dolk, G.E. Dullerud, A.R. Teel, and W.P.M.H. Heemels. Time-regularized and periodic event-triggered control for linear systems. In *Control Subject to Computational and Communication Constraints*, pages 121–149. Springer, 2018.
- [BH14] D. Borgers and W.P.M.H. Heemels. Event-separation properties of event-triggered control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(10) :2644–2656, 2014.
- [DBH17] V.S. Dolk, D.P. Borgers, and W.P.M.H. Heemels. Output-based and decentralized dynamic event-triggered control with guaranteed $\mathcal{L}_p$ -gain performance and Zeno-freeness. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 62(1) :34–49, 2017.
- [DHvdWH11] M.C.F. Donkers, W.P.M.H. Heemels, N. van de Wouw, and L. Hetel. Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(9) :2101–2115, 2011.
- [DPH17] V.S. Dolk, J. Ploeg, and W.P.M.H. Heemels. Event-triggered control for string-stable vehicle platooning. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(12) :3486–3500, 2017.
- [DT15] C. De Persis and P. Tesi. Input-to-state stabilizing control under denial-of-service. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60 :2930–2944, 2015.
- [Gir15] A. Girard. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(7) :1992–1997, 2015.
- [HDT13] W.P.M.H. Heemels, M.C.F. Donkers, and A.R. Teel. Periodic event-triggered control for linear systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 58(4) :847–861, 2013.
- [HJT12] W.P.M.H. Heemels, K.H. Johansson, and P. Tabuada. An introduction to event-triggered and self-triggered control. In *IEEE Conference on Decision and Control, Maui, U.S.A.*, pages 3270–3285, 2012.
- [JAT10] M. Mazo Jr., A. Anta, and P. Tabuada. An ISS self-triggered implementation of linear controllers. *Automatica*, 46(8) :1310–1314, 2010.

- [JN97] Z.-P. Jiang and H. Nijmeijer. Tracking control of mobile robots : a case study in backstepping. *Automatica*, 33(7) :1393–1399, 1997.
- [NGC19] C. Nowzari, E. Garcia, and J. Cortés. Event-triggered communication and control of networked systems for multi-agent consensus. *Automatica*, 105 :1–27, 2019.
- [NQN15] M. Nagahara, D.E. Quevedo, and D. Nešić. Maximum hands-off control : a paradigm of control effort minimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3) :735–747, 2015.
- [PBG⁺15] R. Postoyan, M.C. Bragagnolo, E. Galbrun, J. Daafouz, D. Nešić, and E.B. Castelan. Event-triggered tracking control of unicycle mobile robots. *Automatica*, 52 :302–308, 2015.
- [Pos23] R. Postoyan. Commande événementielle. *Techniques de l'Ingenieur*, 2023.
- [PPT22] C. De Persis, R. Postoyan, and P. Tesi. Event-triggered control from data. *arXiv preprint arXiv :2208.11634*, 2022.
- [PQTZ18] C. Prieur, I. Queinnec, S. Tarbouriech, and L. Zaccarian. Analysis and synthesis of reset control systems. *Foundations and Trends in Systems and Control*, 6(2–3) :117–338, 2018.
- [PSH22] R. Postoyan, R.G. Sanfelice, and W.P.M.H. Heemels. Explaining the “mystery” of periodicity in inter-transmission times in two-dimensional event-triggered controlled system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- [SPH24] K.J.A. Scheres, R. Postoyan, and W.P.M.H. Heemels. Robustifying event-triggered control to measurement noise. *Automatica*, 159 :111305, 2024.
- [Tab07] P. Tabuada. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52(9) :1680–1685, 2007.
- [WPNH20] W. Wang, R. Postoyan, D. Nešić, and W.P.M.H. Heemels. Periodic event-triggered control for nonlinear networked control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 65(2) :620–635, 2020.