

Contrôle événementiel : travaux dirigés (4h)

romain.postoyan@univ-lorraine.fr

1ère partie

L'objectif de cette première partie est de se familiariser avec la technique du seuil relatif. Alors que celle-ci est présentée pour les systèmes linéaires (temps invariants) dans le cours, nous allons voir dans ce TD comment l'appliquer à des systèmes non-linéaires en suivant le même principe. Nous étudierons dans un premier temps un système particulier, l'oscillateur de van der Pol puis un cas plus général. Ce TD est aussi l'occasion de se pencher plus en détail sur la preuve de l'existence d'un temps minimum strictement positif garanti entre deux transmissions successives. Des indications sont fournies à la fin de cette partie. Le niveau de difficulté est indiqué par une voire plusieurs astérisques.

Oscillateur de van der Pol

Considérons l'oscillateur de van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_1^2)x_2 - x_1 + u\end{aligned}\tag{1}$$

où $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ est l'état du système et $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée de commande.

Le but est le même que dans le cours : construire une loi de commande événementielle qui garantit que $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Questions.

1. (★) Ce système est-il linéaire ou non-linéaire ? Justifier votre réponse.
2. (★★) Linéariser le système à l'aide de l'entrée u .
3. (★★★) Synthétiser une loi de commande garantissant que l'origine du système est globalement asymptotiquement stable en supposant les communications entre le système et le contrôleur sont continues et parfaites.
4. (★★) Jusqu'à présent, nous avons supposé que la loi de commande évolue en temps continu. Prendre désormais en compte l'échantillonnage et obtenir un modèle hybride. Nous considérerons ici l'erreur induite par l'échantillonnage sur l'entrée $e = \hat{u} - u$ (et non $\hat{x} - x$) comme au chapitre 2.4.1 du cours et nous supposerons que l'entrée échantillonnée est générée à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro. De plus, nous nous passerons du calcul de $\dot{u}$, nous écrirons ainsi $\dot{u} = g(x, e)$.

5. (***) Montrer que la fonction de Lyapunov notée V considérée à la question 3 vérifie la propriété suivante

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, e) \leq -a|x|^2 + b|e|^2 \quad \forall (x_1, x_2, e) \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

où $f(x, e)$ est le champ de vecteurs associé aux dynamiques de x à la question précédente et a, b sont des constantes strictement positives à déterminer.

6. (**) Proposer une loi d'échantillonnage du type seuil relatif.
7. (*) Pour conclure, nous souhaitons appliquer des conditions similaires à celles du théorème 3 du chapitre 3 du cours. Quelle propriété reste-t-il à prouver pour cela ? Celle-ci est analysée dans le cas général ci-dessous.

Généralisation

Nous considérons dans cette partie un système non-linéaire général dont le modèle hybride, une fois l'échantillonnage pris en compte, est de la forme suivante entre deux instants de transmissions successifs

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, e) \\ \dot{e} &= g(x, e) \end{aligned} \quad (3)$$

et à chaque transmission

$$\begin{aligned} x^+ &= x \\ e^+ &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $e \in \mathbb{R}^{n_e}$ avec $n_x, n_e \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Nous supposons que nous connaissons $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ définie positive, radialement non-bornée¹, ainsi que² $\alpha, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ telles que pour tout x, e

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, e) \leq -\alpha(|x|) + \gamma(|e|). \quad (5)$$

Questions.

8. (**) Construire une loi de commande seuil relatif pour le système (3)-(4).
9. Nous allons maintenant prouver qu'il existe un temps minimum strictement positif uniforme entre deux transmissions successives. Nous avons besoin de faire des hypothèses supplémentaires pour cela. En particulier, nous supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que pour

1. Cela signifie que $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

2. Une fonction β est de classe $\mathcal{K}_\infty$ si $\beta \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $\beta(0) = 0$, qu'elle ait strictement croissante et tend vers l'infini à l'infini.

tout x, e et tout $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \max\{|f(x, e)|, |g(x, e)|\} &\leq \ell_1(|x| + |e|) \\ \gamma(s) &\leq \ell_2 s \\ \ell_3 s &\leq \alpha(s) \end{aligned} \tag{6}$$

- (a) ($\star \star \star$) Expliquer la raison pour laquelle, pour une même condition initiale du type $(x(0), 0)$, le premier instant de transmission générée par la loi construite à la question 8 ne se produira pas avant celle générée la loi ci-dessous

$$\ell_2 |e| \leq \sigma \ell_3 |x|. \tag{7}$$

- (b) ($\star \star \star$) Dériver $\phi(t) := \frac{|e(t)|}{|x(t)|}$ le long des solutions du système considéré. On supposera pour cela que $x(t) \neq 0$ et $e(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$, ce qui est vraie dès lors que $x(0) \neq 0$.
- (c) ($\star \star \star$) Montrer que $\dot{\phi} \leq \frac{\ell_1}{2}(1 + \phi)^2$.
- (d) ($\star \star \star$) En conséquence, $\phi(\tau) \leq \psi(\tau)$ où ψ est solution de $\dot{\psi} = \frac{\ell_1}{2}(1 + \psi)^2$ d'après le principe de comparaison. En admettant que $\psi(\tau) = \frac{\tau \ell_1}{1 - \tau \ell_1}$, montrer que le temps d'inter-transmission générée par la loi construite au point 8 est minoré par $\frac{1}{\ell_1} \frac{1}{1 + \frac{\ell_2}{\sigma \ell_3}} > 0$. Que remarque-t-on lorsque $\sigma \rightarrow 0$?
10. ($\star \star \star$) Peut-on appliquer ces résultats à l'oscillateur de van der Pol? Si la réponse est négative, proposer une piste alternative.

Indications

2. Poser $u = u_{\text{linéarisant}} + v$ où v est un terme libre que nous construirons à la question suivante.

3. Pour prouver la stabilité de $x = 0$, il suffit, comme pour les systèmes linéaires, de trouver une fonction de Lyapunov vérifiant les conditions suivantes :

- V est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, définie positive et radialement non-bornée (i.e., $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0$.

On pourra utiliser la fonction de Lyapunov candidate $V(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$ pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour rappel, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est définie positive si et seulement si

- $a > 0$;
- $ac - b^2 > 0$.

5. On pourra utiliser la propriété suivante : pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ et tout $v > 0$, $2c_1 c_2 \leq v c_1^2 + v^{-1} c_2^2$.

9(b). On rappellera que $|e| = \sqrt{e^\top e}$.

2ème partie

Nous venons de voir comment construire et analyser une loi d'échantillonnage à seuil relatif pour des systèmes non-linéaires. Dans cet exercice, l'objectif est de concevoir une loi de transmission pour l'estimation cette fois ce qui soulève de nouveaux défis.

Observateur de Luenberger

Soit le système linéaire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{8}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ un vecteur d'entrée connu, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de mesures, et (A, C) est détectable.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'état x à l'état d'un observateur tout en minimisant les communications entre ce dernier et les capteurs.

1. (★) Rappeler la structure d'un observateur de Luenberger (en l'absence d'échantillonnage).
2. (★★) Prendre en compte l'échantillonnage des mesures et représenter l'architecture considéré sous forme d'un schéma.
3. (★★★) Construire un modèle global hybride du système avec pour coordonnées x l'état du système, $\tilde{x}$ l'erreur d'estimation sur l'état et e l'erreur induite par l'échantillonnage à définir.
4. (★★★★) Proposer une loi d'échantillonnage événementiel, la justifier.