

Contrôle événementiel : travaux pratiques (8h)

Commande distribuée d'une file de véhicules¹

romain.postoyan@univ-lorraine.fr

L'objectif de ce TP est de construire, simuler et analyser des lois de commande distribuées à échantillonnage événementiel pour le pilotage automatique d'une file de véhicules automobiles. Par « distribuée », nous entendons qu'une loi de commande est implémentée sur chacun des véhicules et celle-ci ne dépend que de données disponibles localement, typiquement ses propres variables (position, vitesse, accélération) et éventuellement celles du véhicule précédent. Les véhicules sont supposés identiques et se déplacent sur une ligne droite.

Un compte-rendu par binôme est attendu à la fin de la 2^{de} séance, qui sera noté. Toute réponse devra être justifiée, tout résultat numérique (figure, tableau ou autre) commenté et interprété à défaut d'être ignoré lors de l'évaluation du rapport. Une part importante de la note sera allouée à la qualité du fichier Matlab-Simulink.

Dernier point : ce sujet n'est pas une recette de cuisine, vous avez une certaine liberté au fil des questions, à vous d'en tirer parti.

I Présentation

I.1 Mise en équation

Nous considérons $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ véhicules identiques. Celui de tête est associé à l'indice 1. Les dynamiques du véhicule $i \in \{1, \dots, N\}$ sont décrites par les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= a_i \\ \dot{a}_i &= -\frac{1}{\tau}a_i + \frac{1}{\tau}u_i\end{aligned}\tag{1}$$

où $v_i \in \mathbb{R}$ est la vitesse, $a_i \in \mathbb{R}$ l'accélération, $u_i \in \mathbb{R}$ son entrée de commande et τ la constante de temps. Les valeurs numériques de tous les paramètres sont fournies dans le tableau 1. On appelle également u_i l'accélération désirée car, pour une valeur constante fixée de u_i , l'accélération a_i du véhicule i convergera exponentiellement vers u_i . Le modèle (1) est en réalité obtenu en appliquant au préalable une loi de commande non-linéarisante que nous ignorons dans le cadre de ce TP.

Alors que l'entrée du véhicule de tête u_1 est laissée libre, pour $i \in \{2, \dots, N\}$ u_i est la sortie

1. Ce sujet est librement inspiré du travail de [1].

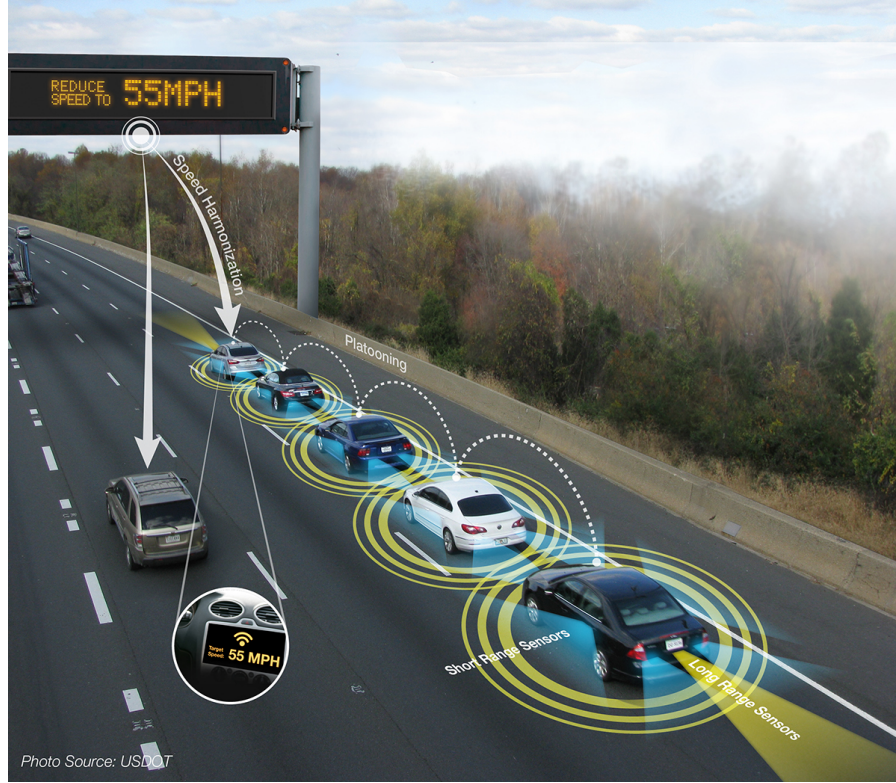


FIGURE 1 – Illustration de la commande automatique d'une file de voitures (source : Wikipedia).

d'un filtre passe-bas, qui sert de pré-compensateur. Ce filtre est décrit par les équations suivantes

$$\dot{u}_i = -\frac{1}{h}u_i + \frac{1}{h}\chi_i, \quad (2)$$

où $h > 0$ et χ_i sont définis par la suite.

1.2 Objectifs

Nous souhaitons satisfaire les propriétés suivantes tout en communiquant sporadiquement entre les véhicules.

Temps de passage constant entre deux véhicules successifs. Soit la distance désirée entre le véhicule i et $i - 1$, $i \in \{2, \dots, N\}$,

$$d_{r,i} := r + hv_i, \quad (3)$$

où r est la distance de sécurité et h est le temps inter-véhicule désiré. Nous remarquons que $d_{r,i}$ dépend de la vitesse du véhicule i .

Soit d_i la distance entre les véhicules $i - 1$ et i . Si l'on note q_i la position du véhicule i , alors

$$d_i := q_{i-1} - q_i - L, \quad (4)$$

où L est la longueur d'un véhicule. On introduit alors e_i l'écart entre la distance désirée entre les véhicules $i - 1$ et i , et la distance réelle

$$e_i := d_i - d_{r,i}. \quad (5)$$

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Le premier objectif est de garantir que, lorsque $v_{i-1}(t) = c \in \mathbb{R}$ et $u_{i-1}(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, $e_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. On parle de *stabilité individuelle*. Cet objectif se justifie par le fait que lorsque $e_i = 0$, la distance inter-véhicule est celle désirée. Il est donc naturel de vouloir garantir que $e_i(t)$ converge vers 0 asymptotiquement.

Absence de phénomène d'accordéon. Le phénomène d'accordéon consiste en des ralentissements puis des accélérations successives du trafic sans cause apparente. L'objectif ici est de le proscrire. Pour cela, nous formalisons l'absence d'un tel phénomène par la propriété suivante. Il existe $c > 0$ telle que pour tout condition initiale² $x(0)$ et tout $i \in \{2, \dots, N\}$,

$$\|\chi_i\|_{\mathcal{L}_2} \leq \|u_1\|_{\mathcal{L}_2} + c|x(0)|, \quad (6)$$

où $\|\zeta\|_{\mathcal{L}_2}$ est la norme $\mathcal{L}_2$ autrement dit l'énergie du signal $\zeta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\zeta}$ avec $n_\zeta \in \mathbb{Z}_{>0}$, i.e., $\|\zeta\|_{\mathcal{L}_2} := \sqrt{\int_0^\infty |\zeta(t)|^2 dt}$.

La loi de commande proposée pour le véhicule $i \in \{2, \dots, N\}$ est

$$\begin{cases} \dot{u}_i &= -\frac{1}{h}u_i + \frac{1}{h}\chi_i \\ \chi_i &:= k_p e_i + k_d \dot{e}_i + u_{i-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Q1.1 Commenter l'expression de χ_i et réfléchir à son implémentation pratique.

Q1.2 Modifier l'expression de χ_i afin de prendre en compte l'existence d'un réseau de communication local sans fil entre les véhicules.

2. Le vecteur x est l'état global du système $x = (x_0^\top, \dots, x_N^\top)^\top$ et les x_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, sont définis par la suite.

II Analyse et synthèse des lois de transmission

II.1 Stabilité individuelle

Pour tout $i \in \{3, \dots, N\}$, nous posons tout d'abord

$$\begin{aligned} z_2 &:= (a_1, e_2, v_1 - v_2, a_2, u_2)^\top \\ z_i &:= (a_{i-1}, u_{i-1}, e_i, v_{i-1} - v_i, a_i, u_i)^\top. \end{aligned} \quad (8)$$

Nous devons distinguer le cas où $i = 2$ car u_1 n'est pas généré par un filtre pour le premier véhicule, il n'y a donc pas de variable χ_1 .

QII.1 Montrer que

$$\dot{z}_2 := A_2 z_2 + B_2 (u_1, \hat{u}_1)^\top \quad (9)$$

où

$$A_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \\ 0 & \frac{k_p}{h} & \frac{k_d}{h} & -k_d & -\frac{1}{h} \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \quad (10)$$

QII.2 Montrer que

$$\dot{z}_i := A_{>2} z_i + B_{>2} (\chi_{i-1}, \hat{u}_{i-1})^\top, \quad (11)$$

où

$$A_{>2} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \\ 0 & 0 & \frac{k_p}{h} & \frac{k_d}{h} & -k_d & -\frac{1}{h} \end{pmatrix}, \quad B_{>2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix} \quad (12)$$

QII.3 Vérifier que les matrices A_2 et $A_{>2}$ sont Hurwitz en vous aidant de Matlab pour les valeurs numériques du tableau 1. Que peut-on alors dire de la stabilité de $z_2 = 0$ lorsque $u_1 = \hat{u}_1 = 0$ pour le système (9) et de celle de $z_i = 0$ lorsque $\chi_{i-1} = \hat{u}_{i-1} = 0$ pour $i \geq 3$ pour (11)? Qu'est-ce que cela implique par rapport à l'objectif de stabilité individuelle?

II.2 Phénomène d'accordéon

Pour garantir l'absence de phénomène d'accordéon, il suffit de prouver qu'il existe des matrices réelles P_2 et $P_{>2}$ symétriques, définies positives et une constante $\mu > 0$ telles que pour

$$V_2 : z_2 \mapsto z_2^\top P_2 z_2, \quad V_{>2} : z_i \mapsto z_i^\top P_{>2} z_i,$$

avec $i \in \{3, \dots, N\}$, pour tout $z_2, u_1, z_i, \chi_{i-1}, \hat{u}_1, \hat{u}_i \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial z_2} (A_2 z_2 + B_2(u_1, \hat{u}_1)^\top) &\leq \mu (|u_1|^2 - |\chi_2|^2) \\ \frac{\partial V_{>2}}{\partial z_i} (A_{>2} z_i + B_{>2}(\chi_{i-1}, \hat{u}_{i-1})^\top) &\leq \mu (|\chi_{i-1}|^2 - |\chi_i|^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Nous admettons qu'il existe des matrices P_2 et $P_{>2}$ symétriques, définies positives telles que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial z_2} (A_2 z_2 + B_2(u_1, \hat{u}_1)^\top) &\leq \mu (|u_1|^2 - |\chi_2|^2) - \rho u_1^2 + \gamma^2 e_{u_1}^2 \\ \frac{\partial V_{>2}}{\partial z_i} (A_{>2} z_i + B_{>2}(\chi_{i-1}, \hat{u}_{i-1})^\top) &\leq \mu (|\chi_{i-1}|^2 - |\chi_i|^2) - \rho u_{i-1}^2 + \gamma^2 e_{u_{i-1}}^2, \end{aligned} \quad (14)$$

où $e_{u_i} := \hat{u}_{i-1} - u_{i-1}$ est l'erreur induite par l'échantillonnage due à la transmission de u_{i-1} au véhicule i .

QII.4 Dédurre de (14) qu'en l'absence de contraintes de communication, le phénomène d'accordéon ne peut se produire.

QII.5 Proposer une loi d'échantillonnage distribuée du type seuil relatif préservant l'absence de phénomène d'accordéon. Discuter :

- (i) son implémentation ;
- (ii) les possibles différences avec le cours ;
- (iii) le phénomène de Zénon.

QII.6 Proposer deux modifications des lois d'échantillonnage de QII.5 assurant l'absence du phénomène de Zénon.

III Simulations

Le but de cette ultime section est de simuler les lois de commande événementielles obtenues à l'aide de Matlab-Simulink. Pour rappel, les valeurs numériques des paramètres sont fournies dans le tableau 1. Nous considérerons $N = 3$ véhicules.

Nous allons, dans un premier temps, vérifier le bon fonctionnement de la loi commande (7) lorsque u_{i-1} est disponible en tout temps pour le véhicule i . Cela correspond à la première étape de l'approche par émulation (cf. planches vues en cours).

QIII.1 Simuler le système de 3 véhicules. Analyser les résultats obtenus en vérifiant notamment la satisfaction des deux objectives (stabilité individuelle et absence de phénomène d'accordéon). **Il est fortement conseiller de procéder étape par étape en considérant 1, puis 2 et enfin 3 véhicules et de s'assurer du bon fonctionnement du système global à chacune d'entre elles.**

QIII.2 Supprimer le terme u_{i-1} dans la seconde équation de (7) et comparer les résultats obtenus. En quoi ce terme est important ?

Nous prenons désormais en compte l'échantillonnage des transmissions entre les véhicules.

Pour chacune des lois d'échantillonnage construites à la section II.2 :

QIII.3 Simuler le système de 3 véhicules. Analyser les résultats obtenus.

QIII.4 Tracer les temps inter-transmissions. Que remarquez-vous ?

QIII.5 Simuler les lois d'échantillonnage de la question QII.6.

QIII.6 Comparer les performances et quantités de transmission générées par chacune des 3 lois de transmission. Vous pourrez vous inspirer pour cela des résultats numériques vus en cours.

QIII.7 Ajouter des bruits sur les données transmises ou les mesures et comparer les performances des différentes lois d'échantillonnage.

$\tau =$	0.1
$h =$	0.6
$L =$	3
$r =$	2.5
$\rho =$	0.04
$\gamma =$	0.7232
$k_p =$	0.2
$k_d =$	0.7

TABLE 1 – Valeurs numériques

Références

- [1] V.S. Dolk, J. Ploeg, and W.P.M.H. Heemels. Event-triggered control for string-stable vehicle platooning. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(12) :3486–3500, 2017.