

Mécanique des Milieux Continus (MMC)

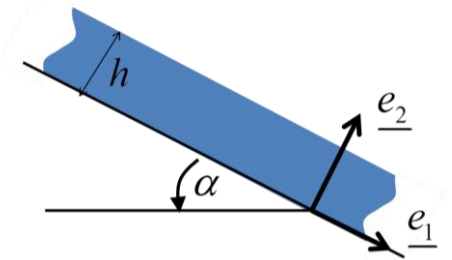
L'automne 2024 a été marqué par de nombreux événements climatiques extrêmes associés à un lourd bilan humain et financier. Ces événements sont en grande partie renforcés par le changement climatique, et leur probabilité accrue a été soulignée par tous les rapports d'experts depuis plusieurs décennies (exemple : rapport du Groupe de travail II du GIEC, chapitres 3 et 8) : il convient donc de se prémunir des conséquences de ce type d'événements en tentant de mieux les comprendre et les anticiper. Dans les parties qui suivent, on s'attachera à comprendre l'écoulement d'une grosse quantité d'eau le long d'un plan incliné.



Figure 1: inondations en Espagne en octobre 2024.

On considère pour cela un fluide soumis aux seules forces de pesanteur s'écoulant de façon laminaire et établie selon $\underline{e}_1$ sur un plan infini incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

On cherche à connaître le profil de vitesse à l'intérieur de ce milieu continu. On note h l'épaisseur de la couche de fluide et P_{atm} la pression atmosphérique. On considère que le fluide est newtonien et incompressible, et que la vitesse du fluide est nulle au niveau du sol, rendu totalement étanche en raison de l'imperméabilisation des sols (construction de routes, de parkings, de bâtiments).



1. A partir de la physique du problème et de l'hypothèse d'incompressibilité de l'eau, justifier que le champ de vitesses puisse s'écrire sous la forme : $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2)\underline{e}_1$ (/2)

2. Le fluide est uniquement soumis à la gravité $\underline{g}$. Ecrire ce vecteur dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ utilisée sur la figure ci-dessus. (1)

3. On pourra montrer à la fin du cours à partir de l'équation de Navier-Stokes que le profil de vitesses dans le fluide peut s'écrire sous la forme : $v_1(x_2) = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha \left(h - \frac{x_2}{2} \right) x_2$, avec ρ la masse volumique du fluide, et μ un paramètre du fluide : quelle est son unité ? A quoi peut-il correspondre ? (1)

4. La condition d'adhérence à la paroi (surface du sol) est-elle respectée ? Quelle est la vitesse maximale du fluide et en quel point se trouve-t-elle ? Tracer le profil de vitesse. (1,5)

5. Calculer le débit volumique de fluide si le plan est de largeur L selon $\underline{e}_3$, et vérifier son unité. (1,5)

6. Calculer le tenseur gradient du champ de vitesses. Ecrire le résultat en notation tensorielle et en notation matricielle. (/2)

7. Toute la description qui précède est-elle eulérienne ou lagrangienne ? Justifier. (/1)

8. A partir de la formule de la dérivée particulaire, calculer le champ d'accélération au sein de l'écoulement, sachant qu'il est établi ($\frac{\partial v}{\partial t} = 0$). Le résultat est-il surprenant ? (/2)

9. Une voiture initialement positionnée en $\underline{x} = \underline{X} = X_i \underline{e}_i$ est entraînée par cet écoulement. Quelle sera sa trajectoire ? Quelle sera sa vitesse en description lagrangienne ? (/2)

10. Montrer que pour cette transformation le gradient de la transformation vaut :

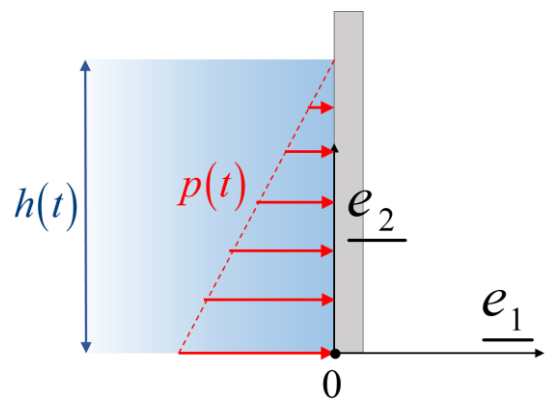
$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + K(h - X_2) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \quad \text{avec } K \text{ une constante} \quad (/2)$$

11. Montrer que l'on peut retrouver alors facilement la condition d'incompressibilité de l'eau. (/1)

En aval de ce plan incliné, l'eau va s'accumuler et peut mettre en péril la stabilité de certains bâtiments. A partir du TD1, on se rappelle que le champ de pression évolue linéairement avec la hauteur qui ici dépend du temps lorsque l'eau s'accumule, de telle sorte que :

$$p(t) = \rho g (h(t) - x_2).$$

Le promoteur d'un bâtiment indique que les fondations de ses murs sont dimensionnées pour résister à un moment $\mathfrak{M}_O = \mathfrak{M}_{\max} \underline{e}_3$ au niveau du pied du mur 0.



12. Ecrire la résultante $\underline{F}(t)$ des forces de pression qui s'applique sur le mur (/1)

13. Montrer que la hauteur maximale d'eau $h(t)$ avant que le mur ne s'effondre est égale à :

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{6\mathfrak{M}_{\max}}{L\rho g}} \quad \text{avec } L \text{ la longueur du mur dans la direction } \underline{e}_3 \quad (/2)$$

14. Question bonus (0 à 2 points suivant la pertinence de la réponse) : quels sont les aménagements qu'il conviendrait de développer pour limiter les conséquences d'évènements climatiques extrêmes comme ces pluies diluviennes ?

FORMULAIRE

Gradient d'un vecteur : $\underline{\underline{\text{grad } T}} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

Gradient de la transformation : $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{\text{Grad } x}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad } u}}(\underline{X}, t)$

Dérivée particulière : $\dot{\underline{\mathbf{g}}}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{\mathbf{g}}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{grad}(\underline{\mathbf{g}}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$

Trajectoire : $d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt$ avec $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$