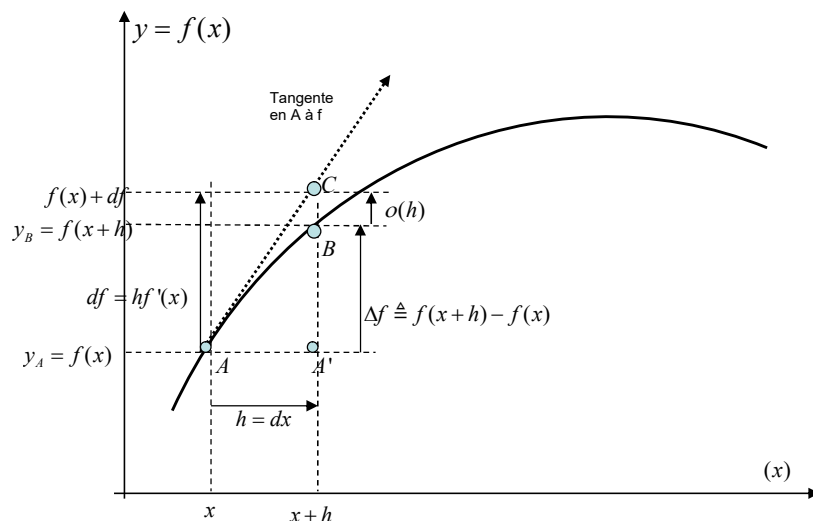


Fonction d'une seule variable

Idée géométrique

En physique nous aurons souvent à calculer et comparer les petits accroissements de diverses fonctions. Les techniques correspondantes constituent le *calcul différentiel*. Nous commençons par une fonction f ne dépendant que d'une seule variable : x .

On vérifie facilement à l'aide d'une calculatrice que **si l'on zoome suffisamment sur la représentation graphique de presque¹ n'importe quelle fonction, on finit par obtenir une droite**. Cela signifie que pour des variations suffisamment petites de la variable x , on peut considérer que **le graphe $f(x)$ est quasiment confondu avec sa tangente**. On peut donc estimer de petits écarts du type $f(x+h) - f(x)$, avec un écart h « suffisamment petit », en remplaçant f par sa tangente (en x), comme on le voit sur le dessin ci-dessous : $A'B \approx A'C$. Remarque : un petit accroissement h de x est aussi noté dx .



L'idée de base du calcul différentiel est donc très intuitive. Avec ce dessin vous avez déjà compris l'essentiel.

Appelons Δf la variation *exacte* $f(x+h) - f(x)$. Sur la figure ci-dessus cela correspond à la différence « d'altitude » $y_B - y_A$ entre les points A et B. Dire que la tangente est proche de la courbe consiste à dire que le point C sur la tangente est très proche du point B sur la courbe (soit $y_C \approx y_B$), pour peu que l'accroissement h de la variable x ne soit pas trop grand.

Or la tangente en x ayant une pente $f'(x)$, on en déduit que $y_C - y_A = hf'(x)$. *En physique* cette petite différence calculée le long de la tangente est notée simplement df , et appelée *différentielle* de f .

En résumé, une bonne estimation de la différence exacte $\Delta f \triangleq f(x+h) - f(x) = y_B - y_A$ est donnée par la différentielle $df \triangleq hf'(x) = y_C - y_A$.

Pour h assez petit, la différence $\Delta f - df$ est même bien plus petite que h lui-même ($BC \ll AA'$), et pour cette raison on la note parfois $o(h)$, qui se lit « petit o de h », ou « négligeable devant h » : $o(h) \ll h$ si h est suffisamment petit. On écrit donc $df = \Delta f + o(h)$. En physique on allège encore les notations en écrivant (abusivement) $\Delta f = df$, et en pratique un physicien confond même allègrement les deux car il lui suffit de supposer que h est « suffisamment petit » pour que cela soit vrai.

Preuve mathématique

Dès la classe de première S, vous avez appris que si f est dérivable en a , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, autrement dit $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right] = 0$. On peut donc poser $\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ pour $h \neq 0$, et on a alors $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$, avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$. En mathématiques, on parle d'*approximation affine liée au nombre dérivé*.

Quel rapport avec le paragraphe précédent ? Quand $h \rightarrow 0$, le terme $h\varphi(h)$ devient négligeable devant h , on peut donc le noter $o(h)$. On a donc $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$, soit (pour un physicien) : $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$.

Exemples numériques

La formule $\Delta f = df$ s'écrit aussi $f(x+h) \approx f(x) + \underbrace{hf'(x)}_{df}$. Souvent l'accroissement h de la variable x est noté dx en physique. On écrit donc aussi $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx$. Appliquons-la sur quelques exemples.

¹ Il faut que la fonction soit dérivable en ce point, ce qui est généralement le cas en physique.

L'aire d'un carré de côté x est une fonction de x . C'est bien sûr la fonction $f(x) = x^2$. Mettons que l'on cherche à calculer de tête l'aire d'un carré de $1,01m$ de côté. Comme on connaît bien l'aire d'un carré de « pile » $1m$ de côté, on pose $x = 1m$, et $h = dx = 0,01m$, de sorte que $x + h = 1,01m$. Et puisque $f'(x) = 2x$, la formule précédente devient $1,01^2 = (x + h)^2 \approx x^2 + h \times 2x = 1^2 + 0,01 \times 2 \times 1 = 1,02m^2$. La petite variation (ou *différentielle*) df vaut ici $0,02m^2$. Il est vrai que ce n'est qu'un résultat approximatif, mais si l'on prend sa calculatrice, on obtient exactement : $1,01^2 = 1,0201$. On a donc fait seulement une erreur de $0,01\%$ environ : pour un calcul de tête, c'est plutôt bien !

Passons au volume d'un cube : alors $f(x) = x^3$. Si je veux calculer le volume d'un cube de $2,02m$ de côté, je pose : $x = 2m; h = 0,02m$. Comme $f'(x) = 3x^2$, la formule $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$ s'écrit : $2,02^3 \approx 2^3 + 0,02 \times (3 \times 2^2) = 8,24m^3$, alors qu'en prenant sa calculatrice on trouve $2,02^3 = 8,242408$. On a fait cette fois une erreur de $0,03\%$. Vous conviendrez que ce n'est pas mal du tout.

Cherchons maintenant la valeur de $\sin(0,01rad)$. On pose $x = 0; h = 0,01$, et comme $\sin'(x) = \cos(x)$, la formule $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$ s'écrit $\sin(0,01) \approx \sin(0) + 0,01 \times \cos(0) = 0 + 0,01 \times 1 = 0,01$. Ce résultat se généralise rapidement à $\sin(h) \approx 0 + h \times 1 = h$ si h est petit ET exprimé en radians (car ce n'est qu'en radians que $\sin'(x) = \cos(x)$). On retrouve le résultat obtenu géométriquement dans le cours d'optique. Evidemment au final on peut revenir à la variable x et écrire $\sin x \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} x$.

Dans le même ordre d'idées vous pouvez montrer que $\tan(h) \approx h$ si h est petit (rappel : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$). D'autres équivalences bien utiles se démontrent de la même manière (le faire à titre d'exercice !) : $e^h \stackrel{h \rightarrow 0}{\approx} 1 + h$, $\ln(1 + h) \stackrel{h \rightarrow 0}{\approx} h$, $(1 + h)^a \stackrel{h \rightarrow 0}{\approx} 1 + ah$.

Appliquons par exemple la dernière égalité pour calculer de tête $\frac{1}{0,98}$. On reconnaît une forme $(1 + h)^a$ en posant $h = -0,02; a = -1$. Donc $\frac{1}{0,98} \approx 1 + (-1) \times (-0,02) = 1,02$, alors que la calculatrice donnerait $1,02041$.

Fonction de plusieurs variables

Généralisation à deux variables

Pour une fonction d'une seule variable, la différentielle $hf'(x)$ ou $f'(x)dx$ représente le (petit) accroissement de f lorsque x varie de $h = dx$. Mais cela n'est vrai que si dx est petit, c'est-à-dire si la fonction reste proche de sa tangente.

On généralise ces idées à des fonctions de plusieurs variables. Commençons par une fonction de deux variables $f(x, y)$, par exemple $f(x, y) = xy^2$. Dans ce cas x peut encore varier d'une quantité $h = dx$, mais y peut indépendamment varier d'une quantité $k = dy$. Chaque variation de x et de y contribue à faire varier f . Pour généraliser la formule $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$ on devine qu'il faut généraliser la notion de dérivée au cas de plusieurs variables. On introduit la **dérivée partielle par rapport**

à x , notée $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, qui signifie que l'on dérive par rapport à x en faisant comme si

l'autre variable y était une constante. Par exemple si $f(x, y) = xy^2$, on a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 1 \times y^2 = y^2$. En dérivant maintenant uniquement par rapport à y , on trouve

$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x \times 2y = 2xy$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on omet parfois de

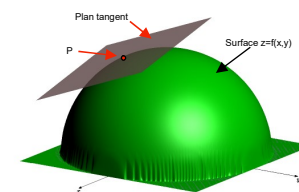
préciser les variables maintenues constantes, et on écrit $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ au lieu de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$.

Une **généralisation intuitive de la formule** $f(x + h) \approx f(x) + hf'(x)$ consiste à écrire que chaque variable x et y contribue séparément à la variation de f . On écrit donc :

$$f(x + h, y + k) \approx f(x, y) + h \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}_{df} + k \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{df}, \text{ ou } f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy}_{df}.$$

Géométriquement, df représentait tout à l'heure l'élévation le long de la tangente en A à la courbe. Maintenant dans le cas de deux variables, la *différentielle* $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$ représente la variation de hauteur en

suivant le plan tangent (en $P(x, y, z = f(x, y))$) à la surface $z = f(x, y)$, lorsque x varie de dx et y de dy . On fait donc l'approximation que si $h = dx$ et $k = dy$ sont assez petits (i.e. on ne s'éloigne pas trop du point P de tangence), la surface reste proche du plan tangent (voir sur le dessin ci-dessus le cas de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$).



Exemples de différentielles à deux variables

Prenons d'abord un exemple numérique. La fonction $f(x, y) = xy$ représente l'aire d'un rectangle de dimensions x et y . Si l'on veut calculer l'aire d'un rectangle de $2,01m$ et $3,02m$ de côtés, on va naturellement poser $x = 2m, y = 3m, dx = 0,01m, dy = 0,02m$. En

appliquant la formule $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$ on obtient

$$df = ydx + xdy = 3 \times 0,01 + 2 \times 0,02 = 0,07m^2, \text{ et donc}$$

$$f(2,01; 3,02) = f(2; 3) + df = 6 + 0,07 = 6,07m^2, \text{ contre } 6,0702m^2 \text{ avec une calculatrice.}$$

Pour prendre un **exemple physique**, un gaz possède des variables dites *d'état* qui ne dépendent que de l'état du gaz à un instant donné et non pas des transformations particulières qu'il a subies auparavant. La pression P , le volume V , la température T ou l'énergie U de ce gaz sont des exemples de telles variables d'état. Or l'expérience montre que si les variables T et V sont fixées, alors P et U le sont aussi : un gaz ne possède en fait que deux variables indépendantes parmi ses variables d'état (système *divariant* : c'est le cas de tout système physique fermé et homogène).

Puisque P est *fonction* de V et de T , soit $P(V, T)$, on peut écrire $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$. Mais si T et V varient, il en va de même pour U . On peut

écrire également $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$, sans mentionner P qui n'est pas

indépendante du couple (V, T) . Si l'on choisit plutôt les variables indépendantes P et T , on écrirait à la place : $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT$, sans mentionner V qui n'est pas indépendante du couple (P, T) .

Attention, remarquez la petite différence sur $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)$ entre ces deux formules : il n'y a

a priori aucune raison que $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. En effet, dans $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$, on dérive la

fonction U exprimée en fonction de T et P , et on maintient P constant en dérivant par rapport à T . Or si P est maintenu constant, le volume V varie lorsque T varie. Cela

n'est donc pas comparable *a priori* à $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. En fait il se trouve que $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

est tout de même vraie pour un gaz dit *parfait*, i.e. répondant à l'équation $PV = nRT$, mais pas pour d'autres gaz. On voit ici l'utilité de préciser la variable maintenue constante.

Pour un gaz parfait, on a $P = \frac{nRT}{V}$. Si l'on considère une quantité n donnée de gaz, n

est constante et les seules variables dont dépend P sont bien T et V . On écrit :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV = \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV.$$

Relations entre différentielles

Pour une fonction f à une seule variable x , on peut écrire $df = f'(x)dx$.

Exemple 1: $d(\sin x) = \cos x dx, d \ln x = \frac{dx}{x}, d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{2x dx}{a^2}.$

En physique (mais pas en maths !) on écrit parfois dans ce cas : $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx$ par

analogie avec le cas de plusieurs variables, ou même $df = \frac{df}{dx} dx$, égalité facile à retenir

puisque'elle serait évidente dans le cas de simples fractions.

On peut montrer les relations générales suivantes entre différentielles, faciles à mémoriser par analogie avec les propriétés des dérivées :

Différentielle d'une somme : $d(f + g) = df + dg$ par analogie avec $(u+v)' = u' + v'$.

Exemple 2: $d(x^2 + y) = 2x dx + dy$

Exemple 3: Une ellipse a pour équation $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Par différentiation on obtient

immédiatement la pente $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à l'ellipse au point de coordonnées (x, y) , puisque le

$$\text{long de l'ellipse on a } df = 0 = d\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + d\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 2x \frac{dx}{a^2} + 2y \frac{dy}{b^2} \text{ donc } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \frac{b^2}{a^2}.$$

Différentielle d'un produit :

$$d(fg) = fdg + gdf \quad (\text{par analogie avec } (uv)' = u'v + uv').$$

En particulier si k est une constante : $d(kf) = kdf$

Différentielle d'un quotient :

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (\text{par analogie avec } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2})$$

Exemple 4: Si $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2 \sin(x) \end{cases}$ et $\begin{cases} g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(x, y) = x^2 + y \end{cases}$, alors

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = d\left(\frac{2 \sin(x)}{x^2 + y}\right) = \frac{(x^2 + y)(2 \cos x dx) - 2 \sin x (2x dx + dy)}{(x^2 + y)^2}$$

Différentielle de fonctions composées :

On sait que pour deux fonctions f et g à une seule variable x , $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$. On généralise ce résultat : $d(g \circ f)_a = d(g)_{f(a)} \circ df_a$. En

physique on note ceci autrement : $d(g \circ f)_a = \frac{dg}{df} df_a$.

Exemple 5: $d(\sin(3x)) = \cos(3x) \times 3 dx$; $d([x^2 + y]^3) = 3[x^2 + y]^2 (2x dx + dy)$;
 $d(e^{3 \cos x + y^2}) = e^{3 \cos x + y^2} (-3 \sin x dx + 2y dy)$.

La notation de physique est facile à retenir et à généraliser. Par exemple pour une fonction f d'une seule variable x : $\frac{d(h \circ g \circ f)}{dx} = \frac{dh}{dg} \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$

Exemple 6: $d(\ln(\sin(y^2))) = \frac{1}{\sin(y^2)} \times \cos(y^2) \times 2y dy$

On mémorisera en particulier la **relation très utile** : $d(\ln(f)) = \frac{df}{f}$

Exemple 7: si $P = \frac{nRT}{V}$, alors

$$\frac{dP}{P} = d(\ln(P)) = d(\ln(n) + \ln(R) + \ln(T) - \ln(V)) = \frac{dn}{n} + \frac{dR}{R} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}$$

puisque R est une constante. Cette méthode de calcul par « dérivée logarithmique » est très utile dès qu'il s'agit de différencier un produit. En multipliant par P on obtient :

$$dP = \frac{P dn}{n} + \frac{P dT}{T} - \frac{P dV}{V}, \text{ ce qui est bien équivalent à l'expression}$$

$$dP = \frac{RT}{V} dn + \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV \text{ déjà mentionnée.}$$

Exemple 8: Lors d'une compression adiabatique réversible d'un gaz parfait, on a : $PV^\gamma = \text{const}$.

En calculant la dérivée logarithmique, on obtient immédiatement $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$.

Exemple 9: Montrons qu'un gaz qui obéit à la fois à la loi de Gay-Lussac (à pression P constante, le volume V est proportionnel à la température T), et à la loi de Boyle-Mariotte (à température constante, le produit PV est constant) est forcément un gaz parfait. Pour un gaz donné, tout est

fixé si l'on fixe T et P . On a donc $V = f(T, P)$ et $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$. Or d'après la

loi de Gay-Lussac, $V = bT$, où b est une constante si la pression est constante. Ainsi $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = b = \frac{V}{T}$. D'autre part d'après la loi de Boyle-Mariotte, $PV = a$, où a est une constante

si la température est constante. Ainsi $V = \frac{a}{P}$ donc $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{a}{P^2} = -\frac{PV}{P^2} = -\frac{V}{P}$. Par

conséquent, la formule précédente $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$ s'écrit $dV = \frac{V}{T} dT - \frac{V}{P} dP$

soit $\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T}$, donc $d \ln(PV) = d \ln T$, ou $\ln(PV) = \text{const} \times \ln(T)$. On en déduit

que $PV = KT$, où K est une constante (pour une quantité de gaz donnée). Comme le membre de gauche est extensif, il faut que K soit extensive. On a donc $K = nR$, où R est une constante indépendante de la quantité de gaz. On en déduit $PV = nRT$, *quod erat demonstrandum*.

