

Calcul différentiel et applications au calcul d'incertitudes - Exercices

- Dériver les fonctions suivantes : $f(x) = \cos(3x)$; $f(t) = Ae^{-3t}$; $f(x) = 3\cos(x^2)$;
 $f(x) = (\cos 3x)^2$; $f(\theta) = \ln(\tan(\theta^2))$
- Calculer les différentielles : $d(\cos x)$, $d(2x^3 + x^2)$, $d \ln(\sin x)$
- Soit $f(x) = x^2$. Développer $(x + dx)^2$ et vérifier ainsi que $f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) \times dx$ si $dx \ll 1$.
- En utilisant la notion de différentielle, déterminer sans calculatrice une estimation assez précise du volume d'un cube de $2,03m$ de côté.
- Calculer $\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2)_x$; Calculer $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ et $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ pour un gaz parfait. ;
 $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[(3x + y) \sin y^2]$; $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}[(3x + y) \sin y^2]$.
- Calculer : $d[x \sin y]$; $d(PV)$; $d(PV^\gamma)$, où γ est une constante ; $d(\ln\{PV^\gamma\})$; $d\left[\ln\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)\right]$.
- Existe-t-il une fonction $f(x, y)$ telle que $df = 4x \sin y \, dx + [2x^2 \cos(y) + 3]dy$?
- Existe-t-il une fonction $g(x, y)$ telle que $dg = xy^2 dx - xy dy$?
- Montrer que lors d'une transformation quelconque d'une quantité donnée de gaz parfait, on a :
 $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$. On démontrera en cours que si cette transformation est adiabatique quasi-statique alors : $nRdT + (\gamma - 1)PdV = 0$, où γ est une constante. En déduire que $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$. Que peut-on en déduire pour le produit PV^γ ?
- Déterminer sans calculatrice une estimation précise de l'aire A d'un rectangle de dimensions $x = 2,01m$ et $y = 3,03m$.
- Ecrire $x = 0,004196$ et $y = 3\,254\,500$ en notation scientifique avec 3 chiffres significatifs
- On considère les oscillations d'une masse $m = 51,23g$ accrochée à un ressort de raideur $k = 5,2N.m^{-1}$. Calculer la période $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ des oscillations en tenant compte des chiffres significatifs.
- On mesure la largeur $L = 5,1 \pm 0,3cm$ d'une tache de diffraction obtenue en interposant un cheveu de diamètre ϕ entre un écran et un laser. La distance du cheveu à l'écran est $D = 3 \pm 0,01m$, la longueur d'onde du laser vaut $\lambda = 632,8 \pm 0,1nm$. Sachant que $\phi = \frac{2\lambda D}{L}$, évaluer ϕ avec son incertitude.
- On branche en série 5 résistances r vendues comme « identiques » mais dont la tolérance (incertitude relative) est $\pm 1\%$. Quelle est l'incertitude relative sur la résistance totale ?
- On mesure 10 périodes d'oscillation d'une masse m suspendue à un ressort de raideur k . On rappelle que $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. On obtient expérimentalement les valeurs suivantes : $10T = 8,16s; 7,92s; 8,07; 8,86; 8,01; 8,02; 8,32$. A l'aide d'un tableur, calculer les valeurs de T correspondantes, puis la moyenne $\bar{T}$ et l'incertitude $u(\bar{T})$ sur la moyenne. On donne $m = 50,4 \pm 0,2g$. En déduire la raideur k du ressort (avec son incertitude).
- Soit $x = 10,0 \pm 0,2m$ et $y = 9,1 \pm 0,3m$. Calculer $x + y$ et xy .
- Soit $a = 2,0 \pm 0,1m$; $b = 5,3 \pm 1,2m$; $c = 1,216 \pm 0,004m$. Calculer $x = \sqrt{a + \frac{b}{c}}$ avec son incertitude : procéder par étapes, en calculant $y = \frac{b}{c}$, $z = a + y$, $x = \sqrt{z}$, et en tenant compte des valeurs numériques pour simplifier à chaque étape de calcul l'expression des incertitudes.