



Explication

On s'intéressera uniquement au cas où les coefficients sont des constantes, c'est à dire aux équations différentielles de la forme : $ay'' + by' + cy = f$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ avec I un intervalle.

4.1. Équations homogènes



Théorème Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons Δ son discriminant.

Soit S l'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$, alors

- Si $\Delta \neq 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou $\Delta > 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$): soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x} \right).$$

- Si $\Delta = 0$: soit r_0 l'unique racine de $aX^2 + bX + c$

$$S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left(x \mapsto e^{r_0 x}, x \mapsto x e^{r_0 x} \right).$$

- Si $\Delta < 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$):

Soient $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$ les racines complexes conjuguées de $aX^2 + bX + c$

$$S = \left\{ x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)) e^{r x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(x \mapsto \cos(\omega x) e^{r x}, x \mapsto \sin(\omega x) e^{r x} \right).$$