

Corrigé du Contrôle du 7 octobre
Durée : 2h

Sont interdits : Documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones (voire plus, à la discrétion des enseignants)

Exercice 1. Déterminez les zéros (ou "racines") dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des trinômes suivants :

(1) $3x^2 - 4x - 4$

Solution : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 64 > 0$, donc deux zéros

$$x_1 := \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\frac{2}{3} \text{ et } x_2 := \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 3} = 2$$

(2) $x^2 + 8x + 17$

Solution : $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 17 = 64 - 68 = -4 < 0$, donc deux zéros complexes

$$x_1 := \frac{-8 - i\sqrt{4}}{2} = -4 - i \text{ et } x_2 := \frac{-8 + i\sqrt{4}}{2} = -4 + i$$

Pensez à vérifier que vos résultats sont bien solutions.

Exercice 2. Déterminez $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = 15 - 8i$

Solution : On pose $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On veut

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 = 15 - 8i \\ |z|^2 = |z^2| = |15 - 8i| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 + 2iab = 15 - 8i \\ a^2 + b^2 = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = 15 \\ 2ab = -8 \\ a^2 + b^2 = 17 \end{array} \right.$$

En additionnant la 1ère et la 3ème ligne, on obtient $2a^2 = 15 + 17 = 32$, donc $a^2 = 16$.

Premier cas : $a = 4$. Il suit alors de la deuxième ligne que $b = -1$. Donc $z = 4 - i$.

Second cas : $a = -4$. Il suit alors de la deuxième ligne que $b = 1$. Donc $z = -4 + i$.

On vérifie ensuite que $(4 - i)^2 = (-4 + i)^2 = 15 - 8i$, donc c'est solution. Finalement

$$\{z^2 = 15 - 8i\} \Leftrightarrow \{z = 4 - i \text{ ou } z = -4 + i\}.$$

Exercice 3. Mettez les expressions suivantes sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{i}{2} + \frac{2 + 3i}{1 - i} \text{ et } (3 - i)^2(5 + 2i) + 32i$$

Solution :

$$\frac{i}{2} + \frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{i}{2} + \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{i}{2} + \frac{2 + 3i + 2i - 3}{2} = \frac{i}{2} + \frac{-1 + 5i}{2} = -\frac{1}{2} + 3i$$

$$(3 - i)^2(5 + 2i) + 32i = (9 + i^2 - 6i)(5 + 2i) + 32i = (8 - 6i)(5 + 2i) + 32i = 40 + 16i - 30i - 12i^2 + 32i = 52 + 18i$$

Exercice 4. Ensemble de définition de

$$(1) \frac{\sin(x) - \sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-2}) - 2}$$

Solution : Voyons ce qui impose des restrictions :

- aucune contrainte pour $\sin x : x \in \mathbb{R}$,
- $\sqrt{x-3}$ donc il faut $x \geq 3$,
- $\sqrt{x-2}$ donc il faut $x \geq 2$,
- $\frac{***}{(\sqrt{x-2})-2}$ donc il faut $(\sqrt{x-2}) - 2 \neq 0$.

Les deux premières contraintes se résument par $x \geq 3$. Pour la dernière, avec $x \geq 2$, on résoud $\sqrt{x-2} = 2$, c'est-à-dire $x-2 = 2^2$ donc $x = 6$. Donc il faut exclure 6. Finalement $D = [3, 6[\cup]6, +\infty[$.

$$(2) x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$$

Solution : Voyons ce qui impose des restrictions :

- $\sqrt{-x^2+x+2}$ donc il faut $-x^2+x+2 \geq 0$,
- $\frac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ donc il faut $-x^2+x+2 \neq 0$.

Etudions le signe du trinôme $-x^2+x+2$. On a $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$, donc deux zéros

$$x_1 := \frac{-1 - \sqrt{9}}{-2} = 2 \text{ et } x_2 := \frac{-1 + \sqrt{9}}{-2} = -1$$

et on a la forme factorisée $-x^2+x+2 = -(x-2)(x+1)$. On a alors le tableau de signes :

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x - 2$	-	-	0	+	
$x + 1$	-	0	+	+	
$-(x - 2)(x + 1)$	-	0	+	0	+

Et donc $-x^2+x+2 > 0$ si et seulement si $x \in]-1, 2[$. On a donc $D =]-1, 2[$.

Exercice 5. Domaine de définition, tableau de variation et graphe des fonctions suivantes :

$$(1) f : x \mapsto -\frac{2}{x+2} + 1$$

$$(2) g : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$$

Pour chacune des fonctions f et g : Quels sont les intervalles maximaux sur lesquels la fonction est bijective ? Déterminez alors la fonction réciproque dans chaque cas.

Solution : (1) $f : x \mapsto -\frac{2}{x+2} + 1$. Le domaine est $D_f := \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 2/(x+2)^2$ pour $x \neq -2$.

	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	1 ↗ +∞		1 ↗ -∞

On a donc deux bijections :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f_1 :]-\infty, -2[& \rightarrow &]1, +\infty[\\ x & \mapsto & -\frac{2}{x+2} + 1 \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} f_2 :]-2, +\infty[& \rightarrow &]-\infty, 1[\\ x & \mapsto & -\frac{2}{x+2} + 1 \end{array} \right\}$$

Pour l'inverse de f_1 , pour $x \in]-\infty, -2[$ et $y \in]1, +\infty[$, on a

$$f_1(x) = y \Leftrightarrow -\frac{2}{x+2} + 1 = y \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{2}{1-y} - 2$$

Pour $y > 1$, on a bien $\frac{1}{1-y} < 0$ et l'inverse est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (f_1)^{-1} :]1, +\infty[& \rightarrow &]-\infty, -2[\\ y & \mapsto & \frac{2}{1-y} - 2 \end{array} \right\}$$

De même

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (f_2)^{-1} :]-\infty, 1[& \rightarrow &]-2, +\infty[\\ y & \mapsto & \frac{2}{1-y} - 2 \end{array} \right\}$$

(2) $g : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$. L'ensemble de définition est $D_g = \mathbb{R}$. **Sens de variations.**

La fonction g est dérivable et $g'(x) = -2x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. De plus,

$$\{g'(x) > 0\} \Leftrightarrow x < 1 \text{ et } \{g'(x) < 0\} \Leftrightarrow x > 1$$

On a $g(1) = 4$. On en déduit le tableau de variations :

	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	$-\infty$	4	$-\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$

L'ensemble image est donc

$$Im(g) =]-\infty, 4].$$

Représentation graphique.

Bijektivité. En s'aidant du tableau de variation et de la représentation graphique, on voit que les restrictions à $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$ sont bijectives sur l'image, à savoir

$$g_1 :]-\infty, 1] \rightarrow]-\infty, 4] \quad x \mapsto -x^2 + 2x + 3 \quad \text{et} \quad g_2 : [1, +\infty[\rightarrow]-\infty, 4] \quad x \mapsto -x^2 + 2x + 3$$

sont bijectives. Déterminons les fonctions réciproques :

Pour g_1 . Soit $y \in]-\infty, 4]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g_1(x) = y \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 + y = 0$$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3 + y) = 16 - 4y = 4(4 - y) \geq 0$ car $y \leq 4$. On a donc

$$g_1(x) = y \Leftrightarrow \left\{ x = \frac{-(-2) - \sqrt{4(4-y)}}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{4-y} \text{ ou } x = \frac{-(-2) + \sqrt{4(4-y)}}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{4-y} \right\}$$

Avec la condition $x \in]-\infty, 1]$, on obtient

$$g_1(x) = y \Leftrightarrow \left\{ x = 1 - \sqrt{4-y} \right\}$$

Donc on a

$$(g_1)^{-1} : \begin{array}{ccc}]-\infty, 4] & \rightarrow &]-\infty, 1] \\ y & \mapsto & 1 - \sqrt{4-y} \end{array}$$

Pour g_2 . Avec la condition $x \geq 1$, c'est l'autre zéro qu'on doit sélectionner et avec le même calcul, on obtient

$$(g_1)^{-1} : \begin{array}{ccc}]-\infty, 4] & \rightarrow & [1, +\infty[\\ y & \mapsto & 1 + \sqrt{4-y} \end{array}$$

Exercice 6. Tracez le graphe de la fonction

$$x \mapsto |x-1| - 2|x+3|$$

Solution : Tout dépend du signe de $x-1$ et de celui de $x+3$. On fait donc le tableau de signe

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
$x-1$		-	-	0	+	
$ x-1 $		$-(x-1)$	$-(x-1)$		$x-1$	
$x+3$		-	0	+	+	
$ x+3 $		$-(x+3)$	$x+3$		$x+3$	
$ x-1 -2 x+3 $		$x+7$	4	$-3x-5$	-8	$-x-7$

D'où le graphe :

Formulaire : Carrés des entiers de 10 à 20.

$$10^2 = 100; 11^2 = 121; 12^2 = 144; 13^2 = 169; 14^2 = 196$$

$$15^2 = 225; 16^2 = 256; 17^2 = 289; 18^2 = 324; 19^2 = 361$$

FIN