

Corrections premier principe en système ouvert

Tuyère

La transformation est très rapide donc adiabatique car la chaleur n'a pas le temps de rentrer ni de sortir (en ordre de grandeur, les gaz restent une milliseconde dans ce système ouvert).

Il n'y a pas de pièce mécanique donc pas de travail « utile ». Les énergies potentielles de pesanteur sont constantes car la tuyère est horizontale. En régime permanent le premier principe s'écrit donc $0 = [(e_{c,s} + h_s) - (e_{c,e} + h_e)] \dot{m}$, où $\dot{m}$ représente le débit massique de la tuyère, nécessairement identique à l'entrée et à la sortie en régime permanent. Or l'énergie potentielle massique e_c s'écrit $\frac{v^2}{2}$. Donc $\frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) = h_e - h_s$. Or pour n moles de gaz parfait, on a $\Delta H = n c_p \Delta T$, donc par unité de masse

$$h_s - h_e = \Delta h = \frac{\Delta H}{m} = \frac{n}{m} c_p \Delta T = \frac{c_p}{M} \Delta T = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_s - T_e). \text{ On en tire}$$

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \frac{M}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma} (v_s^2 - v_e^2) \approx -80^\circ.$$

Compresseur

1. $H=U+PV$ (donc $h = u + pv$)

$$dh = du + d(pv) = \delta Q^{rev} + \delta W^{rev} + p dv + v dp, \text{ et } \delta Q^{rev} = 0 \text{ car}$$

$$\text{transformation adiabatique réversible, et } \delta W^{rev} = -p dv, \text{ donc } dh = v dp$$

2. $pv^\gamma = k = \text{const}$

$$\Delta h = \int_i^f v dp = k^{1/\gamma} \int_i^f p^{-1/\gamma} dp = v_i p_i^{1/\gamma} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]_i^f$$

3. $P_m = D_m v_i \frac{\gamma}{\gamma-1} p_i^{1/\gamma} \left[p_f^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$. On factorise le crochet par $p_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, d'où

$$P_m = D_m v_i \frac{\gamma}{\gamma-1} p_i^{1/\gamma} p_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[\left(\frac{p_f}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = D_m v_i \frac{\gamma}{\gamma-1} p_i \left[\left(\frac{p_f}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right].$$

4.

$$\text{Air = gaz parfait : } \frac{V}{m} = \frac{RT}{PM} = 0,84 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\text{Relation de Mayer pour un GP : } c_p = c_v + R, \text{ donc } \gamma = 7/5$$

$$\text{A.N. } P_m = 2 \times \frac{7}{2} \times 10^5 \times 0,84 \times [20^{2/7} - 1] = 7,96 \times 10^5 \text{ W} = 796 \text{ kW}$$

Turbine de centrale

$$\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{Th} = \dot{m}_2 \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) + \dot{m}_3 \left(h_3 + \frac{v_3^2}{2} \right) + \dot{m}_4 \left(h_4 + \frac{v_4^2}{2} \right) - \dot{m}_1 \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)$$

$$\mathcal{P}_u - 350 \times 10^3 = 1299 \times \left(2519 \times 10^3 + \frac{270^2}{2} \right) + 107 \times \left(2610 \times 10^3 + \frac{100^2}{2} \right) + 13 \times \left(168 \times 10^3 + \frac{e^2}{2} \right) - 1419 \times \left(2773 \times 10^3 + \frac{150^2}{2} \right)$$

$$\longrightarrow \mathcal{P}_u = 350 \times 10^3 + 3,32 \times 10^9 + 2,80 \times 10^8 + 2,18 \times 10^6 - 3,95 \times 10^9$$

$$\mathcal{P}_u = -349 \times 10^6 \text{ W} = -349 \text{ MW} \longrightarrow \text{La turbine récupère } 349 \text{ MW}$$

Compresseur à 2 étages

cf adiabatique

massiques

$$\mathcal{P}_{u1} + \dot{Q} = \dot{m} (h_s - h_e) = \dot{n} (h_s - h_e) = \dot{n} c_p (T_1 - T_0) \quad \text{GP}$$

$$\longrightarrow \mathcal{P}_u = \frac{900 \times 29,1 \times 100}{3600} = 727,5 \text{ W}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - R} \longrightarrow \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{c_p - R}{c_p} = \frac{R}{c_p}$$

Deuxième étage: $\mathcal{P}_{u2} = \dot{n} c_p (T_2 - T_0)$; Total: $\mathcal{P}_{tot} = \mathcal{P}_{u1} + \mathcal{P}_{u2} = \dot{n} c_p [T_1 + T_2 - 2T_0]$

Compresseur n°1 = adiabatique $\longrightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} = T_0 y^{\frac{R}{c_p}}$

cf question de cours

De même pour le compresseur 2 $\longrightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{P_2}{P_0} \frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{R}{c_p}} = T_0 \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{R}{c_p}}$

Donc $\mathcal{P}_{tot} = \dot{n} c_p \left[T_0 y^{\frac{R}{c_p}} + T_0 \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{R}{c_p}} - 2 \right]$ (eqfd).

3 $\mathcal{P}_{tot}$ minimal $\Rightarrow \frac{d\mathcal{P}_{tot}}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy} \left[y^a + \left(\frac{x}{y} \right)^a \right] = 0 \Rightarrow a y^{a-1} + x^a (-a) y^{-a-1} = 0$

en notant $a = \frac{R}{c_p}$

$$\Rightarrow a y^{2a} - x^a = 0 \Rightarrow y^2 = x \text{ (eqfd)}. \text{ On a donc } y = \sqrt{x}$$

$$\longrightarrow \mathcal{P}_{tot} = \frac{900}{3600} \times 29,1 \times 300 \times \left[2 \left(\sqrt{10} \right)^{\frac{8,314}{29,1}} - 2 \right] = 1700 \text{ W}$$

4 Aucune pièce mobile, aucun transfert thermique avec l'extérieur:

$$\dot{W}_u + \dot{Q} = 0 = \dot{m}_{\text{eau}} (h_{\text{eau},s} - h_{\text{eau},e}) + \dot{m}_{\text{air}} (h_{\text{air},s} - h_{\text{air},e})$$

Soit $0 = \dot{m}_{\text{eau}} c_{p,\text{eau}} (T_{s,\text{eau}} - T_{e,\text{eau}}) + \dot{m}_{\text{air}} c_{p,\text{air}} (T_{s,\text{air}} - T_{e,\text{air}})$

$$\longrightarrow \dot{m}_{\text{eau}} = \frac{\dot{m}_{\text{air}} c_{p,\text{air}} (T_{e,\text{air}} - T_{s,\text{air}})}{c_{p,\text{eau}} (T_{s,\text{eau}} - T_{e,\text{eau}})} = \frac{900/3600 \times 29,1 \times (T_0 (\sqrt{10})^{\frac{R}{c_p}} - T_0)}{4181 \times (50 - 10)} = 5 \text{ g.s}^{-1}$$