

$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \rightarrow P = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \rightarrow$ Pour le mélange: $P_{air} = P_{N_2} + P_{O_2} = \frac{1}{RT} (P_{N_2} M_{N_2} + P_{O_2} M_{O_2})$

Mélange parfait $\rightarrow P_{N_2} = x_{N_2} P_{atm}$ (loi de Dalton) et $P_{O_2} = x_{O_2} P_{atm} \rightarrow P_{air} = \frac{P_{atm}}{RT} (x_{N_2} M_{N_2} + x_{O_2} M_{O_2})$

A.N: $P_{air} = \frac{10^5}{8,31 \times 273} (0,80 \times 28 \times 10^{-3} + 0,20 \times 32 \times 10^{-3}) = 1,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ Elle diminue bien sûr avec l'altitude et avec la température.

Compression en 2 étapes
lentement

1 $W_m = \int -P dV = -P_1 V_1 \int \frac{dV}{V} = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \xrightarrow{PV = nRT = \text{const}} -nRT_1 \ln \frac{P_1}{P_2} = nRT_1 \ln \frac{P_2}{P_1}$

A.N: $W_m = 1 \times 8,31 \times 290 \times \ln 5 = 3,88 \text{ kJ}$

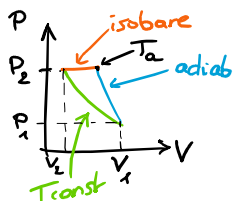
2 $PV^\gamma = \text{const}$ et $PV = \text{const} \times T \rightarrow P^\gamma V^\gamma = \text{const} \times T^\gamma \xrightarrow{\gamma=1,4} P^{\gamma-1} = \text{const} \times T^\gamma$ ou $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}$

3 Adiabatique: $W_a = \Delta U = n C_V (T_2 - T_1) = n C_V T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$
Or $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$ et GP $\rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma-1}$, donc $W_a = \frac{nR}{\gamma-1} T_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

refroidissement isobare: $W_i = -P_2 (V_2 - V_1) = -P_2 \left(\frac{nRT_2}{P_2} - \frac{nRT_1}{P_2} \right) = nR (T_2 - T_1) = nRT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = nRT_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

Au total $W_1 = W_a + W_i = nRT_1 \left[1 + \frac{1}{\gamma-1} \right] \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

4 Isotherme + GP $\rightarrow PV = \text{const} \rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$
Adiabatique + GP $\rightarrow PV^\gamma = \text{const} \rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{\gamma P}{V}$, avec $\gamma > 1 \rightarrow \left| \frac{dP}{dV} \right|_{\text{isoth}} < \left| \frac{dP}{dV} \right|_{\text{adab.}}$



On trouve: $W_1 = 1 \times 8,31 \times 290 \times \frac{1,4}{0,4} \times \left[5^{\frac{1}{1,4}} - 1 \right] = 4,92 \text{ kJ} > W_m$

Interprétation graphique: $W_m = \int -P dV = \text{aire sous } \text{ } < W_1 = \text{aire sous } \text{ }$

5 Etape A: $W_A = nRT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$; Etape B: $W_B = nRT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

Au total $W = W_A + W_B = nRT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right]$

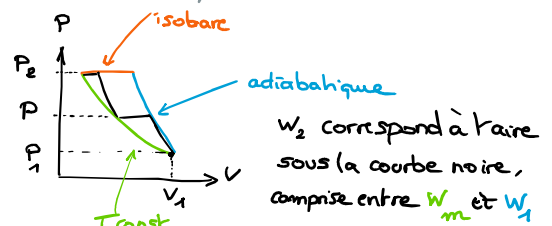
6 On pose $a = \frac{\gamma-1}{\gamma}$. Alors $W = \text{const} \times \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^a + \left(\frac{P_2}{P} \right)^a - 2 \right]$ donc $W'(P) = 0 \Rightarrow a \left(\frac{P}{P_1} \right)^{a-1} \times \frac{1}{P_1} + a \left(\frac{P_2}{P} \right)^{a-1} \times \left(-\frac{1}{P^2} \right) = 0$

Donc si W est minimal: $\frac{P^{a-1}}{P_1^a} = \frac{P_2^a}{P^{a+1}}$; $P^{2a} = P_1^a P_2^a$; $P = \sqrt{P_1 P_2}$

(Remarque: le diagramme (P,V) permet de voir qu'il s'agit bien d'un minimum, le maximum correspond à $P = P_1$)

On a donc: $\frac{P}{P_1} = \frac{P_2}{P}$ donc $W = 2nRT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

7 $W_2 = 2 \times 8,31 \times 290 \times \frac{1,4}{0,4} \left[5^{\frac{1}{2 \times 1,4}} - 1 \right] = 4,36 \text{ kJ}$



Turboréacteur

1 Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait : $PV^\gamma = \text{const}$ $\left. \begin{array}{l} PV = \text{const} \cdot T \\ PV^\gamma = \text{const} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{const}$
 donc $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$; R.N. : $T_2 = 300 \times 10^{0.4/1.4} = 579 \text{ K}$

2 Premier principe en système ouvert : $\dot{W} + \dot{Q} = \dot{m} (h_2 - h_1 + \Delta e_c)$ $\xrightarrow{\text{néglige}} \dot{W} = \dot{m} \Delta h = \dot{m} c_p \Delta T$ soit pour 1 kg :
 R.N. $\dot{W}_{1 \rightarrow 2} = 1,00 \times (579 - 300) = 279 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ $\xrightarrow{\text{0 (adiabatique)}}$ $\dot{W}_{12} = c_p (T_2 - T_1)$

3 De la même façon, on a entre 3 et 4 : $\dot{W}_{34} = \dot{m} c_p (T_4 - T_3)$ soit $T_4 = \frac{\dot{W}_{34}}{\dot{m} c_p} + T_3$, or $\dot{W}_{34} = -\dot{W}_{12}$ puisque la turbine ne sert qu'à entraîner le compresseur. R.N. : $T_4 = \frac{-279 \times 10^3}{1 \times 10^3} + 1200 = 921 \text{ K}$

4 De même qu'en 1, $P_4 = P_3 \left(\frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 10 \times \left(\frac{921}{1200} \right)^{1.4/0.4} = 3,96 \text{ bar}$

De même $T_3 = T_4 \times \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 921 \times \left(\frac{1}{3.96} \right)^{0.4/1.4} = 621 \text{ K}$

5 $\dot{W} = \dot{m} e_s$, or entre 4 et 5, le premier principe en système ouvert donne : $\dot{W} + \dot{Q} = \dot{m} (h + e_c)_5$
 soit $0 = h_5 - h_4 + e_{c5} - e_{c4} = c_p (T_5 - T_4) + e_s$ d'où $e_{c5} = c_p (T_4 - T_5)$ et $\dot{W} = \dot{m} c_p (T_4 - T_5)$
 R.N. : $\dot{W} = 50 \times 10^3 \times (921 - 621) = 15 \text{ MW}$

6 $\dot{Q}_c = \dot{m} c_p (T_3 - T_2)$ d'où $\eta = \frac{\dot{m} c_p (T_4 - T_3)}{\dot{m} c_p (T_3 - T_2)} = \frac{921 - 621}{1200 - 579} = 48,3\%$